

Advanced Rock and Soli Mechanics

高等岩土力学

主 编 李元松

副主编 张电吉 陈清运 张小敏



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

Advanced
Rock and
Soil Mechanics

本书系统、深入地阐述了岩土力学的基本概念、基本理论和基本方法，全书共10章，内容大致分为三个部分：第一部分介绍岩土的物理、力学及水理性质，岩土의强度理论、本构关系与弹塑性理论框架；第二部分论述岩土力学工程问题，包括挡墙岩土压力计算、边坡稳定性分析、地下硐室围岩压力与稳定分析和地基变形与承载力计算等；第三部分阐明岩土力学数值计算方法、岩土动力学特性及岩土力学的最新进展。

本书主要供岩土工程、地质工程、采矿工程、结构工程、道路与桥隧工程等专业的研究生和高年级本科生作为教材使用，也可作为相关科研人员和工程师的参考书。

- 责任编辑 / 胡 艳
- 责任校对 / 刘 欣
- 版式设计 / 马 佳
- 封面设计 / 王荆强

ISBN 978-7-307-10653-6



9 787307 106536 >

定价: 45.00元

Advanced Rock and Soli Mechanics

高等岩土力学

主 编 李元松

副主编 张电吉 陈清运 张小敏



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等岩土力学/李元松主编;张电吉,陈清运,张小敏副主编. —武汉:武汉大学出版社,2013.6

ISBN 978-7-307-10653-6

I. 高… II. ①李… ②张… ③陈… ④张… III. 岩土力学—高等学校—教材 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 056474 号

责任编辑:胡 艳 责任校对:刘 欣 版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:通山金地印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:26 字数:612千字 插页:1

版次:2013年6月第1版 2013年6月第1次印刷

ISBN 978-7-307-10653-6 定价:45.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

岩石力学是研究岩石(体)在外力作用下的应力、变形及其破坏规律等力学特性的学科,该学科是解决岩石工程相关技术问题的理论基础。岩石属于固体,岩石力学应属于固体力学的范畴。一般从宏观意义上讲,把固体看做连续介质。但是,岩体不但有微观的裂隙,而且有层理、片理、节理以至于断层等不连续面。岩体不是连续介质,而且常表现为各向异性或非均质性。岩石中若含水,则它又表现为两相体。从这些方面来看,岩石力学又是固体力学与地质科学的边缘科学。其应用范围涉及土木建筑、水利水电、铁道、公路、地质、采矿、地震、石油、地下工程、海洋工程等与岩石工程相关的众多工程领域。岩石力学经历了从 19 世纪末至 20 世纪初的初期发展阶段、20 世纪初至 30 年代的经验发展阶段、20 世纪 30 年代至 60 年代的经典理论阶段以及 20 世纪 60 年代至今的现代发展阶段。

土力学是研究土体的应力、变形、强度、渗流及长期稳定性的学科。广义的土力学又包括土的生成、组成、物理化学性质及分类在内的土质学。土力学也是一门实用的学科,该学科是土木工程的一个分支,主要研究土的工程性质,解决与土体相关的工程问题。土力学是为建筑工程、水利工程、交通工程、地下工程、地质灾害防治工程等许多专业领域服务的技术基础学科。它诞生于 1925 年,从 20 世纪 60 年代起进入现代发展阶段。该学科发展至今,其内容已相当广泛,但仍未形成成熟而完整的理论体系。

随着各类建筑物日益向更高、更大、更重、更深方向发展,岩土工程问题已不能仅由土力学或岩石力学的基本知识所能解决,必须发展一种带有很强综合性和很强实践性的学科来阐明解决岩土工程问题的基本原则、理论支撑、配套技术和运作规律,从而把建立现代岩土工程学的迫切任务和把高等岩土力学引入土木工程专业研究生学位课程提上了议事日程。以往高等土力学与高等岩石力学作为独立的课程开设,各相关专业根据行业特点有所侧重,有的开设高等土力学,有的开设高等岩石力学,有的则两门课程均开设。随着大土木概念逐渐深入人心,工程建设规模日益扩大,对岩土工程技术人员的要求逐渐提高,单纯掌握土力学或岩石力学的知识,已不能适应现代工程建设的需求。然而增加学时,分别开设两门课程又与研究生阶段理论课程精简的指导原则相悖。武汉工程大学于 2003 年率先开设高等岩土力学课程,但一直没有完整的配套教材,给备课与课堂教学带来诸多不便。

有鉴于此,作者总结近 10 年的研究生教学经验,尝试将土力学与岩石力学的主要内容融合为一体,编成《高等岩土力学》,其基本思路是:将岩石力学与土力学中基本概念、基础理论、基本方法与基本知识相同的部分归并在一起,比如:将岩土的物理性质、变形特性、强度特性、渗流特性、强度理论、本构关系、数值计算方法等基本相同的内容归并在一起阐述;将岩体、土体具有鲜明特点的内容单独列出,如地基的沉降固结理论、岩体结构面特征、岩石地下工程等内容分别阐释。使高等岩土力学成为既融合了土力学与岩石力学基本概念、基

本理论,同时又能保留岩、土各自特点的一门综合性教程,以适应现代工程建设的需求。

本书旨在对高等岩土力学进行系统融合与阐释。所谓高等岩土力学,是相对于初等岩土力学而言的,初等岩土力学主要包含经典岩土力学的基本部分,可用于解决岩土工程中的一些基本问题,解决问题所采用的理论和方法限于四大经典力学。高等岩土力学的理论与方法会更加全面、系统和深刻,尤其包括初等岩土力学所不能容纳的岩土弹塑性理论、岩土流变学、岩土动力学、可靠性分析理论以及岩土工程数值计算方法等复杂内容。显然,为了保持学科理论体系的完整性和系统性,在《高等岩土力学》中部分重复初等岩土力学的内容是必要的。

岩土力学是为建筑工程、水利工程、交通工程、地下工程、地质灾害防治工程等许多专业领域服务的技术基础学科。众所周知,在不同的领域中,岩土力学理论的应用可能有明显的差别,而且与岩土力学有关的专业技术标准很多,我国技术标准的稳定性又较差,将理论与应用兼顾起来是有困难的。《高等岩土力学》作为教材,应具有相对的稳定性和通用性,并反映带有共性的基本原理和方法。本书重点阐述基本概念、理论和方法;传递研究与设计中的重要信息;反映国内外最新学术成就,并指出仍需进一步深入研究的问题与方法。

教材建设目标:在“重基础,淡专业,宽口径,大土木”原则的指导下,将高等岩石力学与高等土力学的基本概念、基础理论、基本原理和研究方法统一于一体,达到既具有相对稳定的理论框架体系,又能包容本学科最新取得的研究成果;既具有一定的理论水平,又具有较强实用价值,适用于土木工程硕士研究生及高年级本科生使用的基础性教材。

土力学与岩石力学的基础理论框架体系完全相同,研究方法手段也相近,但因长期以来部门割据、行业保护,各自领域按行业特点制定标准、规范,编写教材,使得专业人员知识面狭窄、适应性差。《高等岩土力学》致力于打破传统领域界限,将岩石力学与土力学的基本概念、基本原理、基础理论以及基本符号统一整合,通过一段时间的应用、推广与修改完善,形成完整通用的岩土力学基础理论体系,进而推动我国现行岩土工程规范、标准的统一,从而大大节约工程建设成本。事实上,欧洲规范的统一制定,早已体现这一发展思路。

本书是在武汉工程大学研究生处、教务处关于大学生、研究生教育发展基金项目的资助下完成的,在本书的编写过程中,研究生段鑫和夏进完成了部分文字的输入和图表编辑及校对工作,同时得到土木工程学科和矿业工程学科师生的大力支持,在此一并表示感谢。

鉴于编者水平的局限和编写时间仓促,书中错误与不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。作者联系 E-mail:li_yuan_song@126.com。

作 者

2012 年 12 月

目 录

第1章 绪论	1
1.1 岩土力学的概念、特点及研究方法	1
1.2 岩土力学的研究内容与工程问题	4
1.2.1 岩土力学研究的内容	4
1.2.2 岩土力学研究的工程问题	7
1.3 岩土力学的发展与展望	8
第2章 岩土的基本力学特性	16
2.1 基本试验资料	16
2.1.1 直剪试验	17
2.1.2 固结试验	17
2.1.3 常规三轴试验	18
2.1.4 真三轴试验	20
2.2 土的变形特性	20
2.2.1 基本变形特性	21
2.2.2 一般变形特性	21
2.2.3 土的变形机制	23
2.3 土的强度特性	24
2.3.1 土的破坏与强度	24
2.3.2 抗剪强度公式	25
2.3.3 黏性土的强度	26
2.3.4 粗粒土的强度	29
2.3.5 强度影响因素	31
2.4 岩石的基本力学性质	33
2.4.1 岩石的强度	33
2.4.2 岩石的变形	41
2.5 岩体的基本力学性质	50
2.5.1 岩体结构面力学特征	50
2.5.2 岩体的变形	61
2.5.3 岩体的强度	71

第3章 岩土渗透性及渗流	84
3.1 概述	84
3.2 岩土的渗透性	85
3.2.1 渗流基本概念	85
3.2.2 渗透定律	86
3.2.3 渗透试验与渗透系数	88
3.3 渗流基本方程	93
3.3.1 基本方程	93
3.3.2 边界条件	94
3.3.3 初始条件	95
3.3.4 基本方程的应用	95
3.4 势流与流网	96
3.4.1 势流与势函数	97
3.4.2 等势线	97
3.4.3 流线	98
3.4.4 流网	98
3.5 渗流有限元计算	99
3.5.1 水头变分方程	100
3.5.2 变分方程的离散	100
3.5.3 浸润面边界的处理	101
3.6 渗透破坏与控制	102
3.6.1 渗流力	102
3.6.2 流砂或流土现象	103
3.6.3 管涌现象和潜蚀作用	104
第4章 岩土强度理论	106
4.1 强度条件的形式	106
4.1.1 第一种形式	106
4.1.2 第二种形式	107
4.1.3 第三种形式	107
4.1.4 破坏曲线	109
4.1.5 岩土类材料的屈服与破坏特性	110
4.2 经典强度理论	110
4.2.1 Coulomb-Mohr 屈服准则	110
4.2.2 Tresca 准则	112
4.2.3 Mises 准则与 Drucker-Prager 准则	114
4.2.4 Lade-Duncan 准则及 Lade 准则	118
4.2.5 格里菲斯(Griffith)理论	123

4.2.6 霍克(Hoek)-布朗(Brown)经验准则	125
4.3 统一强度理论	127
4.3.1 经典强度理论简评	127
4.3.2 二参数强度理论	127
4.3.3 三参数强度理论	128
4.3.4 关于统一强度理论	129
第5章 岩土黏弹塑性理论框架	131
5.1 线弹性理论	131
5.1.1 横观同性介质	131
5.1.2 各向同性介质	132
5.1.3 弹性常数的物理意义与测定	134
5.2 弹塑性理论	136
5.2.1 全量理论与增量理论	136
5.2.2 加载条件与加卸载准则	137
5.2.3 Drucker 公设和 Ильюшин 公设	140
5.2.4 塑性位势流动理论	146
5.2.5 硬化模型与硬化定律	148
5.2.6 弹塑性本构关系及其矩阵	151
5.3 岩土流变理论	157
5.3.1 岩土流变的概念	157
5.3.2 流变模型理论	158
5.3.3 长期强度	175
5.4 滑移线场理论	177
5.4.1 基本方程	178
5.4.2 滑移线场	179
5.4.3 边值问题	181
5.4.4 解析解答	182
5.4.5 数值解答	185
5.5 极限分析理论	186
5.5.1 静力许可应力场	186
5.5.2 运动许可速度场	186
5.5.3 虚功率原理	187
5.5.4 极限分析定理	188
5.5.5 近似解法举例	189
第6章 岩土体变形计算	194
6.1 岩土变形分析方法	194

6.1.1	岩土变形机制	194
6.1.2	变形分析方法	195
6.2	弹性力学公式	196
6.2.1	Boussinesq 公式	196
6.2.2	Cerutti 公式	199
6.2.3	Mindlin 公式	200
6.3	基础最终沉降计算	201
6.3.1	地基应力计算	201
6.3.2	普通分层总和法	202
6.3.3	修正分层总和法	203
6.3.4	应力历史法	204
6.3.5	Skempton-Bjerrum 法	207
6.3.6	有关问题讨论	208
6.4	一维固结计算	209
6.4.1	一维固结方程	209
6.4.2	一维固结计算	211
6.4.3	有关问题讨论	212
6.5	准多维固结计算	213
6.5.1	体积应变与应力	213
6.5.2	非耦合固结方程	213
6.5.3	假设的合理性	214
6.5.4	砂井固结计算	214
6.6	三维固结计算	218
6.6.1	问题的基本方程	218
6.6.2	Biot 方程的推导	219
第7章	岩土的动力特性	221
7.1	岩土中的弹性波理论	221
7.1.1	波在介质中的传播	221
7.1.2	波动方程	221
7.1.3	平面波	222
7.1.4	等直杆中纵波的基本理论	224
7.1.5	岩土中的弹性波	228
7.2	岩土的动力特性	229
7.2.1	动力问题与动荷载	229
7.2.2	岩土动力参数	232
7.2.3	岩土的动力变形特性	236
7.2.4	岩土的动力强度特性	237

7.3 土的振动液化	239
7.3.1 土的振动液化机理及试验分析	239
7.3.2 影响土液化的主要因素	242
7.3.3 地基液化判别与防治	244
第8章 岩土工程问题	249
8.1 挡墙岩土压力	249
8.1.1 Rankine 土压力理论	249
8.1.2 Coulomb 土压力理论	251
8.1.3 有关问题说明	259
8.2 岩土地基工程	260
8.2.1 概述	260
8.2.2 地基临界荷载	262
8.2.3 无重介质承载力公式	265
8.2.4 Terzaghi 承载力公式	266
8.2.5 Meyerhoff 承载力公式	268
8.2.6 岩基承载力	269
8.2.7 有关问题说明	271
8.3 岩土边坡工程	273
8.3.1 概述	273
8.3.2 稳定分析理论	275
8.3.3 Fellenius 条分法	276
8.3.4 Bishop 条分法	277
8.3.5 Janbu 条分法	278
8.3.6 Morgenstern-Price 条分法	279
8.3.7 有关问题说明	281
8.4 岩土地下工程	284
8.4.1 概述	284
8.4.2 地下工程围岩应力	285
8.4.3 围岩压力与控制	293
8.5 深部岩体力学问题	303
8.5.1 深部岩体的特点	303
8.5.2 深部岩体工程力学特性	304
8.5.3 深部岩体工程施工设计特点	305
第9章 岩土力学数值分析方法	306
9.1 概述	306
9.1.1 岩土工程问题的基本特点	306

9.1.2 岩土工程数值分析方法的类型	307
9.2 有限元法	308
9.2.1 有限元法的基本方程	309
9.2.2 初始地应力与等效节点力	313
9.2.3 施工过程的模拟	317
9.2.4 岩体力学中的有限元法特点	319
9.2.5 有限元法求解岩土力学问题的步骤及实例	324
9.3 边界元法	328
9.3.1 直接边界元法基本方程	328
9.3.2 间接边界元法基本方程	331
9.3.3 边界元法求解平面问题的步骤	334
9.4 有限差分法	337
9.4.1 有限差分基本方程	338
9.4.2 平面问题有限差分方程	339
9.4.3 显式有限差分算法——时间递步法	341
9.4.4 三维问题有限差分法方程	344
9.5 离散元法	347
9.5.1 离散元法的基本方程	347
9.5.2 离散元法的计算机实施	349
9.5.3 参数的选择和本构模型	353
9.6 应用岩土数值分析方法应注意的问题	361
第10章 岩土力学的最新进展	363
10.1 智能岩土力学	363
10.1.1 专家系统及应用	364
10.1.2 人工神经网络及应用	366
10.1.3 其他研究	368
10.2 细观岩土力学	369
10.2.1 光学显微镜观测方法	370
10.2.2 电子显微镜观测方法	370
10.2.3 声发射方法	370
10.2.4 计算机断层成像观测方法	371
10.3 不确定性岩土力学	371
10.3.1 模糊数学分析方法	371
10.3.2 灰色系统分析方法	372
10.3.3 岩土的可可靠性分析	374
10.4 其他方法	382
10.4.1 岩石损伤力学研究	382

10.4.2 分形岩土力学研究	386
10.4.3 岩土力学耦合分析	391
10.5 岩土力学系统	395
10.5.1 概述	395
10.5.2 岩土力学系统的基本问题	396
10.5.3 岩土力学系统演化过程	398
10.5.4 岩土力学系统演化过程和演化规律研究的发展趋势	400
参考文献	401

第1章 绪 论

1.1 岩土力学的概念、特点及研究方法

岩石力学(Rock Mechanics)是研究岩石或岩体在外力作用下的应力、变形及其破坏规律等力学特性的学科,该学科是解决与岩石工程相关技术问题的理论基础。岩石属于固体,岩石力学应属于固体力学的范畴。一般,从宏观意义上把固体看做连续介质,但是岩体不但有微观裂隙,而且有层理、片理、节理以至于断层等不连续面。岩体不是连续介质,而且常表现为各向异性或非均质性。岩石中若含水,它又表现为两相体。从这些方面来看,岩石力学又是固体力学与地质科学的边缘科学。其应用范围涉及采矿、土木建筑、水利水电、铁道、公路、地质、地震、石油、地下工程、海洋工程等与岩石工程相关的众多工程领域。

土力学(Soil Mechanics)是研究土体的应力、变形、强度、渗流及长期稳定性的学科。广义的土力学又包括土的成因、组成、物理化学性质及分类在内的土质学。土力学也是一门实用的学科,它是土木工程的一个分支,主要研究土的工程性质,解决与土体相关的工程问题。

从上述两门学科的定义可以看出,其内容与方法以及研究目标与应用范围非常相似或相互交融,其主要差异仅体现在“岩石”与“土体”的材料特性,如果忽略这种差异,则两者基本相同,因而可合并成为一门统一的学科——岩土力学。

岩土力学(Rock and Soil Mechanics)是研究岩土体在外力作用下的应力、变形及其破坏规律等力学特性的一门学科,其目的是解决岩土工程相关的技术问题。

岩石(Rock)是组成地壳的基本物质,它是由矿物或岩屑在地质作用下按一定规律凝聚而成的自然地质体。按成因,可分为岩浆岩、沉积岩和变质岩。

岩体(Rockmass)是指一定工程范围内的自然地质体,它经历漫长的自然历史过程,经受各种地质作用,并在地应力长期作用下,其内部保留各种永久变形和各种地质构造形迹,如不整合、褶皱、断层、层理、节理、劈理等不连续面。岩石与岩体的重要区别就是岩体包含若干不连续面。

岩体结构(Rockmass Structure)是指岩体中结构面与结构体的排列组合特征。因此,岩体结构包括两个基本要素,即结构面和结构体。通常所谓结构面,是指岩体内具有一定方向、延展较大、厚度较小的面状地质界面,包括物质的分界面和不连续面,它是在地质发展历史中、尤其是地质构造变形过程中形成的。被结构面分割而形成的岩块,四周均被结构面所包围,这种由不同产状的结构面组合切割而形成的单元体称为结构体。

土中固体颗粒是岩石风化后的碎屑物质,简称土粒。土粒集合体构成土的骨架,土骨架的孔隙中存在液态水和气体。因此,土是由土粒(固相)、土中水(液相)和土中气(气相)所组成的三相物质;当土中孔隙被水充满时,则是由土粒和土中水组成的二相体。土体具有与一般连续固体材料(如钢、木、混凝土及砌体等建筑材料)不同的孔隙特性,它不是刚性的多孔介质,而是大变形的孔隙性物质。在孔隙中,水的流动显示土的透水性(渗透性);土孔隙体积的变化显示土的压缩性、胀缩性;在孔隙中,土粒的错位显示土内摩擦角和黏聚力的抗剪强度特性。土的密度、孔隙率、含水量是影响土力学性质的重要因素。土粒大小悬殊甚大,有大于 60mm 粒径的巨粒粒组,有小于 0.075mm 粒径的细粒粒组,有 0.075 ~ 60mm 粒径的粗粒粒组。

工程用土总的分为一般土和特殊土。广泛分布的一般土又可分为无机土和有机土。原始沉积的无机土大致上可分为碎石类土、砂类土、粉土和黏性土四大类。当土中巨粒、粗粒粒组的含量超过全重 50% 时,属于碎石类土或砂类土;反之,属于粉土或黏性土。碎石类土和砂类土总称为无黏性土,其一般特征是透水性大、无黏性;黏性土的透水性小;而粉土的性质介于砂类土和黏性土之间。特殊土有遇水沉陷的湿陷性土、湿胀干缩的胀缩性土、冻胀性土、红黏土、软土、填土、混合土、盐渍土、污染土、风化岩与残积土等。

岩土力学用力学的基本理论分析岩土中的工程问题,而它又区别于一般力学。

理论力学将对象理想化为刚体,材料力学将对象理想化为线弹性固体,连续介质力学将对象理想化为均匀连续介质,即便是这种理想化的连续介质,对于岩土体来说,仍然很粗糙。首先,所有岩石工程中的“岩石”,是一种天然地质体,或称为岩体,它具有复杂的地质结构和赋存条件,是典型的“不连续介质”;其次,岩体中存在地应力,是由于地质构造和重力作用等形成的内应力。由于岩土工程开挖引起的地应力以变形能的形式释放,正是这种“释放荷载”才是引起岩石工程变形和破坏的作用。因此,岩土力学的研究思路和研究方法与以外荷载作用为特征的材料力学、结构力学等有本质的不同。

土是由不连续的固体颗粒、液体和气体三相组成的,其固体颗粒的矿物成分、粗细、形状、级配、密度及构造,土粒间孔隙水与气体的比例及形态对土的力学性质和工程性质有很大的影响。因此,除运用一般连续介质力学的基本原理外,还应密切结合土的实际情况进行研究。土力学与其他力学学科所研究对象的不同之处还在于,土是地质历史的产物,它历经沧桑,经历过漫长的风化、搬运、沉积和地壳运动等过程,形成其独特的性质。原状土一般是不均匀、各向异性的,有一定胶结性或特定的结构性,因而重复性极少。严格地讲,世界上没有性质完全相同的两种原状土。同样,在室内试验研究中的重塑土也由于制样、固结方式和程序等差别,很难达到完全一致。而室内试验中研究原状土,取样扰动或样品的代表性成为研究工作的主要障碍。

此外,岩土力学既是基础理论学科,又具备实践科学的特点。最近的研究表明,无论是岩土体结构,还是其赋存状况、赋存条件,均存在大量的不确定性,岩土力学的理论计算结果只能是精度较差的大致估计,理论与现实的差距只能通过经验估计和判断。因此,必须改变传统的固体力学的确定性研究方法,而从“系统”的概念出发,采用不确定性方法进行岩土

力学的研究。“岩土体”是自然系统,“岩土工程”是人地系统,其行为和功能与施工因素密切相关。

由于岩土力学是一门边缘交叉科学,研究的内容广泛、对象复杂,这就决定了岩土力学研究方法的多样性。根据所采用的研究手段或所依据的基础理论所属学科领域的不同,岩土力学的研究方法可大概归纳为以下四种:

(1)工程地质研究方法:着重于研究与岩土体的力学性质有关的岩土体地质特征,如用岩矿鉴定方法了解岩土体的类型、矿物组成及结构构造特征;用地层学方法、构造地质学方法及工程勘察方法等了解岩土体的成因、空间分布及岩体中各种结构面的发育情况等;用水文地质学方法了解赋存于岩土体中地下水的形成与运移规律等。

(2)科学实验方法:科学实验是岩土力学发展的基础,包括实验岩土力学参数的测定、模型试验、现场原位试验及监测技术、地应力的测定和岩体构造的测定等。试验结果可为岩土变形和稳定性分析计算提供必要的物理力学参数。同时,还可以用某些试验结果(如模拟试验及原位应力、位移、声发射监测结果等)直接评价岩土体的变形和稳定性,以及探讨某些岩土力学理论问题。随着岩土力学的不断发展,其涉及的实验范围也越来越宽,如地质构造的勘测、大地层的力学测定等可为岩土力学提供必要的研究资料。另外,室内岩土微观测定也是岩土力学研究的重要手段。近代发展起来的新实验技术已不断应用于岩土力学领域,如遥感技术、激光散斑和切层扫描技术、三维地震勘测成像和三维地震CT成像技术、微震技术等,都已逐渐为岩土工程服务。

(3)数学力学分析方法:数学力学分析是岩土力学研究中的一个重要环节,它是通过建立工程岩土结构的力学模型和利用适当的分析方法,预测工程岩土体在各种力场作用下的变形与稳定性,为岩土工程设计和施工提供定量依据,其中,建立符合实际的力学模型和选择适当的分析方法是数学力学分析的关键。目前常用的力学模型有刚体力学模型、弹性及弹塑性力学模型、流变模型、断裂力学模型、损伤力学模型、渗透网络模型、拓扑模型等。常用的分析方法有:①数值分析方法,包括有限差分法、有限元法、边界元法、离散元法、无界元法、流形元法、不连续变形分析法、块体力学和反演分析法等;②模糊聚类 and 概率分析,包括随机分析、可靠度分析、灵敏度分析、趋势分析、时间序列分析和灰色系统理论等;③模拟分析,包括光弹应力分析、相似材料模型试验、离心模型试验等。在边坡研究中,还普遍采用极限平衡的分析方法。

(4)整体综合分析方法:针对整个工程以系统工程为理论基础,运用多种方法手段进行研究的一种综合分析方法。这是岩土力学与岩土工程研究中极其重要的一套工作方法。由于岩土力学与工程研究中每一环节都是多因素的,且信息量大,因此必须采用多种方法,并考虑多种因素(包括工程的、地质的及施工的因素等)进行综合分析和综合评价。应特别注重理论和经验相结合,才能得出符合实际情况的正确结论。就岩土工程而论,因为在岩土工程问题中,存在工程、地质及施工等多方面的不确定性因素,整体综合分析方法必须以不确定性分析方法为指导。只有采用不确定性研究方法,才能彻底摆脱传统的弹性力学、结构力学的确定性分析方法的影响,从而使研究和分析的结果更符合实际,更可靠和实用。现代非

线性科学理论、信息科学理论、系统科学理论、模糊数学、人工智能、灰色理论和计算机科学技术的发展等为不确定性分析方法奠定了必要的理论基础。

1.2 岩土力学的研究内容与工程问题

1.2.1 岩土力学研究的内容

岩土力学是近代发展起来的一门新兴学科和边缘学科,是一门应用性和实践性很强的应用基础学科,它的应用范围涉及采矿、土木建筑、水利水电、铁道、公路、地质、地震、石油、地下工程、海洋工程等众多的与岩土工程相关的工程领域。一方面,岩土力学是上述工程领域的理论基础;另一方面,正是上述工程领域的实践,促使岩土力学的诞生和发展。岩土力学的主要内容主要有:

1.2.1.1 岩土的工程地质特征

岩土体工程地质特征研究的基本任务是岩土体的成因、应力历史及赋存环境的研究,其主要内容有岩石、岩体、土体的概念,矿物成分及其结构构造,岩土体的工程分类,岩体结构特征,土体颗粒级配,赋存环境对岩土体力学性质和工程性质的影响以及原始地应力等方面的研究。

1.2.1.2 岩土的性质与岩土试验

岩土的性质主要指物理性质和力学性质。岩土力学理论计算是重要的,但获取岩土体力学参数更为重要。在 Terzaghi 之前,人们对岩土性质的了解非常有限,设计堤坝、地基和边坡等岩土工程结构完全是凭经验进行。Terzaghi 作为岩土力学的奠基人,是第一个重视岩土的性质和岩土试验的人。相对于其他材料,要获取可靠的岩土参数困难得多。此外,岩土性状不仅因岩土类别不同而不同,而且随环境因素的变化而变化,所以必须以发展变化的眼光研究岩土的性质。由于岩土的力学性质的复杂性,目前对分析模型的研究和计算参数的确定仍落后于计算技术的发展,这方面的不当所引起的误差通常远大于计算方法本身的误差。

就岩土的力学性质乃至整个岩土力学而言,本构特性是关键。广义地讲,描述材料力学性质的数学表达式均称为本构方程(Constitutive Relation),说明材料力学特性的理论称为本构理论,包括机理的基本假定(Basic Assumption)、本构方程的建立和特性参数规律性的研究,例如,应力与应变之间的关系、破坏状态下应力或应变分量之间的关系(即强度条件)、渗流速度与水力坡降之间的关系(即渗流定律)等,都属于本构方程。在本书中,本构方程仅指反映材料变形性质的数学关系,特别是应力与应变之间的关系。

在试验基础上建构的本构理论是唯象的,即描述材料宏观力学现象。唯象理论的合理性在于所依据的是宏观试验,而所得结论仍然用于宏观实际,也就是以宏观世界作为出发点,建立宏观理论,反过来又用于宏观世界,并由宏观世界来检验其正确性。毫无疑问,通过宏观试验掌握岩土的力学性质是重要的,但仅仅停留在唯象的描述上是不够的。对岩土的基本现象和岩土的性质从内在机制上做出说明非常重要。换句话说,对于岩土的性质,不仅要知其然,还要知其所以然。这就要求必须弄清岩土的成因、组成、结构及外部作用是怎样

影响岩土力学性质的。

为了研究岩土的力学性质,岩土力学试验是必需的,而且试验技术的改进至关重要。人们早已发现,岩土试验成果会因试验方法和技巧的不同而有较大出入,由此引起的计算误差通常比不同计算方法引起的误差更大。因此,有经验的工程师更为重视选择有代表性的试样、选用符合实际的试验方法和提高试验技巧及精度。自岩土力学诞生以来,人们在岩土力学性质试验研究方面付出了异常艰苦的劳动,能够更好地模拟现场条件的新型试验技术不断涌现,例如,除了常规室内试验外,发展了大型高压三轴试验、平面应变试验、高压固结试验、大型直剪试验、应力路径控制三轴试验等。但复杂应力状态下的试验技术仍有待发展。

1.2.1.3 理论研究数值分析

饱和土由固体颗粒、水两种物质组分构成。颗粒形成骨架,水充填于固体颗粒之间的孔隙中。在外力作用下,各组分中产生的应力存在着相互约束关系,各组分的变形也存在相互约束关系。饱和土固液相之间的关系采用有效应力原理描述,而固体颗粒之间的相互作用用连续方程反映。对土体进行力学分析时,可以采用两种基本方法,即有效应力分析法和总应力分析法。前者将土骨架和孔隙水分开考虑,采用土的排水指标,即用有效应力指标进行分析;而后者则将土体视为单质固体,分析方法与普通固体力学没有什么区别。

岩体与完整的岩石材料不同,岩体中除存在相对完整、坚硬的岩石块体外,还存在着节理、层理和断层等各种不连续的地质结构面。岩体在不连续地质界面的切割下,形成一定的岩体结构,并赋存于一定的地质环境(地应力、地下水、地温、地热等)之中。结构面在岩体不同部位的发育程度和分布规律的差异,使岩体工程性质呈现显著的不连续性、非均质性和各向异性。由于岩体被各种地质界面切割,具有不连续性和多裂隙性,因此岩体常常被称为节理岩体、裂隙岩体或不连续岩体。岩体在外力作用下的变形强度特性要比其他材料复杂得多。

从力学角度分析,岩土体被视为连续介质就意味着它服从连续介质力学的普遍规律,即变形和应力都是连续的,且满足平衡微分方程、几何方程、本构方程、变形协调方程、定解条件。此外,根据分析结果,可用材料的强度理论判断其是否破坏。连续介质力学理论及计算方法都已相当成熟,特别是结合有限单元法等数值方法以后,复杂的本构方程、不规则的边界条件、材料的不均匀性及各向异性都已不成问题。但是,岩土力学问题有其特殊性,必须有针对性地发展计算理论与方法。

在现代岩土力学中,数值方法(Numerical Method)、特别是有限单元法获得了广泛应用。事实上,许多复杂的岩土力学问题都不能获得解析解,必须借助现代计算技术。例如,人们对施工过程中岩土体的力学行为越来越关注,而这种过程只能靠数值模拟才能预先了解。采用数值方法分析岩土力学问题是可行的,但其应用尚不成熟。目前还无法做到准确的定量分析,数值结果通常只能定性地应用,但数值计算能使我们了解岩土体哪些部位薄弱,可能出现什么问题,这样的信息在工程决策中具有不可替代的导向作用。在我国土石坝设计规范中,已规定高土石坝要做有限元应力变形计算。经典土力学计算方法简便、直观,这是工程师喜欢的主要原因。若能在较完善分析和丰富经验的基础上做出合理修正,经典计算方法将具有更大的实用价值。在这方面,数值方法可望做出重要贡献。

1.2.1.4 模型试验与现场观测

地质力学模型试验属于结构模型试验技术的范畴。这种方法在 20 世纪 70 年代以后得到广泛应用,特别是对于那些重要的复杂岩土工程,常常同时采用模型试验和数值计算两种方法进行研究。在数值计算技术还不发达的时期,人们曾经对模型试验方法抱有很大希望。即使是在数值方法较为成熟之后,人们似乎仍然具有如下比较普遍的看法:模型试验与数值方法各具特点、相辅相成,可以互相补充和验证,两者相结合能够比较全面地分析工程问题。

模型试验是把岩土体变形与破坏问题当做边值问题进行试验研究。但是,模型试验解决实际问题所面临的难度并不比数值方法小,因为模型试验不仅要求清楚地知道岩土体的地质特征和材料特性,还要求选择合适的模型材料,而有时模型与原型在几何、应力、材料力学参数等方面的比例很难达到协调、相容。显然,如果数值方法本身的适用性和精度没有问题,它确实可以取代模型试验,而且模型试验方法在许多发达国家已经被数值方法所取代。不过,数值计算并不能完全替代模型试验,因为有些复杂材料与结构可以相当好地进行物理模拟,而对其力学性状、特别是不明的地方则不能很好地进行数值模拟。事实上,对于复杂的岩土力学问题,至少数值方法本身的适用性与精度需要用模型试验的结果来验证。

周密细致的现场观测和调查研究十分重要。现场观测可以用来检验本构模型和计算理论,并对其做出必要的修正。此外,现场观测资料也可直接为工程提供服务。例如,了解软土地基排水预压达到的固结度,以便确定卸载日期;利用观测位移反分析岩土力学性质参数,用于同种岩土体的变形、强度与稳定性计算。

1.2.1.5 应用研究与智能预测

从宏观的角度看,岩土工程问题是个系统课题,岩土力学的贡献只是其中的一部分。岩土力学的理论目标自然是尽可能全面而准确地描述和预测岩土体的各种力学现象,其中包含大量的旨在描述现象、揭示原因、查明机理的理论研究。但岩土力学是实用性很强的学科,其最终目的在于指导工程实践。毫无疑问,岩土力学就是随着工程实践发展起来的应用学科,而且工程师乐于采用可靠易行的方法。研究的最终结果落到实用上,必然是由博返约。虽然比较可靠的复杂分析可直接用于重要工程,但更有意义的是把这种分析当做衡量标准,去创建便于应用的简化模型或方法,或对原有计算方法进行修正。

人们早已发现,岩土体的力学行为非常复杂,期望对它们做出精确描述和预测是不切实际的。例如,饱和软土地基在荷载作用下的沉降问题应当说是相对简单的课题,已有大量的研究成果,但问题似乎仍未完全解决。对许多岩土工程问题,直到现在还未能建立起一般的分析和设计方法,仍过多地依赖经验。此外,人们在建构理论和计算方法时,不得不引入较多的假定。这就意味着任何理论和方法都有其适用范围,对此必须予以特别注意。考虑到理论分析与计算中引入的高度理想化假设,将岩土力学应用于工程实际,经验公式和修正系数是不可缺少的。换句话说,为了更好地应用岩土力学知识,必须建立一套理论计算、现场观测及工程经验相结合的计算方法。H. G. Poulos 曾长期研究桩基沉降问题,他得出结论:可行的途径是首先选择计算方法,参考室内试验方法;然后将计算得到的沉降与大量实际工程观测结果进行对比分析,针对不同地区提出与计算方法相应的修正系数。这种方法当然不是新的,目前我国地基沉降计算中规范分层总和法就引入了沉降计算修正系数。卢肇钧(1989,1998)多次指出:目前还没有任何一种岩土力学计算理论能在一次计算中概括岩土

的全部复杂性质。每一种理论都是在某些简化假定的前提下建立的,而且无论计算技术如何精确,实际计算结果不可能超过其参数测定的精度。因此,在运用任何一种计算理论去分析岩土力学问题时,还需要考虑这种理论所未曾计入的其他因素及其影响,并进行综合分析判断。这里所建议的综合分析判断,应包括从不同角度,用不同理论所进行的分析,以及大量工程实录和各种试验结果为参考所做出的判断。

前述课题基本上属于经典力学的范畴,长期以来,岩土力学也是沿着这条道路前进的。然而,人们早就发现,许多实际问题仅仅依靠清晰的力学分析是不能彻底解决的。岩土力学处理的实际问题属于数据有限或定义不良的问题。在地质资料、变形破坏机制、材料本构模型与参数的确定等方面都遇到了很大的、有时似乎是难以克服的困难。面对这种复杂介质与结构的力学问题,除了对经典力学加以改造和发展外,人们逐渐将现代非线性系统、人工智能科学引入岩土力学,建立非线性静力和动力系统理论。

通过分析就会发现,经典力学途径也是把岩土体作为系统看待,在根据微分方程及理论求解的情况下,岩土体被视为无限自由度系统;在采用有限元等数值方法求解的情况下,岩土体被视为有限自由度系统。实际上,经典力学途径与系统科学途径的根本区别在于,前者将岩土体视为白箱系统,而后者则视其为灰箱系统或黑箱系统。大量研究表明,包括专家系统、神经网络、混沌动力学(或时序分析)、灰色系统预报在内的智能科学方法,的确是进行岩土工程问题预测的一条可行途径。

1.2.2 岩土力学研究的工程问题

根据现代工程观念,岩土体被视为建筑物或构筑物系统的一部分。工程师必须根据工程要求对岩土体做出合理的设计,而合理设计必须基于可靠的岩土力学分析与计算。在涉及岩土体的工程活动中,人们可能会遇到各种问题,如堤坝及天然边坡的变形与稳定性、建筑地基的沉降变形与失稳滑动、地下空间周围介质的变形与稳定性、软土地区城市地面沉降、采空区地面变形与塌陷等。设计对岩土工程结构的基本要求可归结为:

(1) 作用于岩土体上的荷载不超过其承载能力,保证岩土体在防止整体破坏方面有足够的安全储备;

(2) 控制岩土体变形使之不超过允许值,保证结构系统不因岩土体变形而损坏或者影响其正常使用;

(3) 在渗流作用下,岩土体必须是稳定的,有时渗流量也要受到限制。

按工程类别划分,岩土力学研究的工程问题主要有:

(1) 岩土地下工程的稳定性研究:基本任务是岩土力学理论在地下工程中的应用问题,主要内容有地下开挖引起的应力重分布、围岩(土)的变形和破坏、支护结构上的围岩(土)压力、围岩(土)的支护设计理论与计算方法。

(2) 岩土边坡工程的稳定性研究:基本任务是岩土力学理论在边坡工程中的应用问题,主要内容有边坡破坏机制、边坡稳定性分析和评价方法与加固技术、滑坡预测与防治理论与方法。

(3) 岩土地基工程的稳定性研究:基本任务是岩土力学理论在地基工程中的应用问题,主要内容有地基中的应力分布、地基的变形沉降、地基承载力、地基稳定性的分析理论与计

算方法。

按我国传统行业习惯划分,岩土力学研究的主要问题可概括为以下几方面:

(1) 土木建筑工程:高层建筑地基处理与加固技术;大型地下洞室、地下建筑空间设计、施工与加固理论技术;地面建筑物沉降、倾斜控制和纠偏技术;山城或山坡及临坡建筑物基础滑坡监测预报与防治技术。

(2) 水利水电工程:坝基及坝肩稳定性、防渗加固理论和技术;有压和无压引水隧道设计、施工及加固理论技术;大跨度高边墙地下厂房的围岩稳定及加固技术;高速水流冲刷的岩土力学问题;水库诱发地震的预报问题;库岸稳定及加固方法。

(3) 采矿工程:露天采矿边坡设计及稳定加固技术;井下开采中巷道和采场围岩稳定性问题,特别是软岩巷道和深部开采地压控制问题;采场稳定性及开采优化(采场结构、开采顺序、开挖步骤等)设计问题;矿井突水预测、预报及预处理理论和技术;岩爆、煤与瓦斯突出预测及预处理理论和技术;采空区处理及地面沉降问题;岩石破碎问题。

(4) 铁道和公路建设工程:线路边坡稳定性分析;隧道设计和施工技术;隧道施工中的地质超前预报及处理;高地应力区的岩爆理论及处理;隧道入口施工技术及洞脸边坡角的确定和加固措施;地铁施工技术。

(5) 石油工程:岩土应力与岩土渗透性;岩土力学与地球物理勘探综合研究;钻探技术与井壁稳定性;岩土力学与采油技术(水压致裂、水平钻孔);油层压缩及地表沉陷;石油、天然气运输、储存工程及环境影响。

(6) 海洋勘探与开发工程。

(7) 核电站建设中核废料处理技术。

(8) 地层热能资源开发技术问题。

(9) 地震预报中的岩土力学问题。

以上只是一些主要方面,随着岩土工程建设的发展,还会有新问题不断提出。

1.3 岩土力学的发展与展望

土力学的发展可以划分为三个阶段:1920年以前的萌芽阶段,1920年至1960年左右的古典土力学阶段和1960年左右至今的现代土力学阶段,各阶段代表人物和其主要研究成果如下:

(1) 萌芽阶段。18世纪欧美国家在产业革命推动下,社会生产力有了快速发展。大型建筑、桥梁、铁路、公路的兴建,促使人们对地基土和路基土的一系列技术问题进行研究。1773年法国科学家 C. A. Coulomb 发表了《极大极小准则在若干静力问题中的应用》,介绍了刚滑楔理论计算挡土墙背粒料土压力的计算方法;法国学者 H. Darcy 于1855年创立了土的层流渗透定律;英国学者 W. T. M. Rankine 于1857年发表了土压力塑性平衡理论;法国学者 J. Boussinesq 于1885年推导了弹性半空间半无限体表面竖向集中力作用时土中应力、变形的理论解。

(2) 经典土力学阶段。20世纪20年代开始,土力学的研究有了迅速的发展。瑞典 K. E. Petterson 于1915年首先提出,后由瑞典 W. Fellenius 及美国的 D. W. Taylor 进一步发展

出的土坡稳定分析整体圆弧滑动面法;法国学者 L. Prandtl 于 1920 年发表了地基剪切破坏时滑动面形状和极限承载力公式;1925 年美籍奥地利人 K. Terzaghi 写出第一本《土力学》专著,他是第一个重视土的工程性质和土工试验的人,他所创导的饱和土的有效应力原理,将土的主要力学性质,如应力、变形、强度、时间各因素相互联系起来,并有效地用于解决一系列的土工问题,从此,土力学成为一门独立的学科。L. Rendulic 于 1936 年发现土的剪胀性、土的应力-应变非线性关系以及土体具有加工硬化与软化性质。此后,有关土力学论著和土力学教材,像雨后春笋般地蓬勃发展。

(3) 现代土力学阶段。1963 年, Roscoe 发表了著名的剑桥模型,提出可以全面考虑土的压硬性和剪胀性的数学模型,宣告现代土力学的开端。伴随工程建设事业的蓬勃发展,土力学围绕从宏观到微观结构、本构关系与强度理论、物理模拟与数值模拟、测试与监测技术、土质改良等方面取得了长足进展。同时,计算机技术的应用又为这门学科注入了新的活力,实现了测试技术的自动化,提高了理论分析的准确性,标志着本学科进入一个新的时期。至此,土力学已派生出理论土力学、试验土力学、计算土力学和应用土力学四大分支。

在我国,早在 20 世纪 50 年代,陈宗基教授对土的流变学和黏土结构进行了研究;黄文熙院士对土的液化进行了探讨,提出考虑土侧向变形的地基沉降计算方法,他在 1983 年主编的土力学专著《土的工程性质》系统地介绍了国内外有关的各种土的应力应变本构模型的理论 and 研究成果。钱家欢、殷宗泽教授主编的《土工原理与计算》较全面地总结土力学的新发展,是很多高等院校研究生高等土力学课程的教材,在国内有较大的影响。沈珠江院士在土体本构模型、土体静、动力数值分析、非饱和土理论等方面取得令人瞩目的成就,2000 年出版《理论土力学》专著,较全面地总结了近 70 年来国内外学者的研究成果。

1936 年,第一届国际土力学及基础工程学术会议在美国麻州坎布里奇召开,由土力学创始人 Karl Terzaghi 主持工作。由于第二次世界大战的影响,12 年后才召开第二届学术会议,以后每四年一届,至今已召开 17 届。1999 年,国际土力学及工程协会(the International Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ISSMFE)改名为国际土力学及岩土工程学术会议(the fifth International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, XVICSMGE)。

我国 1957 年在北京设立了全国性的土力学及基础工程学术委员会,由茅以升主持开展工作,并于 1978 年成立了土力学及基础工程学会。1999 年为与国际土协的名称相适应,中国土木工程学会土力学及岩土工程学会(Chinese Society of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, China Civil Engineering Society)改名为中国土木工程学会土力学及岩土工程分会(The Chinese Institution of Soil Mechanics and Geotechnical and Engineering—the China Civil Engineering Society, CISMGE-CCES)。此外,欧洲、美洲、亚洲、东南亚等地区召开了历届学术会议。以上国内外学术会议的召开大大促进了土力学学科的发展。

从 1925 年土力学创立至今,经过了近百年的发展,已经取得了丰硕的成果,并在工程建设领域发挥着重大的作用。与此同时,现代大型建筑、高层建筑、高速公路、高速铁路和地下空间开发对土力学提出了更高的要求,势必会出现更多新的领域等待探索,新的问题等待研究。

(1) 区域性土分布和特性的研究。经典土力学是建立在无结构强度理想的黏性土和无

黏性土基础上的,但由于形成条件、形成年代、组成成分、应力历史不同,土的工程性质具有明显的区域性。对各类各区域性土的工程性质开展深入系统的研究,是土力学发展的方向之一。

(2)多因素影响和符合实际、更具有应用价值的本构模型的研究。实际工程土的应力-应变关系非常复杂,具有非线性、弹性、塑性、黏性、剪胀性、各向异性等,同时,应力路径、强度发挥度以及岩土的状态、组成、结构、温度等均对其有影响。企图建立能反映各类岩土的、适用于各类岩土工程的理想本构模型是困难的,或者说不可能的。因此,研究建立用于解决实际工程问题的实用模型或建立能进一步反映某些土体应力-应变特性的理论模型将是土力学研究的重要课题。

(3)不同介质间相互作用及共同分析的研究。土体由固、液、气三相组成,其中,固相是以颗粒形式的散体状态存在。固、液、气三相间相互作用对土的工程性质有很大的影响。土体应力-应变关系的复杂性从根本上讲都与土颗粒相互作用有关。从颗粒间的微观作用入手,研究土的本构关系是非常有意义的。通过土中三相相互作用研究,还将促进非饱和土力学理论的发展。

(4)土工试验技术的研究。土工试验技术不仅在工程建设实践中十分重要,而且在理论的形成和发展过程中也起着决定性作用,应在土工试验中大力引进和发展现代测试技术,如虚拟测试技术、电子测量技术、光学测试技术、航测技术、电磁场测试技术、声波测试技术和遥感测试技术等,提高测试结果的可靠性、可重复性和可信度,这将对土力学理论的发展和完善起到重要的作用。

(5)计算技术的研究。虽然土工计算分析在大多数情况下只能给出定性分析结果,但该结果对工程师决策意义重大,因此,应重视各种数值计算方法、专家系统、CAD 技术和计算机仿真技术等 in 土木工程中的应用,加强确定性计算方法如有限元法(FEM)、有限差分法(FLAC)、离散单元法(DEM)、不连续变形分析方法(DDA)、流形元法(MEM)和半解析元法(SAEM)等在土力学中的应用,为工程建设提供有力指导,为理论分析的发展奠定坚实基础。

在 21 世纪,土力学理论与实践在非饱和土力学、环境土力学、土体破坏理论等方面将取得长足的发展。

岩石力学是伴随着采矿、土木、水利、交通等岩石工程的建设 and 数学力学等学科的进步而逐步发展形成的一门新兴学科,按其发展进程可划分为以下四个阶段:

(1)初始阶段(19 世纪末至 20 世纪初)。这是岩土力学的萌芽时期,产生了初步理论以解决岩体开挖的力学计算问题。例如,1912 年 A. Heim 提出了静水压力理论。他认为,地下岩石处于一种静水压力状态,作用在地下岩石工程上的垂直压力和水平压力相等,均等于单位面积上覆岩层的重量,即 γH 。

W. J. M. Rankine 和金尼克也提出了相似的理论,但他们认为只有垂直压力等于 γH ,而水平压力应为 γH 乘一个侧压系数,即 $\lambda \gamma H$ 。朗金根据松散理论,认为 $\lambda = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$;而金尼克根据弹性理论的泊松效应,认为 $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$,其中, γ 、 μ 、 φ 分别为上覆岩层容重、泊松比

和内摩擦角, H 为地下岩石工程所在深度。由于当时地下岩石工程埋藏深度不大, 因而人们曾一度认为这些理论是正确的, 随着开挖深度的增加, 越来越多的人认识到上述理论是不准确的。

(2) 经验理论阶段(20 世纪初至 20 世纪 30 年代)。该阶段出现了根据生产经验提出的地压理论, 并开始用材料力学和结构力学的方法分析地下工程的支护问题。最有代表性的理论就是普罗托吉雅柯诺夫提出的自然平衡拱学说, 即普氏理论, 该理论认为, 围岩开挖后自然塌落成抛物线拱形, 作用在支架上的压力等于冒落拱内岩石的重量, 仅是上覆岩石重量的一部分。于是, 确定支护结构上的荷载大小和分布方式成了地下岩石工程支护设计的前提条件。K. Terzahi 也提出相同的理论, 只是他认为塌落拱的形状是矩形, 而不是抛物线形。普氏理论是相应于当时的支护型式和施工水平发展起来的。由于当时的掘进和支护所需的时间较长, 支护和围岩不能及时紧密相贴, 致使围岩最终往往有一部分破坏、塌落。但事实上, 围岩的塌落并不是形成围岩压力的唯一来源, 也不是所有的地下空间都存在塌落拱。围岩和支护之间并不完全是荷载和结构的关系问题, 在很多情况下, 围岩和支护形成一个共同承载系统, 而且维持岩石工程的稳定最根本的还是要发挥围岩的作用。因此, 靠假定的松散地层压力来进行支护设计是不合实际的。尽管如此, 上述理论在一定历史时期和一定条件下还是发挥了重要作用。

(3) 经典理论阶段(20 世纪 30 年代至 20 世纪 60 年代)。这是岩土力学学科形成的重要阶段, 弹性力学和塑性力学被引入岩土力学, 确立了一些经典计算公式, 形成围岩和支护共同作用的理论。结构面对岩体力学性质的影响受到重视, 岩土力学文献和专著的出版、实验方法的完善、岩体工程技术问题的解决等, 都说明岩土力学发展到该阶段已经成为一门独立的学科。

在经典理论发展阶段, 形成了连续介质理论和地质力学理论两大学派。

连续介质理论是以固体力学为基础, 从材料的基本力学性质出发, 认识岩石工程的稳定问题, 这是认识方法上的重要进展, 抓住了岩石工程计算的本质性问题。早在 20 世纪 30 年代, 萨文就用无限大平板孔附近应力集中的弹性解析解分析岩石工程的围岩应力分布问题。在 20 世纪 50 年代, 鲁滨涅特运用连续介质理论写出求解岩土力学领域问题的系统著作, 同期, 开始有人用弹塑性理论研究围岩的稳定问题, 导出著名的 R. Fenner-J. Talobre 公式和 H. Kastner 公式。S. Serata 用流变模型进行了隧洞围岩的黏弹性分析。

但是上述连续介质理论的计算方法只适用于圆形巷道等简单情况, 而对普通的开挖空间却无能为力, 因为没有现成的弹性或弹塑性理论解析解可供应用。在 20 世纪 60 年代, 运用早期的有限差分 and 有限元等数值分析方法, 出现了考虑实际开挖空间和岩体节理、裂隙的围岩和支护共同作用的弹性或弹塑性计算解, 使运用围岩和支护共同作用原理进行实际岩石工程的计算分析和设计变得普遍起来。同时, 人们认识到, 运用共同作用理论解决实际问题, 必须以原岩应力作为前提条件进行理论分析, 才能把围岩和支护的共同变形与支护的作用力、支护设置时间、支护刚度等关系正确地联系起来; 否则, 使用假设的外荷载条件计算, 就失去它的真实性和实际应用价值。这一认识促进了早期的地应力测量工作的开展。

但是, 早期的连续介质理论忽视了对地应力作用的正确认识, 忽视了开挖的概念和施工因素的影响。地应力是一种内应力, 由于开挖形成的“释放荷载”才是引起围岩变形和破坏

的根本作用力,而传统连续介质理论采用固体力学或结构力学的外边界加载方式,往往得出远离开挖体部位的位移大,而开挖体内边缘位移小的计算结果,这显然与事实不符。多数的岩石工程不是一次开挖完成,而是多次开挖完成的。由于岩石材料的非线性,其受力后的应力状态具有加载途径性,因此前面的每次开挖都对后面的开挖产生影响。施工顺序不同、开挖步骤不同,都有各自不同的最终力学效应,即不同的岩石工程稳定性状态。因此,忽视施工过程的计算结果将很难用于指导工程实践。此外,传统连续介质理论过分注重对岩石“材料”的研究,追求准而又准的“本构关系”。但是,由于岩体组成和结构的复杂性和多变性,要想把岩体的材料性质和本构关系完全弄准确是不可能的。事实上,在岩石工程的计算中存在大量不确定性因素,如岩石的结构、性质、节理、裂隙分布、工程地质条件等均存在大量不确定性,所以传统连续介质理论作为一种确定性研究方法用于解决岩石工程问题,存在一定的缺陷。

地质力学理论注重研究地层结构和力学性质与岩石工程稳定性的关系,它是 20 世纪 20 年代由德国人 H. Cloos 创立起来的。该理论反对把岩体当做连续介质简单地利用固体力学的原理进行岩土力学特性的分析;强调要重视对岩体节理、裂隙的研究,重视岩体结构面对岩石工程稳定性的影响和控制作用。1951 年 6 月,在奥地利成立了以 J. Stini 和 L. Muller 为首的“地质力学研究组”。在萨尔茨堡举行了第一届地质力学讨论会,形成了“奥地利学派”。从此,该项理论迅速发展,并广泛应用于岩石工程,在全世界产生了广泛的影响。该理论对岩石工程的重要贡献是提出了“研究工程围岩的稳定性必须了解原岩应力和开挖后岩体的力学强度变化”以及“节理裂隙对岩石工程稳定性的影响”等观点,该理论同时重视岩石工程施工过程中应力、位移和稳定性状态的监测,这是现代信息岩土力学的雏形。该学派重视支护与围岩的共同作用,特别重视利用围岩自身的强度维持岩石工程的稳定性。在岩石工程施工方面,提出了著名的“新奥法”,该方法特别符合现代岩土力学理论,至今仍在国内外广泛应用。1962 年 10 月,在第十三届地质力学讨论会上成立了国际岩土力学学会,L. Muller 担任第一任主席,这是岩土力学发展史上的重要事件,值得一提的是,这一职位于 2011 年在北京举办的第十二届国际岩土力学学会由中国学者冯夏庭教授担任。

该理论的缺陷是过分强调节理、裂隙的作用,过分依赖经验,而忽视理论的指导作用。该理论完全反对把岩体作为连续介质看待,也是不正确的和有害的。因为这种认识阻碍现代数学力学理论在岩石工程中的应用,如早期的有限元应用就受到这种理论的干扰。因为,虽然岩体中存在这样那样的节理、裂隙,但从大范围、大尺度看仍可将其作为连续介质对待。对节理、裂隙的作用,对连续性和不连续性的划分,均需由具体研究的工程处理问题的方法而确定,没有绝对的统一的模式和标准。

(4) 现代发展阶段(20 世纪 60 年代至今)。此阶段是岩土力学理论和实践的新进展阶段,其主要特点是,用更为复杂的多种多样的力学模型来分析岩土力学问题,把力学、物理学、系统工程、现代数理科学、现代信息技术等领域的最新成果引入岩土力学,而电子计算机的广泛应用,为流变学、断裂力学、非连续介质力学、数值方法、灰色理论、人工智能、非线性理论等在岩土力学与工程中的应用提供了可能。

从总体来讲,现代岩土力学理论认为:由于岩石和岩体结构及其赋存状态、赋存条件的复杂性和多变性,岩土力学既不能完全套用传统的连续介质理论,也不能完全依靠以节理、

裂隙和结构面分析为特征的传统地质力学理论,而必须把岩石工程看成是一个“人-地”系统,用系统论的方法进行岩土力学与工程的研究。用系统概念表征“岩体”,可使岩体的“复杂性”得到全面、科学的表述。从系统来讲,岩体的组成、结构、性能、赋存状态及边界条件构成其力学行为和工程功能的基础,岩土力学研究的目的是认识和控制岩石系统的力学行为和工程功能。

20世纪60年代和70年代,原位岩体与岩块的巨大工程差异被揭示出来,岩体的地质结构和赋存状况受到重视,“不连续性”成为岩土力学研究的重点。从“材料”概念到“不连续介质”概念,是岩土力学理论上的飞跃。

随着计算机科学的进步,20世纪60、70年代开始出现用于岩石工程稳定性计算的数值计算方法,主要是有限元法。20世纪80年代数值计算方法发展很快,有限元、边界元及其混合模型得到广泛的应用,成为岩土力学分析计算的主要手段。20世纪90年代,数值分析终于在岩土力学和工程学科中扎根。岩土力学专家和数学家合作创造出系列新的计算原理和方法,如损伤力学-离散元法的进步,有限差分法FLAC的复兴,DDA法和流形方法的发展,岩土力学专家建立起自己独到的分析原理和计算方法。

现代计算机科学技术的进步也带动了现代信息技术的发展。20世纪80、90年代,岩石工程三维信息系统、人工智能、神经网络、专家系统、工程决策支持系统等迅速发展起来,并得到普遍的重视和应用。

20世纪90年代,现代数理科学的渗透是非线性科学在岩土力学中的重要应用。本质上讲,非线性和线性是互为依存的。耗散结构论、协同论、分叉和混沌理论正在被试图用于认识和解释岩体力学的各种复杂过程。岩土力学和相邻的工程地质学都因受到研究对象的“复杂性”挑战,而对非线性理论倍加青睐。

由于岩体结构及其赋存状态、赋存条件的复杂性和多变性,致使岩土力学和工程所研究的目标和对象存在着大量不确定性,因而有人在20世纪80年代末提出不确定性研究理论,目前已被越来越多的人所认识和接受。现代科学技术手段,如模糊数学、人工智能、灰色理论和非线性理论等,为不确定性分析研究方法和理论体系的建立提供了必要的技术支持。

系统科学虽然早已受到岩土力学界的注意,但直到20世纪80、90年代才成为共识,并进入岩土力学理论和工程应用。时至今日,岩石工程力学问题已被当做一种系统工程来解决。系统论强调复杂事物的层次性、多因素性及相互关联和相互作用特征,并认为人类认识是多源的,是多源知识的综合集成,这些为岩土力学理论和岩石工程实践的结合提供了依据。可以说,从“材料”概念到“不连续介质”概念是现代岩土力学的第一步突破;进入计算力学阶段是第二步突破;而非线性理论、不确定性理论和系统科学理论进入实用阶段,则是岩土力学理论研究及工程应用的第三步意义更为重大的突破。

由于矿产资源勘探开发、能源开发、交通运输工程、城市建设和人类向地下空间发展的需要,工程的规模越来越大,所涉及的岩土力学问题也越来越复杂。例如,在水电建设中,岩石大坝高度可达300m以上,如我国三峡工程大坝高度达到180m,装机容量达 $1768 \times 10^4 \text{ kW}$,为当前世界上最大的岩石建设工程;水电站和其他军事或民用工程地下厂房、库房、储油库、储气库的高度和跨度均可达50~100m;露天矿垂直边坡高度可达600~700m;南非地下黄金矿山的开采深度已超过4000m;已建成的英吉利海峡隧道长达53.85km;欧非大陆

海底隧道穿越直布罗陀海峡,全长 60km,这些都对岩土力学提出了更高的要求,使岩土力学面临许多前所未有的问题和挑战,急需发展和提高岩土力学理论和方法的研究水平,以适应工程实践的需要。

传统的岩土力学分析方法,不论是理论分析还是数值方法,都是一种正向思维或确定性思维,这是牛顿时代的思维模式,即从事物的必然性出发,根据试验建立模型,处理本构关系,在特定的有限的条件下求解,这反映在参数的研究上就是取样、设计试验、测定、结果分析;反映在模型的研究上就是根据已有的公理、定理或理论,再加上特定条件下的假定,通过推演得到结果。已经可以预见,这种传统的方法不可能将错综复杂的岩土力学与工程的研究提到一个全新的高度。如同自然界的一切不确定系统一样,只有将岩体也视为一个不确定系统,用系统思维、反馈思维、全方位思维(包括逆向思维、非逻辑思维、发散思维甚至直觉思维)对工程岩体的行为进行研究,才能在复杂的岩土力学问题的解决、提高理论和数值分析结果的可靠性和实用性方面取得新的突破。思维方法的变革是岩土力学与工程研究取得突破的关键。

20 世纪 70 年代中后期发展起来的基于实测位移反演岩体力学参数和初始地应力的位移反分析法是逆向思维在岩土力学研究中的一次成功应用。由于反分析得到的参数作为在同一模型下正分析的输入参数而大大提高了分析结果的可靠性,但是参数反演并没有解决如何辨识与确定合理模型的问题。应该说,到目前为止,对线性问题的反分析是成功的,而对于非线性岩体,由于其具有加载途径性,反分析的解往往不具有唯一性,这是今后反分析需要解决的关键问题。只有给定的模型能够更好地反映岩体的真实力学行为,无论对参数反演的结果还是在参数反演的基础上作正演才会具有更好的效果。

从唯象的观点来看,岩体应归属各向异性流变介质。许多大的岩石工程项目,其服务年限为几十年甚至上百年,因此,现代岩石工程不仅要考虑施工期间的安全,而且要确认在日后运营长时间内的安全,即在工程投入运营以后,是否会随着时间的增长而产生破裂与失稳,这便是岩石流变和黏性时效研究的任务。但如同岩土力学分支一样,为提高时效分析的可靠性,同样存在着选择合适的流变模型和正确的输入黏性参数的问题。

20 世纪 80 年代末,伴随思维方法的变革而提出的不确定性系统分析方法,为大型岩石工程分析和设计提供了正确的方法。这种方法也可以称为综合智能分析方法,它是在系统科学、计算机科学、非线性理论、人工智能技术、信息技术等得到快速发展的基础上建立起来的。

不确定性系统分析方法首先将工程岩体看成“人地系统”,用“系统”概念来表征岩体,可使岩体的复杂性得到全面科学的表达。岩石或岩石工程系统不仅是因为多因子、多层次组合而有复杂性,而且还在于它们大多具有很强的不确定性,即模糊性和随机性。岩石或岩石工程系统的复杂性还源于它的非线性特性,因子之间、层次之间通过相互作用实现动态耦合,这些相互作用往往是非线性的,经过相互影响和反馈,形成系统的强非线性特性。将整个系统的非线性过程掌握住,才能做出正确的理解和描述。这样一个自然或人为非线性系统不是固定不变的,而是不断发展变化的,随着时间的推移,各种因素在变化,系统进行“自组织”,对各种扰动有所反应,其工程功能将发生变化,因此,它是动态的系统。只有在动力学水平上研究它的动态规律,才能谈得上对它的过程做出可靠的预测和有效的控制。

岩石工程分析和设计的重点是对岩石工程条件的评价,对岩石工程变形、破坏的预测以及相应工程措施的决策。岩石工程和其他土木结构工程相比,其重要的差别在于岩体是天然的地质体,而非人工设计加工的,首先要认识它,然后才能利用它。由于岩体结构及其赋存条件和赋存环境的复杂性、多变性,并且受到工程施工的影响等,因此不可能在事先把它们搞得非常清楚,其中必然存在大量认识不清、认识不准的不确定性因素。这种内部结构或初始状态不清楚或不完全清楚的系统,就是所谓的“黑箱”或“灰箱”问题。必须采用“黑箱-灰箱-白箱”的研究方法,通过外部观测、试验,根据得到的信息来研究系统的功能和特性,探索其结构和行为,使一开始不清楚或不完全清楚的系统或事物逐渐变得清楚,即从“黑箱”逐步变成“灰箱”,再逐步变成“白箱”,这样才能使最终的分析结果符合实际。对于岩石工程系统来说,经过工程前期的勘测、试验,可以获得岩体结构、物理力学性质、工程地质、水文地质条件和地应力等部分资料,因而把该类系统处理成“灰箱”,即“部分已知,部分未知”的系统比较合适。采用“黑箱-灰箱-白箱”的方法,就可以在整个岩石工程设计、施工过程中不断减小黑度,增加白度,达到工程设计和施工的逐步优化,人工智能、神经网络和灰色理论等是“黑箱-灰箱-白箱”研究方法的理论基础。

为促进不确定性系统分析方法的进一步发展,使之更完善、更实用,在岩石工程系统的研究中,必须强调以下两方面的工作:

(1)系统扎实的岩土力学基础资料的采集、调查、试验和研究工作。虽然岩石工程系统中存在大量不确定性因素,人们不可能把岩石工程系统的初始条件搞得完全清楚,但这并不是说可以减少或放松工程前期岩土力学基础资料的调查和试验工作。这些基础资料包括:工程区域地应力状态、工程地质、水文地质条件、断层、节理、裂隙分布及状况,岩体结构和岩性分布状况,岩石和岩体的物理力学性质等。为使基础资料的采集更全面和深入,还必须采用高新技术手段,发展和采用新的探测和实验技术,如遥感技术、切层扫描技术、三维地震CT成像技术、高精度地应力测量技术、高温高压刚性伺服岩石试验系统和多功能高效率原位岩体测试系统等。只有把基础资料的采集工作做扎实,才能减少岩石工程“灰箱”系统的黑度或灰度,缩短“黑箱-灰箱-白箱”的分析、研究过程,提高工程规划、决策的准确性,加快工程设计和施工的进度。

(2)岩石工程施工和运行过程中的全方位多手段的现场监测工作。除了采用多点位移计、倾斜仪、断面收敛计、水准测量、经纬测量等常规的应力、位移监测手段外,还要大力发展、尽快完善GPS、GIS监测技术,声发射和微震监测技术,岩体能量聚集和破裂损伤探测技术等。丰富的监测资料将为“黑箱-灰箱-白箱”系统分析和研究系统的功能与特性提供必要的信息资料。随着信息技术的发展和应用,工程师们完全可以对工程过程监测的信息进行高效的理论分析和经验判断,将多源知识综合集成,并及时向工程执行系统反馈,进行工程决策,逐步优化设计和施工工艺,这样做,就将使工程实践和岩土力学理论分析达到高度融合,形成岩石工程普遍适用的现代岩石工程原理和方法。

第2章 岩土的基本力学特性

作用于岩土体上的外部荷载将引起岩土中应力状态的改变,从而使岩土发生变形(Deformation),甚至破坏(Failure)而失去稳定。众所周知,变形和破坏是最基本的工程力学现象,所以岩土的主要力学性质是变形特性和与破坏相关的强度特性。弄清这些性质既是力学分析和稳定性评价的前提条件,又是分析结果可靠与否的关键因素,因而备受学者和工程师们的关注。

所谓岩土の力学特性,是指岩土在其力学行为中表现出来的性质,通常需要经试验确定。岩土受力后的变形与破坏现象十分复杂,这不仅仅是因为岩土的种类繁多、行为表现各异,还因为它与饱和状况、加荷方式、排水条件、约束情况、温度等诸多因素有关。如果再考虑到天然岩土固有的空间变异性、因环境条件变化而导致的时间变异性,那么要正确把握岩土の力学性质将是一件非常困难的事情。事实上,合理确定岩土の力学性质指标,一直是研究者和工程师们面临的一项严峻挑战。

简单应力状态下岩土の变形和强度特性可以由试验确定,而复杂应力状态下的性质则通常只能通过理论模型进行研究。本章根据典型的试验资料介绍岩土的基本力学特性,并就其机理做出尽可能详细的说明。至于复杂应力状态下岩土の强度理论和本构理论,则将在接下来的章节中分别加以阐述。

2.1 基本试验资料

材料特性是针对具有代表性的材料单元建立起来的,研究它们需要对材料单元进行试验。何谓材料单元?连续介质假设是大多数近代工程力学以及物理学大部的基础,能与实际相符。这主要是由于在实际分析中所采用的材料特性代表了介质单元的某种平均特性,而不是点的特性。实际上,相当于对介质进行了等效连续处理。可以将在物理力学性质方面能代表介质特征的最小单元称为“基本单元”,这样的岩土单元包括足够数量的颗粒和孔隙,其尺寸需通过试验确定。如果要研究岩土の力学反应,用于力学特性研究的试样即材料单元必须大于或等于基本单元,从而试验结果可以代表岩土的性质。将这样的性质用于岩土体力学分析,所得结果也是单元体的平均反应,而不是结构中某一点の反应。

在土工试验中,涉及试样的固结状态概念,它取决于试样历史上所受的最大有效应力与试验中所施加的有效应力之比。当前者大于后者时,试样处于超固结状态,此时的土称为超固结土;当两者相等时,试样处于正常固结状态,此时的土称为正常固结土。

在土の变形和强度特性研究中,常用的室内试验有直剪试验、固结试验、常规三轴试验。

此外,还有一些特种试验,如真三轴试验、平面应变试验和扭剪试验等。本节简要介绍各种典型的试验曲线,它们是确定力学性质参数、建构模型的基础。

2.1.1 直剪试验

在直剪试验(Direct Shear Test)中,试样在一定法向应力 σ 作用下沿固定的剪切面被剪切至破坏。这种试验主要用于确定土的抗剪强度,也可用来研究土与其他材料接触面的应力应变关系。直剪试样的固结状态由其历史上所受最大有效法向应力与试验中施加的有效法向应力之间的关系确定。试验表明,松砂或正常固结黏土的剪应力随剪应变而增大,这种现象称为硬化(Hardening),如图2-1所示,而密砂或超固结黏土的剪应力与剪应变曲线则出现峰值而后下降,这种现象称为软化(Softening),如图2-2所示。在一定法向应力下,硬化曲线可用双曲线模拟:

$$\tau = \frac{\gamma}{a + b\gamma} \quad (2-1)$$

式中, a, b 为试验常数。软化曲线可表示为

$$\tau = \frac{\gamma(a + c\gamma)}{(a + b\gamma)^2} \quad (2-2)$$

式中, a, b, c 为试验常数,且与峰值剪应变 γ_p ,峰值剪应力 τ_p 和残余剪应力 τ_r ,具有如下关系:

$$\tau_r = \frac{c}{b^2}, \tau_p = \frac{1}{4(b-c)}, \gamma_p = \frac{a}{b-2c} \quad (2-3)$$

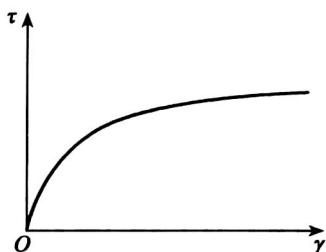


图 2-1 松砂或正常固结黏土

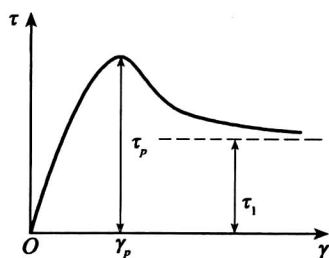


图 2-2 密砂或超固结黏土

2.1.2 固结试验

土的固结试验(Consolidation Test)有两种(图2-3),即各向等压固结试验和单向固结试验。前者是 $p = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 的排水压缩试验,通过这种试验可得到体积应变 ε_v ,或孔隙比 e 与静水压力 p 之间的关系;后者是土样在完全侧限条件下的单向压缩试验,试验求得的应力应变曲线为孔隙比 e 与竖向压力 p 之间的关系(图2-3(a))。如果将试验数据整理成 $e - \ln p$ 曲线(图2-3(b)),则在实用压力范围内呈直线,即压缩性指标不随压力而变。此时,两种试验结果均可表示为

$$e = e_a - \lambda (\ln p - \ln p_a) \quad (2-4)$$

式中, λ 为压缩指数; e_a 为与 p_a 对应的孔隙比,而 p_a 为试样的初始应力或先期固结压力。有

时 p_a 取为大气压, 此时 e_a 并非原状试样的初始孔隙比, 应根据试验曲线外推得出。此外, 卸载再加载曲线为

$$e = e_k - \kappa (\ln p - \ln p_a) \quad (2-5)$$

式中, κ 为膨胀指数; e_k 为卸荷至 p_a 时的孔隙比。

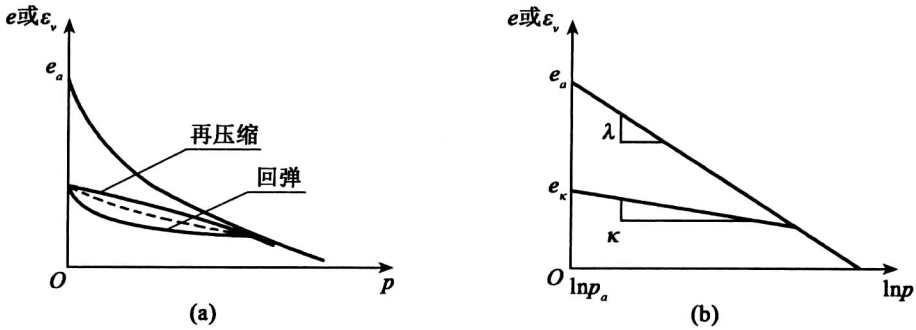


图 2-3 固结试验曲线

在单向固结试验中, 侧向应变 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, 而体积应变等于轴向应变, 即

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1$$

2.1.3 常规三轴试验

在常规三轴试验中, 分别施加周围压力 (Confining Pressure) 和轴向压力 (Axial Pressure), 简称围压和轴压。这种试验主要用于确定土的抗剪强度参数和应力应变关系, 包括三轴压缩试验 (Triaxial Compression Test) 和三轴伸长试验 (Triaxial Extension Test), 它们各自又有几种方法。例如, 在三轴压缩试验中 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$), 保持围压 σ_3 不变, 增加轴压直至破坏; 或保持轴压不变, 减小围压直至破坏。在三轴伸长试验中 ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$), 保持围压不变, 减小轴压直至破坏; 或保持轴压不变, 增加围压直至破坏。

常规三轴试样的固结状态是从围压的角度考虑的, 例如, 当试验中施加的固结围压大于试样的先期固结压力时, 试样便处于正常固结状态。试验表明, 对于正常固结黏土、松砂及中密砂, 不排水剪切试验中产生正的孔隙水压力, 排水试验中体积发生收缩即剪缩。此外, 材料表现出应变硬化的特征, 偏应力与轴向应变之间的关系为双曲线 (图 2-4), 可表示为 (Kondner, 1963)

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (2-6)$$

式中, q 为偏差应力; ε_1 为轴向应变; a, b 为试验常数。

对于超固结黏土和密砂, 试验时应力差超过峰值强度后急剧下降, 直至一极限值, 即土的残余强度。在不排水剪试验中, 强超固结黏土或密砂产生负的孔隙水压力; 在排水剪试验中体积最初略收缩, 以后便大量膨胀, 即出现剪胀 (Dilatancy)。此外, 应力应变曲线为驼峰形, 即存在应变软化现象 (图 2-5), 可用下式表示:

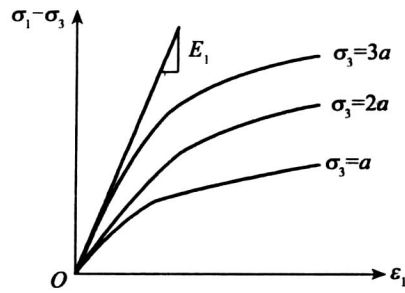


图 2-4 三轴试验曲线

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1 (a + c\varepsilon_1)}{(a + b\varepsilon_1)^2} \quad (2-7)$$

式中, a, b, c 为试验常数。

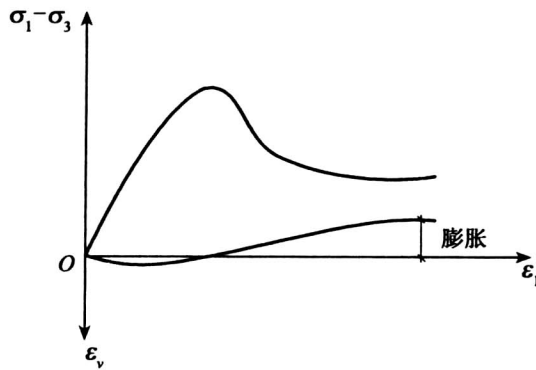


图 2-5 超固结黏土或密砂

试验表明(图 2-6), 土的应变可分为弹性应变(Elastic Strain)和塑性应变(Plastic Strain)两部分。此外, 密砂的剪胀和软化是低围压下的表现, 而在高围压下, 所有土都表现为剪缩, 且应力应变曲线是硬化型的, 这主要是由于高压下土粒破碎的缘故。

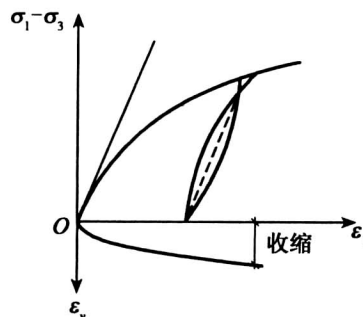


图 2-6 正常固结黏土或松砂

2.1.4 真三轴试验

常规三轴试验并不能充分反映土的应力变形特性,因为这种试验没有考虑中间主应力 σ_2 的影响。为此,人们发展出了真三轴试验,即三个方向上应力不等的三轴试验($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)。在真三轴试验研究中,可用下列参数表示 σ_2 的影响:

$$(1) \text{Lode 参数: } \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2-8)$$

(2) Bishop (1966) 采用 b 值来反映中间主应力的影响, b 的定义为

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2-9)$$

不难看出, μ_σ 与 b 具有如下关系:

$$\mu_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 = 2b - 1 \quad (2-10)$$

b 表示 σ_2 在 σ_1 和 σ_3 之间的位置。

真三轴试验表明(图 2-7),随着 b 的增大,应力应变曲线越来越陡, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 的峰值点提前,材料的破坏更接近于脆性破坏。此外,平面应变试验($\sigma_2 - \sigma_3$)也显示出 σ_2 的影响。在同一 σ_3 作用下进行常规三轴试验和平面应变试验,前者的应力应变曲线总是在后者的下方。

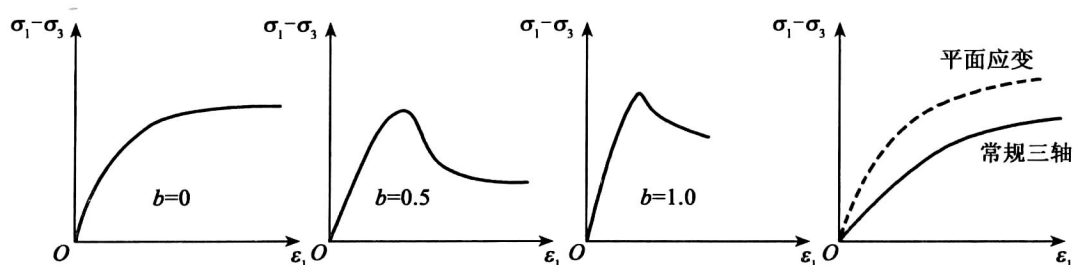


图 2-7 中间主应力 σ_2 的影响

2.2 土的变形特性

经典弹塑性力学基于两个基本试验,即金属材料的单向拉伸试验和静水压力试验。试验的基本结论归结为:变形可分为弹性阶段和塑性阶段,初始屈服极限比较明显;初始拉压屈服极限(强度)相等;进入塑性阶段后表现出应变硬化或理想塑性特征,属于稳定材料;体积变形基本上是弹性的;静水压力对屈服极限的影响可以忽略;剪切不引起体积变形;材料的弹性系数基本上与塑性变形无关,即弹塑性不耦合。

试验表明,相对于金属材料,土的变形具有一系列特殊性,如压硬性、剪胀性、等压屈服、非正交性、非关联性、路径相关性、硬化和软化等。根据沈珠江的观点,压硬性和剪胀性是土

的基本力学特性,即对所有土类和主要受力阶段都有重要影响的力学性质,换句话说,它们是土区别于其他工程材料的标志,因而土可定义为具有压硬性和剪胀性的材料。事实上,土的非线性、弹塑性和等压屈服也是比较独特的,故在基本特性中加以介绍。

2.2.1 基本变形特性

2.2.1.1 非线性和弹塑性

在常见的工程荷载范围内,土表现出比较明显的非线性(Non-Linear)和弹塑性(Elasto-Plasticity)。所受荷载较大时,金属材料的应力应变关系也呈非线性,但它具有明显的线性弹性阶段。而土的应力应变曲线的直线段很短,特别是对于松砂和正常固结黏土,变形几乎从开始就是非线性的,且包括塑性成分。此外,试验曲线图 2-3 和图 2-6 表明,卸荷再加荷会出现滞回环,它表明卸荷再加荷过程中能量消耗了,需要给予能量补充。

2.2.1.2 压硬性

金属材料是无摩擦材料,即内摩擦角为零;而土具有内摩擦角,其强度和刚度随压力的增大而增大,这种性质就是压硬性。例如,初始模量 E_i 和土的强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 随围压 σ_3 的增大而增大(图 2-4)就是压硬性的表现,土的抗剪强度公式 $\tau_f = c + \sigma \tan \varphi$ 对 σ 的考虑,是对压硬性的表达。人们较早认识到土的压硬性,而且自觉或不自觉地考虑了土的这一特性。软土地基的排水固结处理、软土地基上填土慢速施工的要求是实践中应用压硬性的明显事例。

2.2.1.3 剪胀性

对于金属材料,剪应力与体积应变无关;而土在剪切时则产生体积膨胀或收缩,即所谓剪胀。粗略地说,超固结黏土和密砂发生剪胀,而正常固结土和松砂则发生剪缩。确切地说,密实无黏性土在低围压下剪切时,剪胀变形出现很早,甚至从一开始就出现;而疏松的无黏性土在较高围压下剪切时,剪切后期才出现剪胀,甚至不出现。

为什么会出现剪胀或剪缩?对于松砂,受剪后某些颗粒被挤入孔隙中,体积减小;密砂的原始孔隙体积较小,受剪切时,某些颗粒必须上抬才能绕过前面的颗粒而产生错动,于是体积膨胀。

2.2.1.4 等压屈服

在各向等压或静水压力作用下,金属材料的体积变形是弹性的;而土不仅产生弹性的体积变形,还将产生塑性体积变形(图 2-3),这就是等压屈服现象,在 1957 年由 Drucker 等人首先指出的。要想恰当地估算土的塑性变形,必须考虑体积屈服。

2.2.2 一般变形特性

2.2.2.1 硬化和软化

金属材料是应变硬化材料,而土的变形不仅可以表现出硬化特征(对于松砂和正常固结黏土,图 2-6),也可以表现出软化特征(对于密砂和超固结黏土,图 2-5)。硬化与剪缩有关,软化与剪胀有关。密砂颗粒排列紧密,受剪时,一部分颗粒要滚过另一部分颗粒,必须克服较大的咬合作用力,故表现出较高的抗剪强度。而一旦某些颗粒绕过另一些颗粒,结构将变松,抗剪能力减小,从而表现为软化。超固结黏土剪切破坏后,结构黏结力丧失,强度也会降低,表现为软化。对于松砂和正常固结黏土,剪切过程中变得紧密,一般表现为剪缩,因而

呈硬化特征。

2.2.2.2 各向异性

各向异性是指材料性质随方向而异,包括初始各向异性和诱导各向异性。前者是土在沉积及后期地质作用过程中形成的,后者则是在外荷作用下由应力和变形导致的。检验各向异性影响的一种简单方法是进行三轴等压固结试验,将轴向应变 ε_1 和体积应变 ε_v 作比较,若 $\varepsilon_v = 3\varepsilon_1$,则表示该土为各向同性的;否则就是各向异性的。

沿不同方向切取试样进行试验,容易发现变形模量的各向异性。试验表明,粗粒土的各向异性对变形模量有显著影响,而且对模量的影响比对强度的影响更大,不同方向模量的差异可达 2~3 倍。结构各向异性对力学性质的影响主要是通过变形时对体积变化趋势的影响而体现出来的 (Mitchell, 1976)。

2.2.2.3 路径相关

在施加荷载的过程中,一点的应力状态不断变化,这一变化过程称为该点的应力路径 (Stress Paths)。在常规三轴试验中,试样的应力状态常通过最大剪应力面上的应力路径反映,即用 Mohr 应力圆顶点的轨迹表示应力路径。例如,在三轴压缩试验中,试样是在围压 σ_3 保持不变的条件下逐渐增加 σ_1 而被剪破的,故总应力路径 (TSP) 是一条从 A ($\sigma = \sigma_3, \tau = 0$) 点出发、与 τ 轴逆时针成 45° 角的直线 (图 2-8)。

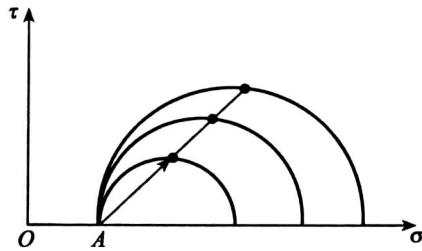


图 2-8 应力路径

对于弹性材料,应变大小仅取决于应力的最后状态,与达到该状态的应力路径无关;而土的应力应变曲线则与应力路径相关联 (图 2-9)。变形并不仅仅取决于当前的应力状态,而是与达到该应力状态之前的应力历史 (Stress History) 和路径有关。换句话说,即便初始和最终的应力状态相同,应力路径不同,变形也将不同。

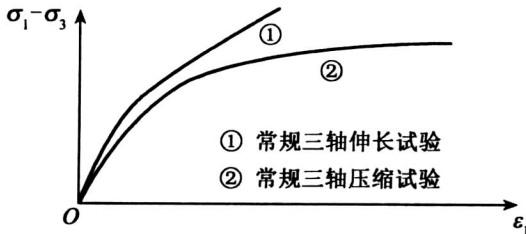


图 2-9 路径相关

2.2.2.4 弹塑性耦合

土具有弹塑性耦合特性(Couple Elasto-Plasticity),即如果对土进行卸载再加载试验,可发现当应力进入塑性阶段后,塑性变形的增加引起弹性性质的变化(即弹性模量下降),这种变化在变形的非稳定阶段更为明显(图2-10)。

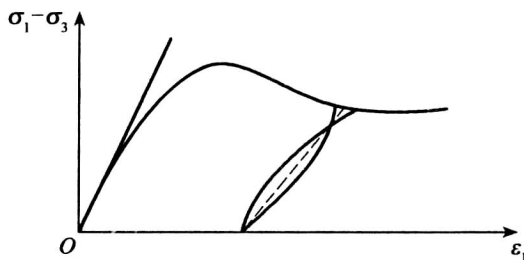


图 2-10 弹塑性耦合

有些学者对弹塑性耦合的提法有不同意见,他们认为并不存在耦合问题。但从机理上讲,产生塑性变形后,土的结构发生了变化,而与这种结构相对应的初始弹性自然有所改变,因此耦合是存在的。不过,在本构理论研究中通常不考虑弹塑性耦合。

2.2.2.5 非关联性

金属材料的塑性应变增量方向总是垂直屈服面,因而可以采用相关联流动法则(Associated Flow Rule),即塑性势函数等于屈服函数。而试验表明,土的塑性应变增量方向与屈服面通常并不正交,此时应采用非关联流动法则(Non-Associated Flow Rule),选用与屈服函数不同的塑性势函数。

2.2.2.6 主轴旋转

适用于金属材料的传统塑性位势理论表明,塑性应变增量方向唯一地取决于应力状态,而与应力增量无关,而土的塑性应变增量方向与应力增量方向有关。

基于金属材料发展起来的传统塑性理论没有考虑应力主轴旋转的影响,而主轴旋转可引起新的塑性变形。

2.2.3 土的变形机制

2.2.3.1 弹性和塑性

任何固体材料的变形都具有弹性、塑性和黏性成分,而且这几种力学性质之间只存在模糊界限。弹性是指物体在外力作用下产生变形,而撤去外力后立即恢复到它原有的形状和尺寸的性质,弹性变形是卸荷后可恢复的变形。塑性是指应力超过屈服极限时仍能继续变形而不断裂,撤去外力后变形又不能恢复的性质,塑性变形就是卸荷后残留下来的变形。瞬时变形是在加荷的瞬间完成的变形,包括弹性变形和塑性变形。一般地说,瞬时变形随着应力水平提高而增大。流动变形是随时间而发展的变形,这种性质就是黏性或黏滞性(Viscosity)。此外,塑性流动概念出现在塑性理论中,它表示荷载达到某个极限时(流动极限)塑性变形无限制发展。

对于具有晶体结构的金属材料,其弹性性质常用物质质点间的相互作用力说明。根据固体物理学,材料之所以能平衡,是因为原子之间存在相互平衡的力(吸引力和排斥力)。荷载作用改变了质点间距,相应产生了变形,同时也建立了新的平衡。一旦荷载消失,质点随即产生位移,返回到原来的平衡位置。晶体材料的塑性变形与晶体内部原子层间发生相对滑动密切相关。试验表明,塑性变形的基本机理是滑移,即当滑移平面上沿着滑移方向的剪应力达到某临界值时便发生错动。

土的变形通常也包含弹性、塑性和黏性这三种成分,但由于它是多相摩擦型材料,所以其变形机制要比金属材料复杂得多。例如,骨架整体压缩或歪斜,而颗粒之间不发生滑移;小颗粒被挤入孔隙中;颗粒之间的相对滑移;颗粒旋转和重新排列;颗粒弯曲或被压碎;在排水条件下,孔隙水和气体被挤出。其中,由土颗粒构成的土骨架整体变形表现为弹性变形,而其他成分则均导致塑性变形。理论分析表明,在极小的剪切作用下,土颗粒接触处便可发生滑动。

2.2.3.2 压缩性构成

所谓压缩性(Compressibility),就是物体在压力作用下体积减小的性质。在各向等压条件下,从宏观上说,试样并不受剪切作用;但在微观上看,局部剪切作用不可避免,所以颗粒间有相互错动。各种因素对土体压缩变形的相对影响不同,Scott(1963)就此进行过定量研究,结果表明:土颗粒的压缩性远比水的为小,完全可以忽略不计;在饱和土中,孔隙水的压缩量与土骨架的压缩量相比很小。此外,与黏土骨架的压缩量比较,砂土及一定程度上粉土的骨架压缩量要小得多。因此,对于黏土与砂土相间的地基,黏土层的变形是沉降的主要来源。

2.3 土的强度特性

土的强度是土的重要力学性质之一,是确定挡土墙土压力、地基承载力以及土坡稳定安全系数所必需的参数。因此人们对其进行了大量的试验研究。但由于成因、组成、结构千差万别,再加上外部条件的影响,要合理地确定土的强度也并不容易。

2.3.1 土的破坏与强度

强度(Strength)是指物体抵抗破坏的最大抗力。就材料而言,强度就是材料破坏时的应力状态。一般地说,如果在特定的条件下施加某一应力分量直至破坏发生,那么破坏时的应力值就叫做该条件下的材料强度。所施加外力的性质不同,其强度也不相同。按照外力作用方式,材料强度分为抗压强度、抗拉强度和抗剪强度等。

在连续介质力学中,对材料破坏并没有严格的定义。曾经有人提出,材料破坏就是“变形不连续”。这样的观点似乎容易理解,但很多情况不能用此定义加以说明,例如,塑性较大的材料可能产生很大的变形而不显现出破裂的痕迹,这种情况下的变形是连续的,但从工程实际角度讲,材料已经是破坏了。塔罗勃(1957)指出,任何不允许的变形都会造成广义上的破坏。有时很难确定产生什么样的变形将成为不允许的变形,因此破坏的定义远不是严格的,强度的定义同样是有条件的,每种情况下都需要更合理地规定。可见,破坏应理解

成为一个功能性概念。也就是说,破坏是变形过程的一个特殊阶段,具体在哪一点上算破坏,需要根据允许的限度人为地加以限定。

众所周知,材料特性必须采用试验方法进行研究。通常是在实验室或现场通过各种试验方法测定应力与应变或位移曲线来确定强度。强度只涉及最终的破坏状态,受力变形过程则由本构模型描述。土的破坏通常是剪切破坏 (Shear Failure), 因此抗剪强度 (Shear Strength) 特别重要。常采用的试验有直接剪切试验和常规三轴试验。此外,平面应变试验和真三轴试验也可用来研究强度。图 2-11 所示为常规三轴试验或直剪试验的两种典型结果。

土的剪切破坏主要有两种方式,即脆性破坏和塑性破坏(图 2-11),前者应力应变曲线有峰值,而后者则没有。当材料脆性破坏时,一般将最大应力值即峰值强度 (Peak Strength) 定为破坏强度,将最后稳定值定为残余强度 (Residual Strength)。有些土的变形性质不同于上述曲线,例如,软黏土的应力-应变曲线在较大的应变下仍未达到极限值,此时必须结合工程对象的允许变形来决定强度。

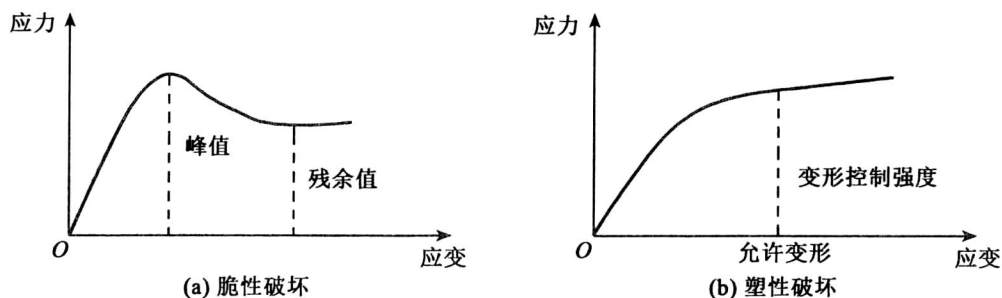


图 2-11 土的破坏与强度

2.3.2 抗剪强度公式

就土体中的一点或土体单元而言,发生剪切破坏一定是由于通过该点某个面上的剪应力达到了抗剪强度。土的抗剪强度 τ_f 就是土抵抗剪切作用所能承受的极限剪应力。Coulomb (1773) 基于砂土剪切试验,提出了土的抗剪强度定律,通常表示为(图 2-12)

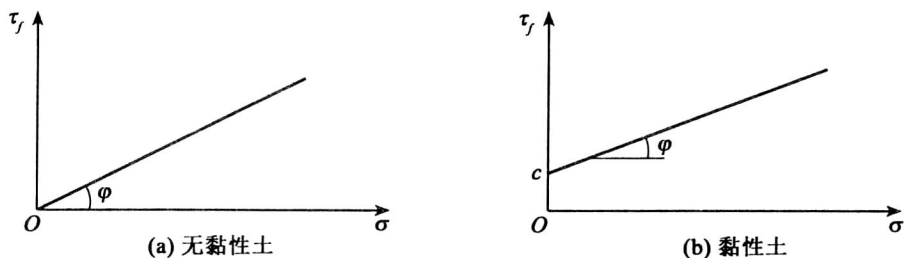


图 2-12 Coulomb 强度曲线

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi \quad (2-11)$$

推广到黏性土,有

$$\tau_f = c + \sigma \tan \varphi \quad (2-12)$$

式中, c 和 φ 分别称为凝聚力 (Cohesion) 和内摩擦角 (Angle of Internal Friction), 也称为强度指标或强度参数。

更一般地, O. Mohr (1900) 认为材料的抗剪强度是剪切面上正应力的函数, 即

$$\tau_f = f(\sigma) \quad (2-13)$$

这就是 Mohr 强度包络线, 通常是一条曲线, 可采用常规三轴试验的方法求得。如果 Mohr 包络线是直线, 则 Mohr 公式便与 Coulomb 公式等价, 尽管它们的物理背景不同。

式(2-11)和式(2-12)中的 σ 为总应力, 故 c, φ 称为土的总应力强度指标。由于水不能承受剪应力, 故作用于剪切面上的水压力不提供土的强度。换句话说, 抗剪强度的摩擦分量只能由作用于土骨架上的应力提供。根据有效应力原理, Terzaghi 将饱和土的 Coulomb 强度公式写成

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \varphi' \quad (2-14)$$

式中, σ' 为作用于剪切面上的法向有效应力; c', φ' 为有效应力强度指标。

2.3.3 黏性土的强度

采用常规三轴试验确定黏性土的强度, 通常在三种排水剪切条件下进行, 即不固结不排水、固结不排水和固结排水。我们知道, 土体中的应力包括自重应力 σ_{1c}, σ_{3c} 和附加应力 $(\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_3)$, 而且土层在自重作用下通常已经固结稳定。因此, 对于原状试样, 首先是施加其自重应力 (通常用围压 σ_{3c} 模拟) 并使其固结稳定, 然后施加围压 $\Delta\sigma_3$ 并保持不变, 最后施加轴向偏压 $\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$, 直至试样被剪破 (图 2-13)。确定强度参数的依据是极限应力圆与抗剪强度包络线相切。

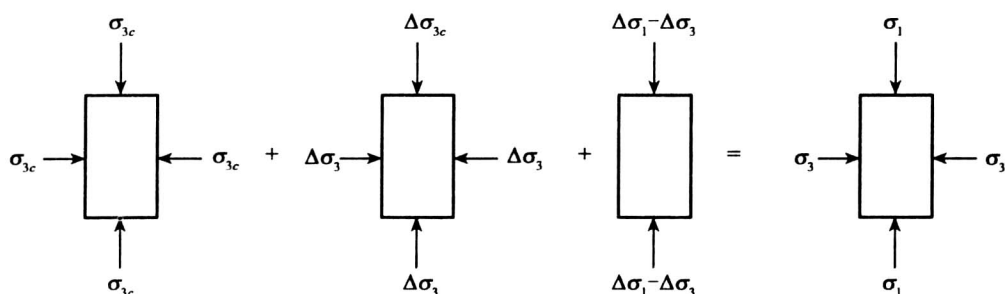


图 2-13 常规三轴试验加荷

2.3.3.1 不固结不排水强度 (UU)

在不固结不排水剪试验 (Unconsolidated and Undrained Shear, 简称 UU 试验) 中, 施加围压 $\Delta\sigma_3$ 不允许固结, 然后在不排水条件下施加轴向偏应力 $q = \sigma_1 - \sigma_3 = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$ 剪切至破坏。绘制应力路径时, 通常将总应力轴和有效应力轴放在一起。在这种图上不仅能表示有效应力路径 (Effective Stress Path, ESP) 和总应力路径 (Total Stress Path, TSP), 而且还能表

示孔隙水压力的大小。

在不同的 σ_3 下,将得到不同的偏应力破坏值 $q_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 和破坏时的孔隙水压力 u_f 。但由于试样剪切之前不固结、剪切过程中不排水,所以其有效应力基本保持不变,从而抗剪强度不随 σ_3 而改变,强度包络线为一水平线(图 2-14),即

$$\tau_f = c_u = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_f \quad (2-15)$$

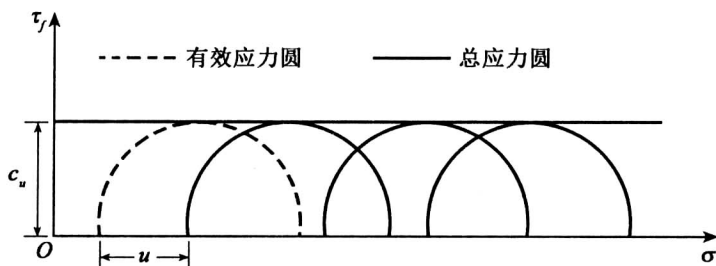


图 2-14 饱和土不固结不排水试验

式中, c_u 称为不排水强度。

天然土层中,有效固结压力 p_e 是随深度而增大的,故不排水强度也随深度而增大。试验表明,正常固结黏土的不排水强度随深度而线性增大。此外, c_u/p_e 还与土的塑性指数 (Plasticity Index) I_p 有关, Skempton (1957) 给出经验公式

$$\frac{c_u}{p_e} = 0.11 + 0.037 I_p \quad (2-16)$$

2.3.3.2 固结不排水强度 (CU)

固结不排水剪试验 (Consolidated and Undrained Shear), 简称 CU 试验, 是指试样在允许排水的条件下施加围压 σ_3 固结, 固结完成后在不排水条件下施加轴向偏应力剪切至破坏。试验中测定孔隙水压力, 试样的总应力路径和有效应力路径如图 2-15 所示, 强度包络线如图 2-16 所示。由于不同试样在偏压剪切时的初始有效应力不同, 有效应力圆的半径将随 σ_3 而增大。黏性土 CU 试验所得强度包络线是微弯的曲线, 通常可简化为直线。强度可以用总应力表示, 也可以用有效应力表示, 相应的公式分别为

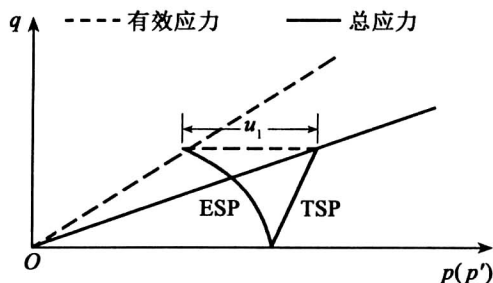


图 2-15 CU 试验应力路径

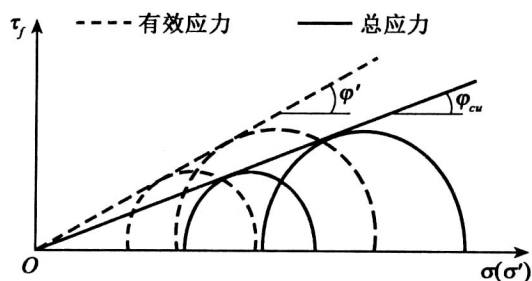


图 2-16 CU 试验强度包络线

$$\tau_f = c_{cu} + \sigma \tan \varphi_{cu} \quad (2-17)$$

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \varphi' \quad (2-18)$$

试验表明,正常固结黏土的总应力强度包络线和有效应力强度包络线都是通过原点的直线,而且有效应力圆位于总应力圆的左边,从而 $\varphi' > \varphi_{cu}$ (图 2-16)。此外,从天然土层取出的试样或人工制备的试样已在某压力下发生过固结,因此在零围压下总是有一定的强度。超固结黏土的固结不排水强度包络线如图 2-17 所示。当围压 σ_3 小于先期固结压力 p_c 时,试样处于超固结状态;而当 $\sigma_3 > p_c$ 时,试样转为正常固结状态。超固结段强度包络线的截距为 c_{cu} ,而且 p_c 越大, c_{cu} 也越大。试样转入正常固结状态以后,强度包络线为通过原点的直线,其摩擦角 φ_{cu} 大于超固结段的 φ_{cu} 。

2.3.3.3 固结排水强度(CD)

固结排水剪试验(Consolidated and Drained Shear),简称 CD 试验,是指试样在允许排水的条件下施加围压 σ_3 固结,固结完成后,在排水条件下施加轴向偏应力剪切至破坏。在整个试验过程中,孔隙水压力均为零,故有效应力路径与总应力路径相同。为了实现 CD 试验条件,砂土可按正常速度剪切,而黏性土则需以非常缓慢的速率剪切。CD 试验的强度公式为(图 2-18)。

$$\tau_f = c_d + \sigma \tan \varphi_d \quad (2-19)$$

试验表明,CD 试验指标 c_d 、 φ_d 与 CU 试验得到的有效应力强度指标 c' 、 φ' 相差不大,这样就可以用比较省时的 CU 试验代替 CD 试验。

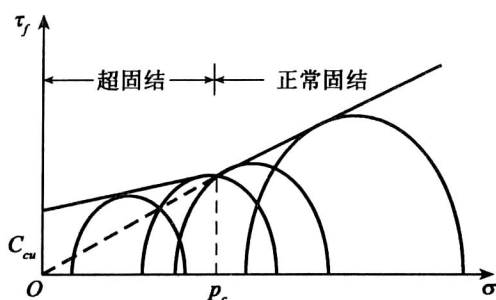


图 2-17 饱和土固结不排水试验

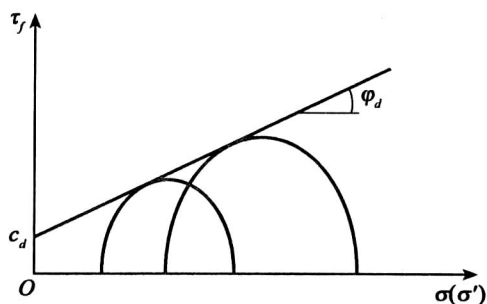


图 2-18 固结排水试验强度包络线

2.3.3.4 抗拉和残余强度

金属材料的抗拉压强度相等,而土的抗压强度则显著大于拉伸条件下的相应值,这一事实被称为 SD 效应(Strength Difference Effect)。土体破坏多为剪切破坏,所以人们特别重视土的抗剪强度,而很少关注其他破坏形式及强度。但土坡在破坏前,靠近地面往往产生张拉裂缝,这种裂缝对土坡失稳有很大影响。特别地,在高土石坝中常设置黏土心墙防渗体,心墙是否开裂是个关键问题。裂缝出现与否与受力状态及黏土的抗拉性能有关,因此,土的抗拉强度(Tensile Strength)也是非常重要的。黏性土抗拉强度的测定可以采用多种方法,如三轴拉伸、单轴拉伸、土梁弯曲、径向压裂、轴向压裂等。对上述各种方法的原理与典型结果,卞富宗(黄文熙,1983)做过系统分析与总结。研究表明,黏性土的抗拉强度 σ_t 随干密度 ρ_d 增加而增大,随含水量 w 增加而减小;极限拉应变随 ρ_d 增大稍有增加,随 w 增大而增大比

较明显。压实黏土的抗拉强度多为 $10 \sim 50 \text{ kPa}$ 。

黏性土抗剪强度试验表明,残余强度的黏聚力分量一般很小或接近于零,而且重塑样与原状样的残余强度相同。土的残余强度与原始结构无关。对于正常固结黏土,峰值强度稍大于残余强度,这是由于颗粒间胶结破坏造成的。此外,颗粒的定向排列也降低了颗粒摩擦角和咬合作用。残余强度的内摩擦角 φ_r 主要取决于土的矿物成分,其次也受有效法向应力的影响。一般情况下,石英、长石、方解石矿物的 φ_r 略大于 30° ,云母类矿物的 φ_r 为 $15^\circ \sim 26^\circ$,而蒙脱石矿物的 φ_r 则小于 10° 。

2.3.3.5 强度参数与机理

定性地讲,黏性土的抗剪强度由三部分组成,即黏聚分量、摩擦分量和剪胀分量。黏聚强度取决于颗粒之间的距离、相对位置以及联结性质。土受力后而变形,颗粒之间就产生相对位移,这时,黏聚强度的一部分受到破坏,但又形成新的黏结强度。通常脆性胶结的破坏是不可逆的,而凝胶体联结和水胶联结则是可恢复的。剪胀意味着表面能的增加,即产生新的表面需要能量,因而强度随之增大。摩擦是指矿物颗粒之间的摩擦,主要取决于矿物类型。目前还不能通过强度试验直接测定上述分量,或对它们加以分离。强度的三种分量并非在峰值强度时达到最大值,因为每种分量充分发挥所需的应变不同。例如,黏聚分量通常是在较小的应变下达到其最大值,而此时其他分量还远未充分发挥。

前面已指出,正常固结黏土的总应力强度包络线和有效应力强度包络线都是通过原点的直线,即 $c=0$,然而,这并不意味着土没有黏性,而只是说当固结压力为零时土没有黏性,此时,土颗粒尚在沉积过程中,颗粒间作用力为零,这样的土必定是泥浆状的,故抗剪强度也为零。在某一固结压力 σ 下,土的抗剪强度 $\sigma \tan \varphi$ 实际上包含了摩擦分量和黏聚分量。若让试样先在 σ 下固结,然后卸荷到零并剪切,仍有一定的强度,它就是土的黏聚分量。可见,土的 c, φ 并不能真正代表土的黏聚力和摩擦角的大小,而只是抗剪强度与法向应力关系中的两个参数。

抗拉强度以及 $\sigma' = 0$ 时抗剪强度的存在是真黏聚力的证据,其大小取决于胶结物的胶结作用和吸引力。当粒间间距小于 25 \AA 时,静电引力变得显著。当微粒(小于 $1 \mu\text{m}$)紧靠时,范德华引力可成为抗拉强度的原因。资料表明,起因于粒间吸引力的黏聚力在所有情况下都是非常小的,而化学胶结产生的黏聚力则很显著。

2.3.4 粗粒土的强度

由于粗颗粒的表面力与重力相比很小,所以粗粒土或无黏性土的黏聚力可以忽略不计,而且其有效内摩擦角几乎不受水的影响。因此对于饱和和无黏性土,一般不需要进行 UU 试验。

2.3.4.1 强度公式

粗粒土没有黏聚力分量,抗剪强度线通过原点且为非线性,内摩擦角随着围压的增大而降低;与砂土相比,粗粒土的强度包络线弯曲幅度更大(图 2-19)。松砂的强度包络线的初始段微下凹,然后过渡到近似直线段;密砂的强度包络线的初始段明显凸起(图 2-20)。当围压变动范围较大时,粗粒土的摩擦角 φ 不能再视为常量,即应考虑强度包络线的非线性。例如,内摩擦角可表示为

$$\varphi = \varphi_1 - \Delta\varphi \lg \frac{\sigma_3}{p_a} \quad (2-20)$$

式中, φ_1 为 $\sigma_3 = 1$ 的大气压 p_a 时的 φ 值; $\Delta\varphi$ 为 σ_3 增加 10 倍后 φ 的减少量。

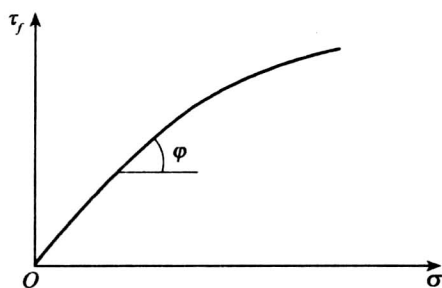


图 2-19 非线性强度包络线

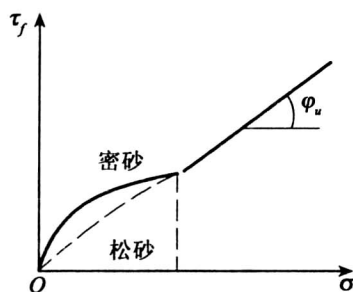


图 2-20 砂土抗剪强度包络线

通常情况下,砂土的强度包络线仍用直线,对于堆石体或碎石土也是如此。这样做,在低坝设计中偏于保守,在高坝设计中则偏于危险。通常认为, $\sigma_3 > 500\text{kPa}$ 时需考虑强度折减。

2.3.4.2 强度机理

细致的研究表明,粗粒土的抗剪强度主要由土颗粒之间的滚动或滑动摩擦以及咬合作用(Interlocking)所控制,摩擦角 φ 通常包括三部分,即

$$\varphi = \varphi_u + \varphi_d + \varphi_s \quad (2-21)$$

式中, φ_u 为颗粒间滑动分量; φ_d 为剪胀效应分量; φ_s 为颗粒挤碎磨细和重新排列作用分量。

滑动摩擦分量是由于颗粒表面接触不平造成的,主要取决于矿物类型。试验资料表明,在不同围压下, φ_u 基本上没有变化。石英砂的峰值摩擦角为 $30^\circ \sim 50^\circ$, 而滑动摩擦角只有 26° , 这说明咬合作用的存在。对于密实的无黏性土, 由于颗粒之间的相互咬合, 剪切时, 某些颗粒不得不绕过或翻越其下方的颗粒向上移动, 从而体积增大, 即发生剪胀。剪胀消耗能量, 因而表现为较高的强度; 而一旦绕过后, 抗剪能力随之减小, 表现为软化。剪胀消耗的能量所占比重直接影响峰值强度的大小。如果颗粒是不等维的, 则剪切作用可能使其趋于定向排列; 否则, 便不会出现明显的定向排列现象。

粗粒土在剪切过程中往往会出现比较明显的破碎现象, 它对强度所起的作用是很特别的。很显然, 颗粒破碎将吸收能量, 所以摩擦角有所增大。此外, 剪切促使颗粒重新排列, 孔隙比减小, 使土在力学上更稳定。但颗粒破碎以后, 抗剪强度会降低, 因为颗粒细化会导致粒间咬合作用减弱。试验表明, 反映颗粒破碎程度的表面积增量越大, 强度越低。似乎可以认为, 颗粒临近破碎会使内摩擦角增大, 而破碎后则摩擦角降低。可见, 颗粒破碎效应与颗粒旋转效应类似。至于影响颗粒破碎的因素, 研究获得了一些一般结论: 颗粒本身的强度越低, 颗粒越容易破碎; 围压越大, 破碎率越高, 剪胀效应越不明显; 不均匀系数越大, 破碎率越小; 粗料中最大粒径越大, 破碎率越高; 与砂相比, 粗料在并不很高的围压下就会出现剪碎现象; 在相同围压下, 粗料的破碎率比砂大, 这是由于粗粒土的颗粒间通常是点接触, 而且在剪切时接触点处应力高度集中, 颗粒容易破碎。

普遍认为,砂土的相对密度 D_r 是影响抗剪强度的最主要因素。此外,粗粒土中粗料含量对抗剪强度有明显影响。粗料与细料的界限值为 5mm, 粒径大于 5mm 的粗料的含量用 P_s 表示。当 $P_s < 30\%$ 时,抗剪强度基本上决定于细料,而粗料强度增加时,抗剪强度增加甚小;当 $30\% \leq P_s < 70\%$ 时,抗剪强度取决于粗、细料的共同作用,并随粗料含量的增加而显著增大;当 $P_s \geq 70\%$ 时,抗剪强度取决于粗料,并随粗料含量增加而有所减小。

2.3.5 强度影响因素

2.3.5.1 加荷类型

最常用于研究土的强度特性的试验是直剪试验和常规三轴试验,而许多实际变形条件更接近于平面应变。这里着重介绍中间主应力 σ_2 的影响。 σ_2 对强度的影响是备受学者们关注的重要问题。常规三轴试验无法考虑中间主应力 σ_2 的影响,因此人们只能通过平面应变试验或真三轴试验来研究。对砂土所进行的许多比较试验表明,平面应变试验测定的 φ 比常规三轴试验测定的一般约大 10%。不过,关于 σ_2 对强度的影响,学者们还没有统一的观点。俞茂宏(1998)总结说:有些试验结果表明,中间主应力对强度有影响但不明显,其影响程度比小主应力要小得多,设计中可不考虑随 σ_2 的强度提高。但是,对各向异性的岩土,当弱面走向垂直于中间主应力时, σ_2 对强度的影响有时可达 20%。而且更多的试验结果表现出明显的 σ_2 效应。可以认为, σ_2 效应是强度的一个重要特性,问题是如何在理论上用比较简单的数学公式表达这种效应。强度之所以会随 σ_2 增大而提高,主要是由于平均应力 σ_m 随 σ_2 增大而增大,从而使土被压密,并增加对土颗粒的约束和咬合作用。

2.3.5.2 加荷速率

加荷速率可以用应力速率或应变速率反映,并且常用应变速率划分荷载的性质。当应变速率大于 $10^{-1}/s$ 时,荷载可视为动荷载;而当应变速率小于 $10^{-6}/s$ 时,变形具有蠕变的性质。所以一般是在应变速率为 $10^{-6}/s$ 至 $10^{-1}/s$ 范围内讨论应变速率对变形和强度的影响。试验研究表明,土的强度随应变速率的增加而增大,但应变速率在同一数量级范围内变化时,对强度的影响不大。土的强度所以受加荷速率的影响,一般认为是由于土的变形包含了一部分黏性流动。

2.3.5.3 应力路径

试验表明,常规三轴试验的类型对有效应力强度参数 c' , φ' 的影响很小,也就是说,土的有效应力强度参数基本上与应力路径无关。但是,应力路径对总应力强度参数 c , φ 有明显影响。例如,某黏土的三轴试验表明,当围压 σ_3 保持不变、逐渐增大 σ_1 使土样剪破时, $c = 18kPa$, $\varphi = 27.5^\circ$; 当 σ_1 保持不变、逐渐减小 σ_3 使土样剪切破坏时, $c = 6kPa$, $\varphi = 32.5^\circ$ 。此外,在复杂应力路径下,尤其是当应力路径发生明显转折时, φ' 不等于 φ_d 。事实上,在同一围压下,超固结土的强度明显高于正常固结土,这正是应力历史或路径影响强度的最明显例子。

2.3.5.4 各向异性

土的各向异性是普遍的。有人指出,甚至所有天然砂砾沉积物都具有各向异性结构特征。许多研究者发现,室内制备的砂样一般也是各向异性的。沿不同方向切取试样进行试验,容易发现强度的各向异性。对于某粗粒土(颗粒的平均轴比为 1.64),试验表明,在较低

密实度下,横断优势定向面剪切的强度比沿优势定向面剪切的强度高 40% 左右;当相对密度大于 90% 时,在这两个方向上的强度是相等的。这是因为,密实度增大时,颗粒择优定向的程度就降低。对于黏性土,结构各向异性引起的不排水强度差异也达 40%,这种差异是由剪切期间形成的孔隙水压力不同而造成的。

2.3.5.5 破坏形式

现场土体在剪切过程中可能会发生变形的局部化,甚至形成颗粒明显定向的剪切带 (Shear Band)。在三轴剪切试验中,土样破坏可能是塑性的,其应变分布比较均匀;也可能是脆性的,变形局部化并形成破裂面或剪切带。一些学者对剪切带的形成进行过试验研究,结果表明:不同围压 ($\sigma_3 = 25 \sim 200 \text{kPa}$) 下均出现局部化变形,形成剪切带;局部化变形开始于峰值偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_p$ 之前,剪切带开始时的偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_b$ 与峰值偏应力之比随 σ_3 的增大而减小。

剪切带内真实的应力应变曲线难以测定。由于试样的剪切条件和约束条件与现场有出入,很有可能出现这样的情况,即实际土体中并不发生明显的变形局部化而试验中却出现这种现象,或正好相反。出现与不出现剪切带,应力应变关系和强度有明显差别。然而,除了尽可能模拟现场剪切条件外,似乎没有更好的方法来考虑变形局部化问题。

2.3.5.6 破坏标准

在常规三轴压缩试验中,直接测定的是试样在常围压 σ_3 下的抗压强度,而抗剪强度参数则是根据极限应力圆与强度线相切的原理确定的。抗压强度的取值标准不同,强度值和强度参数可能不同。常用的取值标准有两个,即最大主应力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 标准和最大有效主应力比 $(\sigma'_1 / \sigma'_3)_{\max}$ 标准。如果应力应变曲线不出现峰值,则取轴向应变为 15% 所对应的 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 为抗压强度。

不难发现,主应力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 与有效主应力比 (σ'_1 / σ'_3) 具有如下关系:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_3 - u) \left(\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} - 1 \right) \quad (2-22)$$

上式对轴向应变 ε_1 求得

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = (\sigma_3 - u) \frac{d \frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}}{d\varepsilon_1} - \left(\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} - 1 \right) \frac{du}{d\varepsilon_1} \quad (2-23)$$

在 CD 试验中,孔隙水压力 u 始终为零,故式(2-23)成为

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \sigma_3 \frac{d \frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}}{d\varepsilon_1} \quad (2-24)$$

该式表明, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 和 $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}$ 在相同的轴向应变处取最大值,因而两个标准是一致的。

由式(2-23)可知,在 CU 试验中,要想 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 和 $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}$ 在同一应变处取极值,必定要求 u 也在该应变处取极值;而对于超固结土,通常不是这样,故两个标准不一致。对于严重超固结土或灵敏度高的黏性土,按 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 确定的指标较大,但对应的轴向应变较小。在土体

分析中是否采用这种指标,应该慎重对待,例如,土坡失稳通常需要大变形,从而渐进破坏现象不可避免,这时采用较大强度参数算得的安全系数就是不可靠的。

2.4 岩石的基本力学性质

2.4.1 岩石的强度

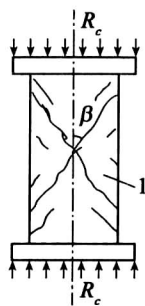
岩石在荷载作用下达到破坏时所承受的最大荷载对应的应力,称为岩石的强度(Rock Strength)。例如,岩石在单轴压缩荷载作用下所能承受的最大压应力,称为岩石的单轴抗压强度;单轴拉伸荷载作用下所能承受的最大拉应力,称为岩石的单轴抗拉强度,等等。

岩石的强度取决于很多因素,如岩石结构、风化程度、水、温度、围压大小、各向异性等。通过试验确定各种岩石的强度指标时,对于同一种岩石,强度指标会随试件尺寸、试件形状、加载速率、时间、湿度等因素变化。为了保证岩石强度试验所得的岩石强度指标的可比性,国际岩土力学学会和我国规范都对岩石强度试验所用试件的形状、尺寸、加载速率和湿度等制定了标准,对不符合标准的试件和试验条件所得的强度指标应根据标准和规范规定作相应修正。

2.4.1.1 岩石抗压强度

岩石的抗压强度包括岩石的单轴抗压强度和岩石三轴抗压强度。岩石单轴抗压强度就是岩石试件在单轴压力作用下(无围压,只有轴向压力)所能承受的最大压应力,如图 2-21 所示。单轴抗压强度 R_c 等于达到破坏时最大轴向压力 P_c 除以试件的横截面积 A , 即

$$R_c = \frac{P_c}{A} \quad (2-25)$$



β —破坏角;1—剪切破裂

图 2-21 岩石的抗压强度试验

岩石试件在单轴压力作用下的常见的破坏形式有:单轴压力作用下试件的劈裂、单斜面剪切破坏、多个共轭斜面剪切破坏,分别如图 2-22(a)、(b)和(c)所示,后两种剪切破坏的破坏面法向与加载方向的夹角 $\beta = 45^\circ + \varphi/2$, φ 为岩石的内摩擦角。

岩石单轴抗压强度一般是在室内刚性试验机上通过加压试验得到的,试件可以是立方体(50mm×50mm×50mm 或 70mm×70mm×70mm),也可以是圆柱体,但使用最广泛的是圆柱

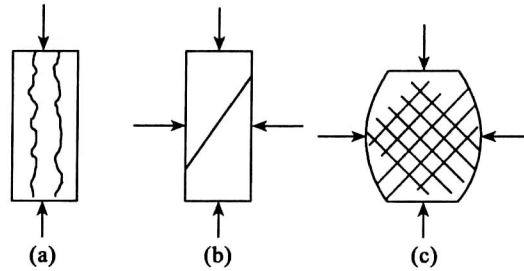


图 2-22 岩石单轴压缩时的常见破坏形式

体,岩样尺寸一般为 50mm×100mm。圆柱体试件长度与直径之比(L/D)对试验结果有很大影响。以 R_c 表示实际的岩石单轴抗压强度,以 R'_c 表示试验所测得的岩石单轴抗压强度,则 R_c 与 R'_c 之间的关系可表示为

$$R_c = \frac{R'_c}{0.788 + 0.22 \frac{D}{L}} \tag{2-26}$$

如图 2-23 所示,当 $L/D \geq 2.5 \sim 3$ 时, R_c 曲线趋于稳定,试验结果值(R'_c)不随 L/D 的变化而明显变化。因此,ISRM(国际岩石力学学会)建议进行岩石单轴抗压强度试验时所使用的试件长度(L)与直径(D)之比为 2.5 ~ 3。

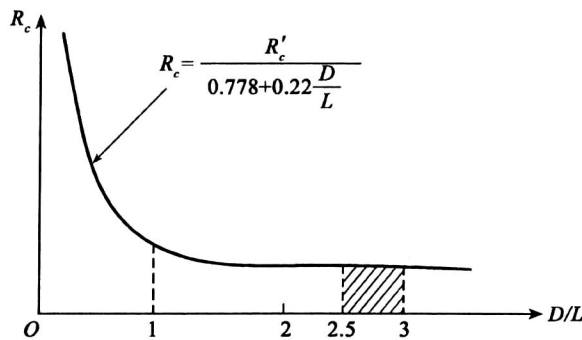


图 2-23 试验测得的单轴抗压强度值 R'_c 与试件 L/D 之间的关系

进行岩石单轴抗压强度试验时,应注意试件端部效应,当试验由上下加压板加压时,加压板与试件之间存在摩擦力,因此在试件端部存在剪应力,约束试件端部的侧向变形,所以试件端部的应力状态不是非限制性的,只有在离端部一定距离的部位,才会出现均匀应力状态。为了减少“端部效应”,应将试件端部磨平,并在试件与加压板之间加入润滑剂,以充分减少加压板与试件断面之间的摩擦力,同时,应使试件长度达到规定要求,以保证在试件中部出现均匀应力状态。

2.4.1.2 点荷载强度指标

点荷载强度指标(Point Load Strength Index)试验是布鲁克(E. Broch)和弗兰克林

(J. A. Franklin)1972 年发明的。这是一种最简单的岩石强度试验,其试验所获得的强度指标值可用做岩石分级的指标,经换算后得到单轴抗压强度。

点荷载强度试验的设备比较简单,小型点荷载试验装置由一个手动液压泵、一个液压千斤顶和一对圆锥形加压头组成,加载方式如图 2-24(a)所示。压力 P 由液压千斤顶提供。加压千斤顶和压力头结构如图 2-24(b)所示。

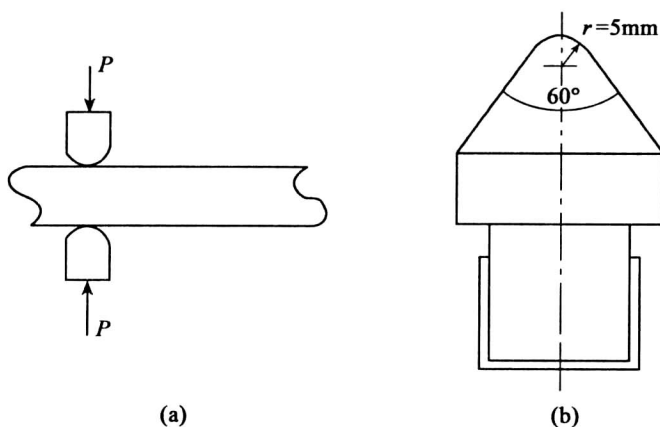


图 2-24 点荷载试验示意图

这种小型点荷载试验装置是便携式的,可带到岩土工程现场去做试验,这是点荷载试验能够广泛采用的重要原因。大型点荷载试验装置的原理和小型点荷载试验装置的原理是相同的,只是能提供更大的压力,适合于大尺寸的试件。

点荷载试验的另一个重要优点是对试件的要求不严格,不需要像做抗压强度试验那样精心准备试件。最好的试件就是直径为 25 ~ 100mm 的岩芯。没有岩芯时,岩块也可以。对试件尺寸的要求如图 2-25 所示。若岩芯中包含节理、裂隙,在加载时,要合理布置加载部位和方向,使强度指标值能均匀地考虑到节理、裂隙的影响。

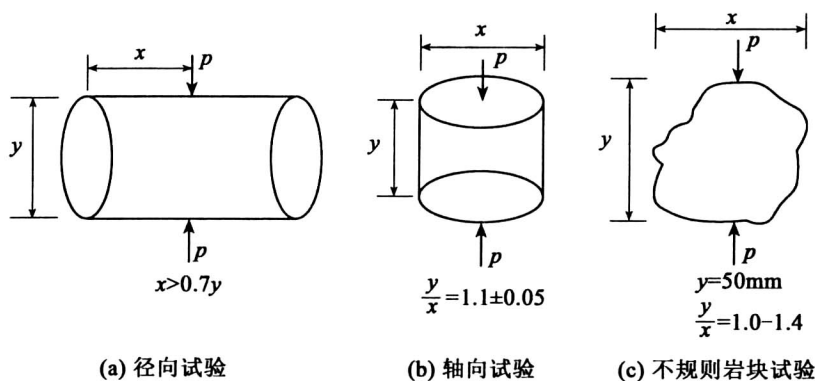


图 2-25 点荷载试验对试件尺寸和形状的要求

点荷载试验所获得的强度指标用 I_s (Index of Strength) 表示, 其值等于

$$I_s = \frac{P}{y^2} \quad (2-27)$$

ISRM 将直径为 50mm 的圆柱体试件径向加载点荷载试验的强度指标值 $I_s(50)$ 确定为标准试验值, 其他尺寸试件的试验结果需根据公式(2-28)进行修正。

$$I_s(50) = kI_s(D) \quad (2-28)$$

$$k = 0.2717 + 0.01457D \quad (\text{当 } D \leq 55\text{mm}) \quad (2-29)$$

$$k = 0.7540 + 0.0058D \quad (\text{当 } D > 55\text{mm}) \quad (2-30)$$

式中, $I_s(50)$ 为直径为 50mm 的标准试件的点荷载强度指标值 (MPa); $I_s(D)$ 为直径为 D 的非标准试件的点荷载强度指标值 (MPa); k 为修正系数; D 为试件直径 (mm)。

进行现场岩石分级时, 需用 $I_s(50)$ 作为点荷载强度标准值。 $I_s(50)$ 由下式转换为单轴抗压强度:

$$R_c = 22.82 I_s(50)^{0.75} \quad (2-31)$$

式中, R_c 为 $L:D=2:1$ 的试件饱和单轴抗压强度值。

2.4.1.3 岩石抗剪强度

岩石的抗剪强度是岩石抵抗剪切破坏的极限能力, 它是岩土力学中重要指标之一, 常以内聚力 c 和内摩擦角 φ 两个抗剪参数表示。确定岩石抗剪强度的方法可分为室内试验和现场试验两大类。室内试验常采用直接剪切试验、楔形剪切试验和三轴压缩试验测定岩石的抗剪强度指标; 现场试验主要以直接剪切试验为主, 也可做三轴强度试验。

1. 直接剪切试验

直接剪切试验采用直接剪切仪进行。岩石的直接剪切仪与土的直接剪切仪相类似, 如图 2-26 所示。

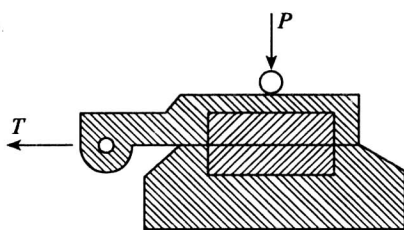


图 2-26 直接剪切仪

每次试验时, 先在试样上施加垂直荷载 P , 然后在水平方向逐渐施加水平剪切力 T , 直至达到最大值 T_{\max} 发生破坏为止。剪切面上的正应力 σ 和剪应力 τ 按下列公式计算:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2-32)$$

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (2-33)$$

式中, A 为试样的剪切面面积。

在给定正应力下的抗剪强度以 τ_f 表示。用相同的试样、不同的 σ 进行多次试验,即可求出不同 σ 下的抗剪强度 τ_f ,绘成关系曲线 $\tau_f-\sigma$,如图2-27所示。

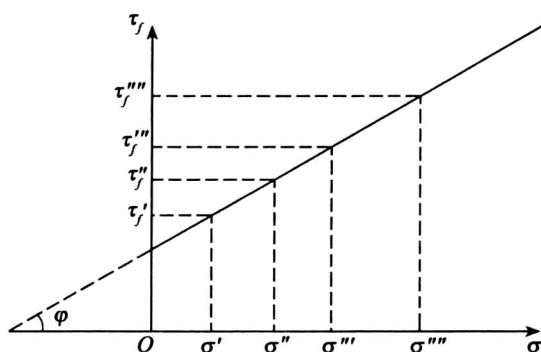


图2-27 抗剪强度 τ_f 与正应力 σ 的关系

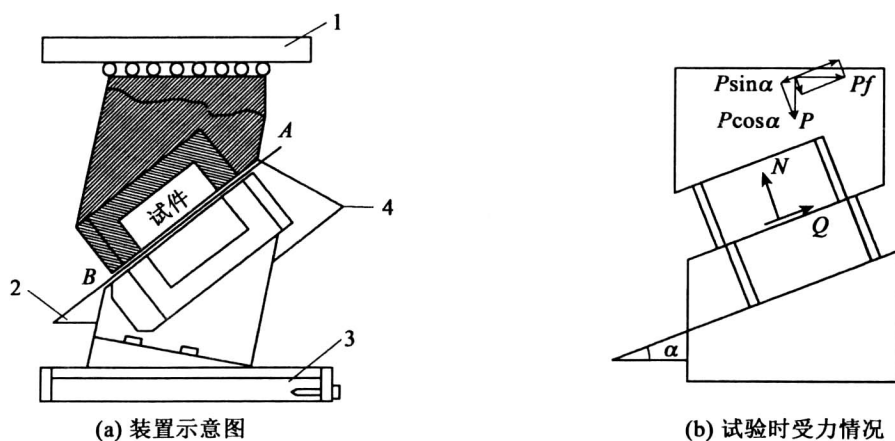
试验证明,强度线并不是绝对严格的直线,但在岩石较完整或正应力值不很大时,可近似看做直线,其方程式表达为

$$\tau_f = c + \sigma \tan \varphi \quad (2-34)$$

这就是库仑强度公式。直线在 τ_f 轴上的截距即为岩石的内聚力 c ,该线与水平线的夹角即为岩石的内摩擦角 φ 。

2. 楔形剪切试验

楔形剪切试验用楔形剪切仪进行,这种仪器的主要装置和试件受力情况如图2-28所示。试验时,把装有试件的这种装置放在压力机上加压,直至试件沿着 AB 面发生剪切破坏。这种试验实际上是另一种形式的直接剪切试验。



1—上压板;2—倾角;3—下压板;4—夹具

图2-28 楔形剪切仪

根据平衡条件,可以列出下列方程式:

$$N - P \cos \alpha - P f \sin \alpha = 0 \quad (2-35)$$

$$Q + P f \cos \alpha - P \sin \alpha = 0 \quad (2-36)$$

式中: P 为压力机上施加的总垂直力, kN; N 为作用在试件剪切面上的法向总压力, kN; Q 为作用在试件剪切面上的切向总剪力, kN; f 为压力机垫板下面的滚珠的摩擦系数, 可由摩擦校正试验决定; α 为剪切面与水平面之间的夹角的角度。

将式(2-35)和式(2-36)分别除以剪切面面积即得

$$\sigma = \frac{P}{A} (\cos \alpha + f \sin \alpha) \quad (2-37)$$

$$\tau_f = \frac{P}{A} (\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (2-38)$$

式中, A 为剪切面面积。

试验中采用多个试件, 分别以不同的 α 角进行试验。当破坏时, 对应于每一个 α 值可以得出一组 σ 和 τ_f 值, 由此可得到如图 2-29 所示的曲线。从图中可以看出, 当 σ 变化范围较大时, τ_f - σ 为一曲线关系; 当 σ 不大时, 可视为直线, 求出 c 和 φ 。

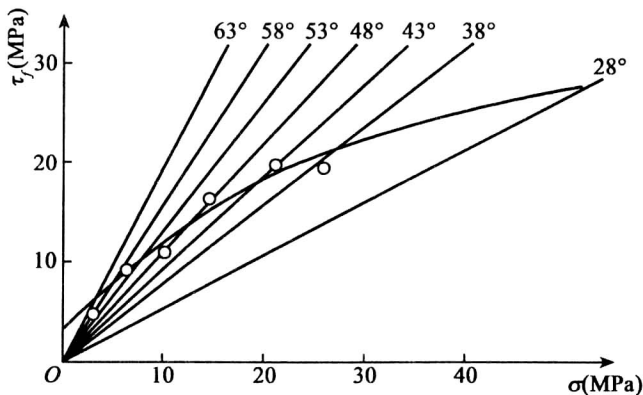


图 2-29 楔形剪切试验结果

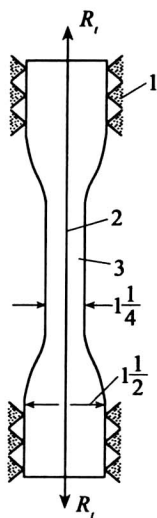
2.4.1.4 岩石抗拉强度

岩石的抗拉强度就是岩石试件在单轴拉力作用下抵抗破坏的极限能力, 它在数值上等于破坏时的最大拉应力值。对岩石直接进行抗拉强度的试验比较困难, 目前研究得比较少。一般多进行间接试验, 再用理论公式算出岩石的抗拉强度。

岩石的直接抗拉试验的试件如图 2-30 所示, 试验时, 将试样的两端固定在拉力机上, 对试样施加轴向拉力直至破坏, 然后按下式计算出试样的抗拉强度:

$$R_t = \frac{P_t}{A} \quad (2-39)$$

式中, R_t 为岩石抗拉强度, kPa; P_t 为试件破坏时的最大拉力, kN; A 为试件中部的横截面积, m^2 。

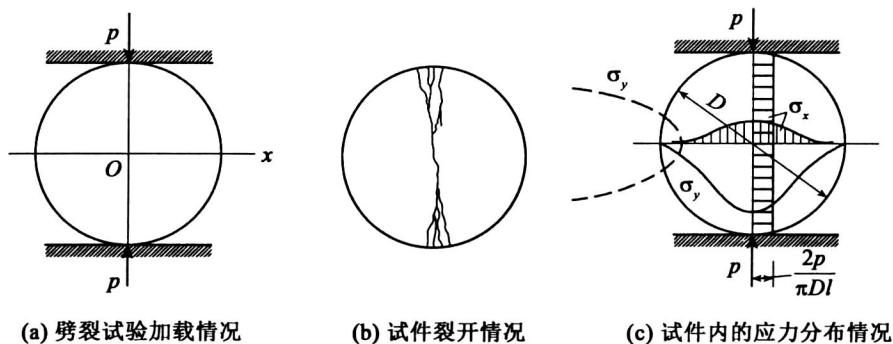


1—夹子;2—垂直轴线;3—岩石试件

图 2-30 抗拉试验的试件

该方法的缺点是试样制备困难,且不易与拉力机固定,在试件固定处附近又常常有应力集中现象,同时难免在试件两端面有弯曲力矩。因此,这种方法用得不多。

目前常用劈裂法(也称为巴西试验法)测定岩石抗拉强度。试验时,沿着圆柱体岩石试件的直径方向施加集中荷载,试件受力后沿着受力方向的直径裂开,如图 2-31 所示。



(a) 劈裂试验加载情况

(b) 试件裂开情况

(c) 试件内的应力分布情况

图 2-31 岩石劈裂试验

根据弹性力学公式,这时沿着竖向直径产生几乎均匀的水平方向拉应力,其平均值为

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi D l} \quad (2-40)$$

式中, \$P\$ 为作用荷载, N; \$D\$ 为圆柱体试样的直径, mm; \$l\$ 为圆柱体试样的厚度, mm。

而在试样的水平方向直径平面内,产生最大的压应力值为(在圆柱形的中心处)

$$\sigma_y = \frac{6P}{\pi D l} \quad (2-41)$$

这两个直径内的应力分布如图 2-31(c) 所示。可以看出,圆柱体试样的压应力只有拉应力的 3 倍,但岩石的抗压强度往往是抗拉强度的 10 倍左右,岩石试样此时总是受拉破坏而不是受压破坏。因此,我们就可利用劈裂法确定岩石的抗拉强度,这时只需在式(2-40)中用破裂时的最大荷载代替其中的 P ,即得岩石的抗拉强度,即

$$R_t = \frac{2P_{\max}}{\pi D l} \quad (2-42)$$

式中, P_{\max} 为破裂时的最大荷载, N。

这种方法的优点是简单易行,只要有普通压力机就可进行试验,无需特殊设备,因此该方法获得了广泛应用。其缺点是,这样确定的岩石抗拉强度与直接拉伸试验所得的强度有一定的差别。

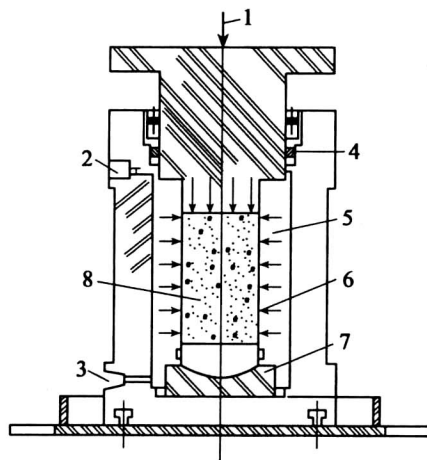
岩石的抗拉强度比抗压强度要小得多,抗拉强度与抗压强度之间可考虑存在着某种线性关系,近似地表示为

$$R_t = \frac{R_c}{C_m} \quad (2-43)$$

式中, C_m 为线性系数,在 4 ~ 10 范围内变化,依据岩石的类型而定。

2.4.1.5 三轴压缩试验

岩石三轴压缩试验采用岩石三轴压力仪进行,三轴试验设备如图 2-32 所示。在进行三轴试验时,先将试件施加侧压力,即小主应力 σ'_3 ,然后逐渐增加垂直压力,直至破坏,得到破坏时的大主应力 σ'_1 ,从而得到一个破坏时的应力圆。采用相同的岩样,改变侧压力为 σ''_3 ,施加垂直压力直至破坏,得 σ''_1 ,从而又得到一个破坏应力圆。绘出这些应力圆的包络线,即可求得岩石的抗剪强度曲线,如图 2-33 所示。如果把它看做是一条近似的直线,则可根据该线在纵轴上的截距及该线与水平线的夹角求得内聚力 c 和内摩擦角 φ 。



1—施加垂直压力;2—侧压力液体出口处,排气处;3—侧压力液体进口处;
4—密封设备;5—压力室;6—侧压力;7—球状底座;8—岩石试件

图 2-32 三轴试验装置图

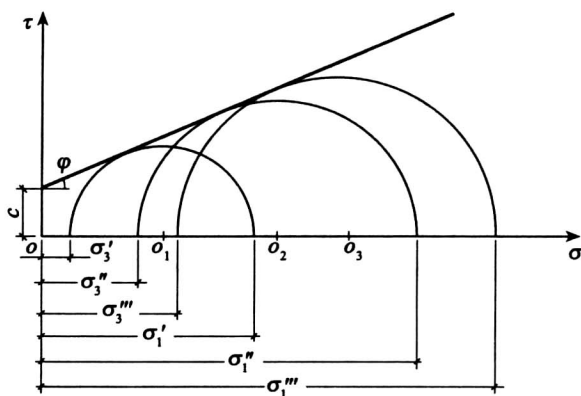


图 2-33 三轴试验破坏时的莫尔圆

与单轴压缩试验一样,三轴试验试件的破裂面与大主应力 σ_1 方向间的夹角为 $45^\circ - \varphi/2$ 。

真三轴压力试验加载是使试件成为 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的应力状态。真三轴压力试验可得到许多不同应力路径下的力学结果,可为岩土力学理论研究提供较多的资料。但是真三轴试验装置复杂,试件六面均可受到加压引起的摩擦力,影响试验结果,故较少进行该类试验。

2.4.2 岩石的变形

岩石的变形是指岩石在物理因素作用下形状和体积的变化。工程上最常研究由于外力(如在岩石上建造大坝)作用引起的变形或在岩石中开挖引起的变形。岩石的变形对工程建(构)筑物的安全和使用影响很大,因为当岩石产生较大位移时,建(构)筑物内部应力可能大大增加,因此研究岩石的变形在岩石工程中有着重要意义。

2.4.2.1 岩石变形特性的测定

通过岩石的变形试验,可对岩石的变形特性进行全面深入的研究。变形试验旨在绘制出应力-应变关系曲线,以便进一步对岩石的变形特性进行分析。岩石变形试验包括单轴试验和三轴试验,现分述如下:

1. 岩石在单轴压缩状态下的应力-应变曲线类型

在刚性压力机上进行单轴压力试验可以获得完整的岩石应力-应变全过程曲线,典型完整的岩石应力-应变曲线如图 2-34 所示,这种曲线一般可分为四个区段:①在 OA 区段内,曲线稍微向上弯曲;②在 AB 区段内,接近于直线;③在 BC 区段内,曲线向下弯曲,直至 C 点的最大值;④下降段 CD 。

对大多数岩石来说,在 OA 和 AB 这两个区段内应力-应变曲线具有近似直线的形式,这种应力-应变关系可用下式表示:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2-44)$$

式中, E 是岩石的弹性模量,即 OB 线的斜率。

如果岩石严格地遵循式(2-44)的关系,那么这种岩石就是线弹性的,弹性力学的理论适用于这种岩石。如果某种岩石的应力-应变关系不是直线,而是曲线,但应力与应变

之间存在一一对应关系,则称这种岩石为完全弹性的。由于这时应力与应变的关系是一条曲线,所以没有唯一的模量,但对应于一点的应力 σ 值,都有一个切线模量和割线模量。切线模量就是该点在曲线上的切线的斜率 $d\sigma/d\varepsilon$,而割线模量就是该点割线的斜率,它等于 σ/ε 。如果逐渐加载至某点,然后再逐渐卸载至零,应变也退至零,但卸荷曲线不走加载曲线的路线,这时产生了所谓“滞回效应”,卸载曲线上该点的切线斜率就相当于该应力的卸载模量。

这两个阶段的岩石很接近于弹性,可能稍有一点滞回效应,这是因为岩石中裂隙的压密闭合,特别表现在 OA 段,但是在这两个区段内加载和卸载对于岩石不发生不可恢复的变形。

第三区段 BC 的起点 B 往往是在 C 点最大应力值的 $2/3$ 处,从 B 点开始,岩石中产生新的张拉裂隙,岩石模量下降,应力-应变曲线的斜率随着应力的增加而逐渐降低到零。在这一范围内,岩石将发生不可恢复的变形,加载与卸载的每次循环都是不同的曲线。这阶段发生的变形中,能恢复的变形称为弹性变形,而不可恢复的变形称为塑性变形或残余变形或永久变形,如图中的卸载曲线 PQ 在零应力时还有残余变形 ε_p 。加载曲线与卸载曲线所组成的环叫做塑性滞回环。弹性模量 E 就是加载曲线直线段的斜率,而加载曲线直线段大致与卸载曲线的割线相平行。这样,一般可将卸载曲线的割线的斜率作为弹性模量,而岩石的变形模量 E_0 取决于总的变形量,即取决于弹性变形与塑性变形之和,它是正应力 σ 与总的正应变之比,在图 2-34 上,它相应于割线 OP 的斜率。

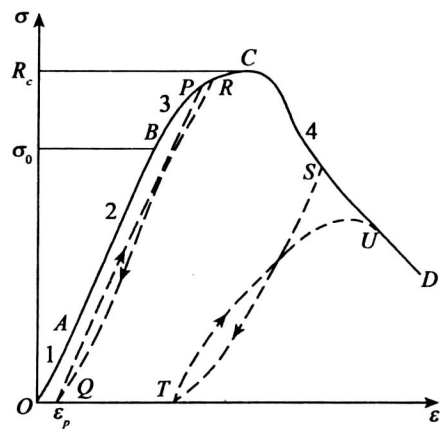


图 2-34 岩石的典型完整应力-应变曲线

在线性弹性材料中,变形模量等于弹性模量;在弹塑性材料中,当材料屈服后,其变形模量不是常数,它与荷载的大小或范围有关。在应力-应变曲线上的任何点与坐标原点相连的割线的斜率,表示该点所代表的应力的变形模量。如果岩石上再加载,则再加载曲线 QR 总是在曲线 $OABC$ 以下,但最终与之连接起来。

第四区段 CD 开始于应力-应变曲线上的峰值 C 点,是下降曲线,在这一区段内卸载可能产生很大的残余变形。图中 ST 表示卸载曲线, TU 表示再加载曲线。可以看出, TU 线在

比 S 点低得多的应力值下趋近于 CD 曲线。应当指出,压力机的特性对岩石的破坏过程有很大的影响。假如压力机在对试件加压的同时本身变形也相当大,而当试件破坏来临时,积蓄在压力机内的能量突然释放,从而引起实验系统急骤变形,试件碎片四处飞溅,在这种情况下就不能获得图 2-34 上所示应力-应变曲线的 CD 段,而是在 C 点附近就因发生突然破坏而终止;反之,如果压力机的变形甚小(即刚性压力机),积蓄在机器内的能量很小,试件不会突然破坏成碎片,用这样的刚性压力机对已发生破坏但仍未失稳的岩石能测出破坏后的变形,如图 2-34 所示。从图 2-34 所示破坏后的荷载循环 STU 来看,破坏后的岩石仍可能具有一定的强度,从而也具有一定的承载能力,该强度称为岩石的残余强度。

以上分析了应力-应变曲线的四个区段。研究表明,第一区段属于压密阶段,这期间岩石中初始的微裂隙受压闭合;第二区段近似于线弹性工作阶段,应力-应变关系曲线为直线;第三阶段为非弹性阶段,主要是在平行于荷载方向开始逐渐生成新的微裂隙以及裂隙的扩展, B 点是岩石从弹性转变为非弹性的转折点;最后区段 CD 为破坏阶段, C 点的纵坐标就是单轴抗压强度 R_c 。

以前大多数材料试验是在普通试验机上做的,由于这种试验机的刚度不够大,无法获得材料的某些力学特性,这类试验机又称为柔性试验机。岩石或混凝土等脆性材料的试件在柔性试验机进行压力试验时,当荷载达到或刚好通过应力-应变曲线的峰值后,岩石试件就急剧破裂和崩解,测量的应力-应变曲线从而到此终止。只有在刚性压力机上进行试验才能获得岩石类材料的全应力-应变曲线。

定义试验机-试件系统的刚度为

$$K = \frac{P}{\delta_x} \quad (2-45)$$

式中, δ_x 为力 P 作用下,沿 P 作用方向产生的位移。

此时储存于系统中的弹性应变能为

$$S = \frac{P^2}{2K} \quad (2-46)$$

对试验机系统,如图 2-35(a)所示,在压力试验作用下储存的弹性能为

$$S = \frac{P^2}{2} \left(\frac{1}{K_r} + \frac{1}{K_m} \right) \quad (2-47)$$

式中, K_r 和 K_m 分别为岩石试件和试验机的刚度。

如果取 $K_r = 3 \times 10^4 \text{ MPa} \cdot \text{cm}$, $K_m = 0.7 \times 10^4 \text{ MPa} \cdot \text{cm}$, 可以从上式看出压力试验机储存的能量大约是试件的 4 倍。这样,当试件破坏时,压力机和试件都要将式(2-47)中的能量释放出来,而压力机释放的能量就会影响试件的破坏,并影响试件的变形,峰值强度之后的应力-应变曲线就不能得到。从图 2-35(b)中可以看见,峰值强度后柔性压力试验机的刚度用较平的直线 K_1 表示,而刚性压力机的刚度用较陡的 K_2 线表示,岩石试件的真实应力应变曲线介于这两者之间。当试件发生 Δx 的压缩量时,对应这一压缩量岩石试件抵抗荷载的能力减少了 $\Delta P_r = \frac{dP}{dx} \Delta x$, 此时压力机作用的荷载变化值 $\Delta P_m = K_m \Delta x$, 如果 $\left| \frac{dP}{dx} \right| > |K_m|$, 且 $|K_m| = |K_1|$, 则此时试件抵抗荷载的能力小于此时压力机作用于其上的荷载,试件会迅速发生破

坏。对于柔性压力试验机而言,一般属于这种情况。如果 $\left| \frac{dp}{dx} \right| < |K_m|$, 且 $|K_m| = |K_2|$, 则不会发生突然失稳的情况, 此时在任一荷载下, 储存在试验机中的能量用 K_2 线以下的面积表示, 它总是小于试件进一步压缩所需要的能量, 如图 2-35(b) 所示。

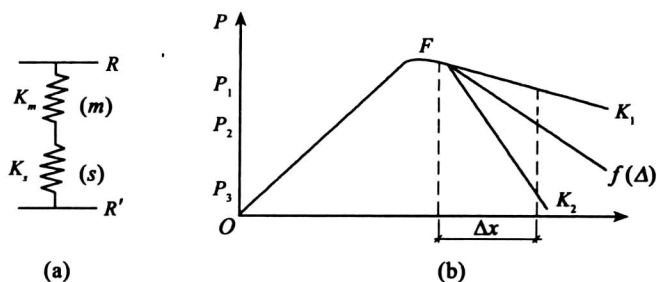


图 2-35 压力机系统刚度示意图

在试验过程中, 试验机和岩石试件组成一个系统, 只有试验机刚度大大高于岩石试件刚度, 试验机的变形才会小, 试件破坏时才是稳定的。因此, 试验机刚度是相对于岩石试件刚度而言的。为提高试验机的刚度, 也可考虑减少岩石试件的刚度。减少岩石试件的刚度就是要减小试件截面积, 增加其长度。

但是, 从实际使用出发, 试验机不可能太庞大和笨重, 试件也不可能太细长, 因为试件尺寸是有标准的。因此上述的措施虽然可以大大提高试验机的刚度, 并能满足部分岩石(如软岩)的全程压缩试验要求。但对于部分坚硬岩石, 为了实现岩石试件的稳定破坏, 完成全程压缩试验, 只提高试验机刚度还不够, 还必须在试验机中采用液压伺服系统。伺服系统可以根据岩石破坏变形情况控制变形速度, 使变形速度保持为恒定值。因为伺服系统有一个反馈信号系统, 它检查当前施加的荷载是否保持事先确定的变形速度; 否则它会自动地调整施加的荷载, 以保持变形速度的恒定。反馈信号响应的时间为 $2 \sim 3 \mu s$, 这个速度远大于裂隙传播速度。因而即使出现过量荷载, 裂隙还未来得及传播, 荷载就被减小了。岩石破坏得到有效控制。但为了减少储存在试验机中的应变能, 试验机仍需要足够的刚度。对非常坚硬的岩石, 裂隙传播速度也是非常快的, 因而只靠伺服系统也不能有效地加以控制。所以, 在通常情况下, 为了完成全程压缩试验, 获得全应力-应变曲线, 采用带有伺服系统的刚性试验机是必要的。在岩石特别坚硬的情况下, 给试件施加围压也是必要的, 围压可使破坏后的变形得到有效控制。

全应力-应变曲线除能全面显示岩石在受压破坏过程中的应力、变形特征, 特别是破坏后的强度与力学性质变化规律外, 还有以下三个用途:

(1) 预测岩爆。从图 2-36 可以看出, 全应力-应变曲线所围面积以峰值强度点 C 为界, 可以分为左右两个部分, 左半部分 OCE (面积 A) 代表达到峰值强度时, 积累在试件内部的应变能; 右半部 CED (面积 B) 代表试件从破裂到破坏整个过程所消耗的能量。若 $B < A$, 说明岩石破坏后尚剩余一部分能量, 这部分能量突然释放就会产生岩爆; 若 $B > A$, 则说明应变能在变形破坏过程中已完全消耗掉, 而不会产生岩爆。

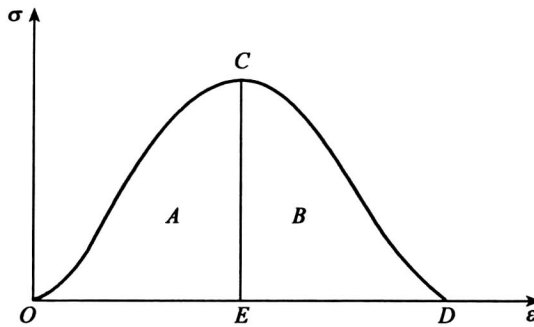


图 2-36 全应力-应变曲线预测岩爆示意图

(2) 预测蠕变破坏。图 2-37 中的蠕变终止轨迹线表示,在试件加载到一定的应力水平后,保持应力恒定,试件将发生蠕变。在适当的应力水平下,蠕变发展到一定程度,即应变达到某一值时,蠕变就停止了,岩石试件处于稳定状态。蠕变终止轨迹就是不同应力水平下蠕变终止点的连线,这是事先通过大量试验获得的。当应力水平在 H 点以下时,保持应力恒定,岩石试件不会发生蠕变。当应力水平达到 E 点时,保持应力恒定,则蠕变应变发展到 F 点与蠕变终止轨迹相交,蠕变就停止。 G 点是临界点,应力水平在 G 点以下保持恒定。蠕变应变发展到最后还会和蠕变终止轨迹相交,蠕变将停止,岩石试件不会破坏,若应力水平在 G 点保持恒定,则蠕变应变发展到最后就和全应力-应变曲线的右半部,即破坏后的曲线相交,此时试件将发生破坏,这是该岩石所能产生的最大蠕变应变值,应力水平在 G 点之上保持恒定而发生蠕变,最终都将导致破坏,因为最后都要和全应力-应变曲线破坏后段相交。应力水平越高,从蠕变发生到破坏的时间越短,如从 C 点开始蠕变,到 D 破坏;从 A 点开始蠕变,到 B 点就破坏了。

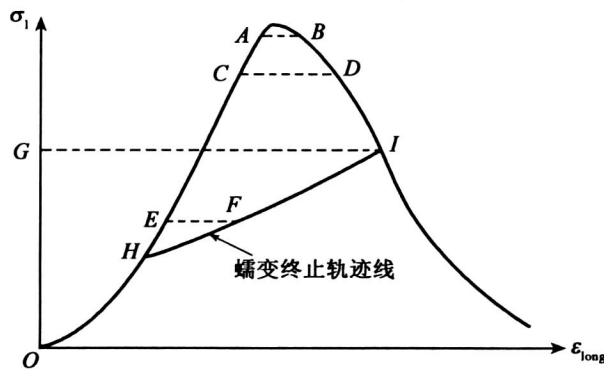


图 2-37 全应力-应变曲线预测蠕变破坏

(3) 预测循环加载条件下岩石的破坏。在岩土工程中经常遇到循环加载的情况,如反复的爆破作业就是对围岩施加的循环荷载,而且是动荷载。由于岩石的非线性,其加载和卸载路径不重合,因此每次加一卸载都形成一个迟滞回路,留下一段永久变形。图 2-38 表示

在高应力水平下循环加载,岩石在很短时间内就会破坏,如从 A 点施加循环荷载,永久变形发展到 B 点,岩石就破坏了。因为 B 点已和破坏后的曲线段相交,这表明,当岩石工程本身处于较高受力状态,若再出现循环荷载作用,则岩石工程将非常容易发生破坏。若在 C 点的应力水平下遭受循环荷载作用,则可以经历相对较长一段时间,岩石工程才会发生破坏。所以,根据岩石本身已有的受力水平、循环荷载的大小、周期,可根据全应力-应变曲线预测循环加载条件下岩石发生破坏的时间。

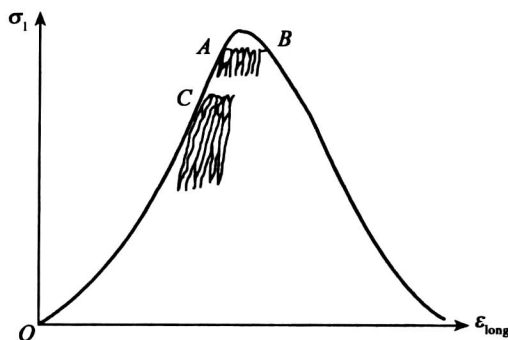


图 2-38 全应力-应变曲线预测反复加载条件下的破坏

2. 反复加载与卸载条件下岩石的变形特性

对于弹塑性岩石,在反复多次加载与卸载循环时,所得的应力-应变曲线将具有以下特点:

(1) 卸载应力水平一定时,每次循环中的塑性应变增量逐渐减小,加、卸载循环次数足够多后,塑性应变增量将趋于零。因此,可以认为,所经历的加、卸载循环次数越多,岩石越接近弹性变形,如图 2-39 所示。

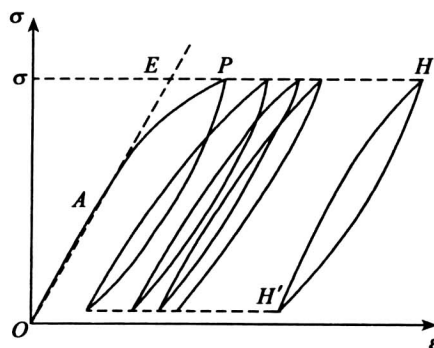


图 2-39 常应力下弹塑性岩石加、卸载循环应力-应变曲线

(2) 加卸载循环次数足够多时,卸载曲线与其后一次再加载曲线之间所形成的滞回环的面积将越变越小,且越靠拢而又越趋于平行,如图 2-39 所示,表明加、卸载曲线的斜率越接近。

(3) 如果多次反复加载、卸载循环,每次施加的最大荷载比前一次循环的最大荷载为大,则可得到如图 2-40 所示的曲线。随着循环次数的增加,塑性滞回环的面积也有所扩大,卸载曲线的斜率(它代表岩石的弹性模量)也逐次略有增加,这个现象称为强化。此外,每次卸载后再加载,在荷载超过上一次循环的最大荷载以后,变形曲线仍沿着原来的单调加载曲线上升,好像不曾受到反复加卸荷载的影响似的。

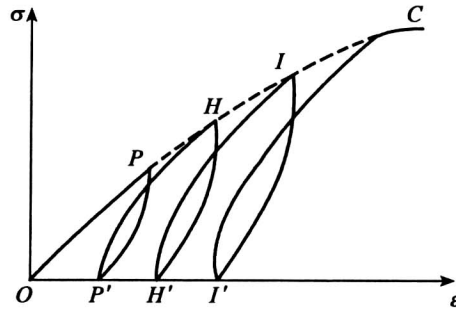


图 2-40 弹塑性岩石在变应力水平下加卸载循环时的应力-应变曲线

3. 三轴压缩状态下岩石的变形特征

常规三轴变形试验采用圆柱形试件,通常的做法是在某一侧限压应力($\sigma_2 = \sigma_3$)作用下,逐渐对试件施加轴向压力,直至试件压裂,记下压裂时的轴向应力值,即该围压 σ_3 下的 σ_1 。施加轴向压力过程中,及时记录全过程所施加的轴向压力及相对应的三个轴向应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 ε_3 ,直到岩石试件完全破坏为止。根据上述记录资料可绘制该岩石试件的应力-应变曲线。图 2-41 为苏长岩试件在 20.59MPa 围压下,反复加、卸载的全应力-应变曲线;图 2-42 则为某黏土质石英岩在不同围压下的轴向应力与轴向应变关系曲线以及径向应变之和与轴向应变曲线。

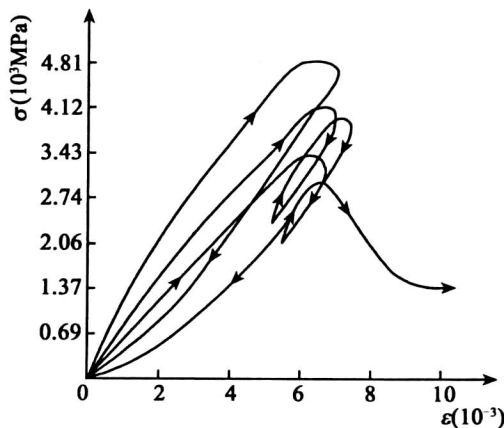


图 2-41 苏长岩试件在反复加载、卸载条件下的全应力-应变曲线
($\sigma_3 = 20.59\text{MPa}$)

图 2-42 反映了不同侧限压力 σ_3 对于应力-应变关系曲线以及径向应变与轴向应变关系曲线的影响。从图 2-43 中 $\sigma_3 = 0$ 的变形曲线可以看出,试件在变形较小时就发生破坏,曲线顶端稍有一点下弯,而当围压 σ_3 逐渐增加,则试件破裂时的极限轴向压力 σ_1 亦随之增加,岩石在破坏时的总变形量亦随之增大,这说明随着围压 σ_3 的增大,其破坏强度和塑性变形均有明显的增长。

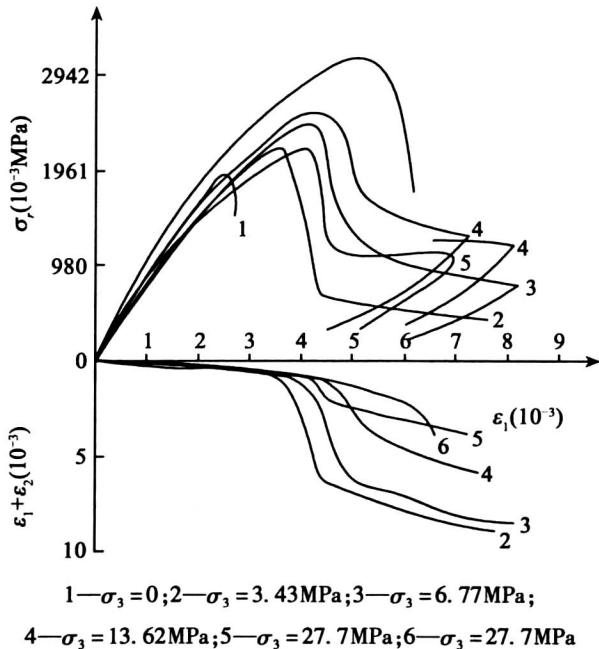


图 2-42 黏土质石英岩在不同侧限压力下的轴向应力-应变曲线以及径向应变-轴向应变曲线

4. 真三轴压缩试验的应力-应变曲线

进行真三轴压缩试验 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), 可充分反映中主应力 σ_2 对于岩石变形以及强度的影响, 这一特点也正是与常规三轴试验的主要差别。日本的茂木清夫对山口县大理岩进行了 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的真三轴试验, 他分别以固定 σ_3 、变动 σ_2 和固定 σ_2 、变动 σ_3 的方法测得 σ_2 、 σ_3 对于轴向应变 ϵ_1 的影响, 如图 2-43 所示, 从图中可以看出:

- (1) 当 $\sigma_2 = \sigma_3$ 时, 随围压的增大, 岩石的塑性和岩石破坏时的强度、屈服极限同时增大;
- (2) 当 σ_3 为常数时, 随着 σ_2 的增大, 岩石的强度和屈服极限有所增大, 而岩石的塑性却减少了;
- (3) 当 σ_2 为常数时, 随着 σ_3 的增大, 岩石的强度和塑性有所增大, 但其屈服极限并无变化。

图 2-44 表示三轴试验中测定的体积应变曲线。体积应变 $\Delta V/V_0$ 就是三个主应变之和 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, 这里 ΔV 是试件压缩时的体积变化, 而 V 是原来没有施加任何应力时的体积。从图中看出, 当轴向应力 σ_1 较小时, 岩石符合线弹性材料的性状。体积应变 $\Delta V/V_0$ 是具有正斜率的

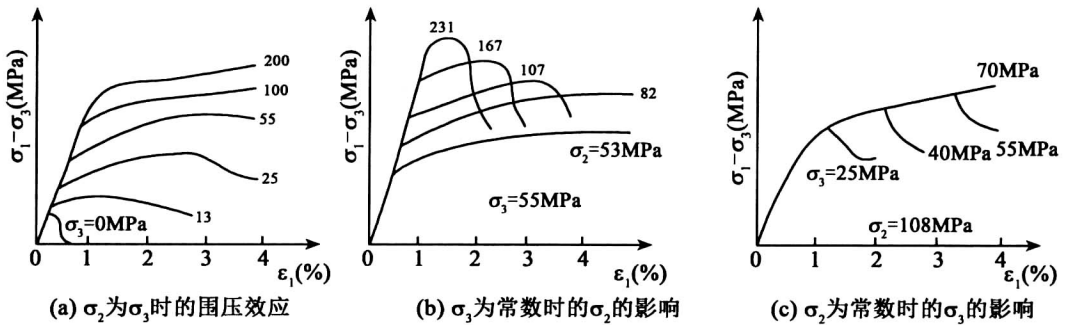


图 2-43 岩石在三轴压缩状态下的应力-应变曲线

直线,这是由于 $\epsilon_1 > |\epsilon_2 + \epsilon_3|$,即体积随着压力的增加而减小。当应力大约达到强度的一半时,体积应变开始偏离线弹性材料的直线。随着应力的增加,这种偏离的程度也越来越大,在接近破裂时,偏离程度大得使岩石在压缩阶段的体积超过其原来的体积,产生负的压缩体积应变,通常称为扩容。扩容就是体积扩大的现象,它往往是岩石破坏的前兆。为解释这种现象,试件在接近破裂时的侧向应变之和必须超过其轴向应变,即 $\epsilon_1 < |\epsilon_2 + \epsilon_3|$ 。扩容是由于岩石试件内细微裂隙的形成和扩张所致,这种裂隙的长轴与最大主应力的方向是平行的。

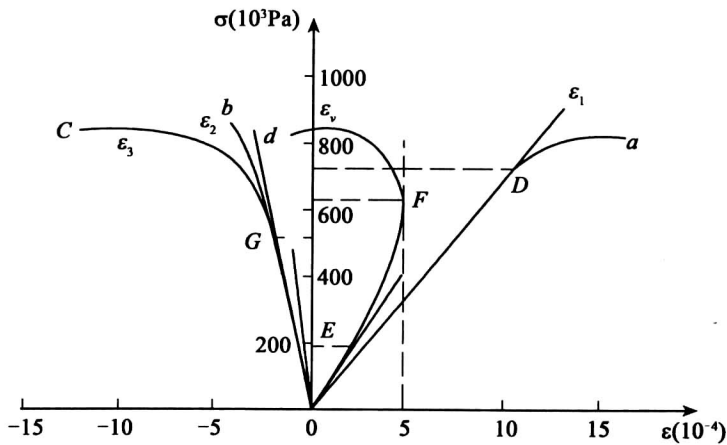


图 2-44 岩石的体积应变曲线

2.4.2.2 影响岩石应力-应变曲线的因素

试验证明,影响岩石应力-应变的因素较多,如试件尺寸、边界条件、加载速率、温度、围压、各向异性等。下面简单介绍一些主要因素。

1. 加载速率

进行单轴压缩试验时,施加荷载的速率对岩石的变形性质有明显影响。加载速率越快,测得的弹性模量越大;加载速率越慢,测得弹性模量越小,峰值应力越不显著。岩石与混凝土

土有着类似的变形性质。

2. 温度

温度对于岩石的变形有较大影响。根据研究,在室温时表现为脆性的岩石,在较高温度时可以产生较大的永久变形。图 2-45 为花岗岩在不同温度时的应力-应变曲线。这一问题在地质学和地球物理学中具有重大意义,工程建设中遇到的岩石温度变化幅度甚小,一般可以不去考虑。

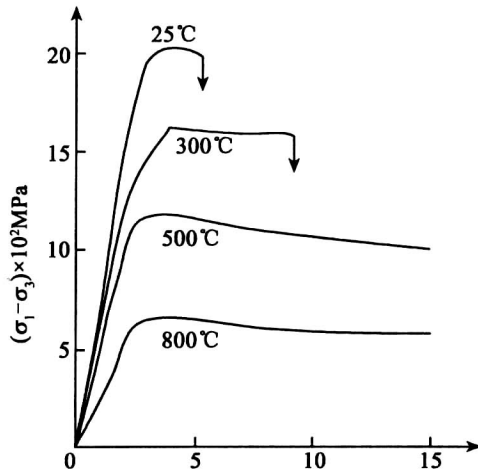


图 2-45 侧限压力为 500MPa 时的花岗岩在不同温度下的应力-应变曲线

3. 各向异性

由于岩石内有层理或者在某一方向内的节理特别发育,所以即使对于同一种岩石来说,它们的弹性模量和泊松比也是随着其方向的不同而异的,这就是岩石的变形各向异性,这对有些沉积岩表现得特别显著。

2.5 岩体的基本力学性质

2.5.1 岩体结构面力学特征

2.5.1.1 结构面的自然特征

结构面成因复杂,而后又经历了不同性质、不同时期构造运动的改造,造成了结构面自然特性各不相同。例如,有的结构面在后期构造运动中受到影响,改变了原来结构面的开闭状态、充填物质的性状及结构面的形态和粗糙度等;有的结构面由于后期岩浆注入或淋水作用形成的方解石脉网络等,使其黏聚力有所增加;而有的裂隙经过地下水的溶蚀作用而加宽,或充以气和水,或充填黏土物质,其黏聚力减小或完全丧失等。所有这些都决定着结构面的力学性质,也直接影响岩体的力学性质。因此,必须注意结构面现状的研究,才能进一步研究岩体受力后变形、破坏的规律。

1. 充填胶结特征

结构面的充填胶结可以分为无充填和有充填两类。

(1) 结构面之间无充填: 处于闭合状态, 岩块之间接合较为紧密, 可认为是刚性接触。结构面的强度与结构面两侧岩石的力学性质和结构面的形态及粗糙度有关。

(2) 结构面之间有充填: 首先要看充填物的成分, 若是硅质、铁质、钙质以及部分岩脉充填胶结结构面, 其强度经常不低于岩体的强度, 因此, 这种结构面就不属于弱面的范围。我们要讨论的是结构面的胶结充填物使结构面的强度低于岩体的强度的情况。就充填物的成分来说, 以黏土充填, 特别是充填物中含不良矿物, 如蒙脱石、高岭石、绿泥石、绢云母、蛇纹石、滑石等较多时, 其力学性质最差; 含非润滑性质矿物, 如石英和方解石时, 其力学性质较好。充填物的粒度成分对结构面的强度也有影响, 粗颗粒含量越高, 力学性能越好; 细颗粒含量越多, 则力学性能越差。充填物的厚度对结构面的力学性质有明显的影响, 可分为如下四类:

① 薄膜充填: 结构面侧壁附着一层 2mm 以下的薄膜, 由风化矿物和应力矿物等组成, 如黏土矿物、绿泥石、绿帘石、蛇纹石、滑石等。但由于充填矿物性质不良, 虽然很薄, 也明显地降低结构面的强度。

② 断续充填: 充填物结构面不连续, 且厚度多小于结构面的起伏差, 其力学强度取决于充填物的物质组成、结构面的形态及侧壁岩石的力学性质。

③ 连续充填: 充填物结构面连续, 厚度稍大于结构面的起伏差, 其强度取决于充填物的物质组成及侧壁岩石的力学性质。

④ 厚层充填: 充填物厚度大, 一般可达数十厘米至数米, 形成一个软弱带。它在岩体失稳的事例中, 有时表现为岩体沿接触面的滑移, 有时则表现为软弱带本身的塑性破坏。

2. 形态特征

结构面在三维空间展布的几何属性称结构面的形态, 是地质营力作用下地质体发生变形、破坏遗留下来的产物。结构面的几何形态可归纳为下列四种(图 2-46):

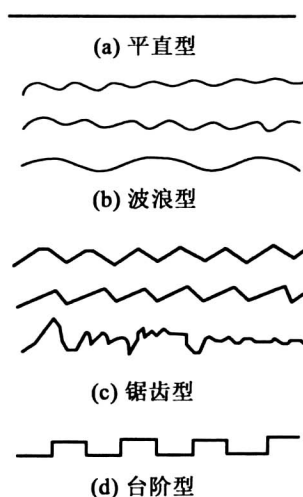


图 2-46 结构面的几何形态图

(1) 平直型: 变形、破坏取决于结构面上的粗糙度、充填物质成分、侧壁岩体风化的程度等, 包括一般层面、片理、原生节理及剪切破裂面等。

(2) 波浪型: 变形、破坏取决于起伏角、起伏幅度、岩土力学性质、充填情况等, 包括波状的层理, 轻度揉曲的片理、沿走向和倾向方向上均呈缓波状的压性、压剪性结构面等。

(3) 锯齿型: 变形、破坏取决于的条件基本与波浪型相同, 包括张性、张剪性结构面, 具有交错层理和龟裂纹的层面, 也包括一般裂隙而发育的次生结构面、沉积间断面等。

(4) 台阶型: 变形、破坏取决于岩石的力学性质等, 包括地堑、地垒式构造等。这类结构面的起伏角为 90° , 多是经层间错动后经断层而成。

研究结构面的形态, 主要是研究其凹凸度与强度的关系。根据规模大小, 可分为两级 (图 2-47); 第一级凹凸度称为起伏度; 第二级凹凸度称为粗糙度。岩体沿结构面发生剪切破坏时, 第一级的凸出部分可能被剪断或不被剪断, 这两种情况均增大结构面的抗剪强度。增大状况与起伏角和岩石性质有关, 起伏角 i 越大, 结构面的抗剪强度也越大。

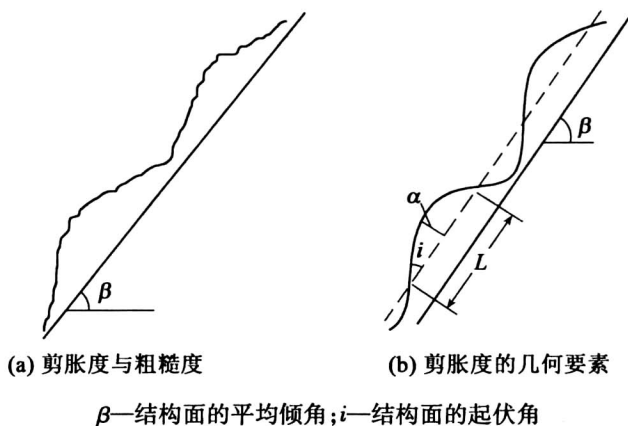


图 2-47 结构面的凹凸度

另外, 起伏角的大小也可以表示出前述的结构面的三种几何形态: $i = 0^\circ$ 时, 结构面为平直型; $i = 10 \sim 20^\circ$ 时, 结构面为波浪型; i 更大时, 结构面变为锯齿型。

第二级凹凸度即粗糙度, 反映面上普遍微量的凹凸不平状态。对结构面来讲, 一般可分为极粗糙、粗糙、一般、光滑、镜面五个等级。沉积间断面、张性和张剪性的构造结构面和次生结构面等属于极粗糙和粗糙; 一般层面、冷凝原生节理、一般片理等属于第三种; 绢云母片状集合体所造成的片理、板理, 一般压性、剪性、压剪性构造结构面均属于光滑一类; 而许多压性、压剪性、剪性构造结构面, 由于剧烈的剪切滑移运动, 往往可以造成光滑的镜面, 这种状况则属于最后一种。

3. 结构面的空间分布

结构面在空间的分布大体是指结构面的产状及其变化、结构面的延展性、结构面密集的程度、结构面空间组合关系等。

(1) 结构面的产状及其变化是指结构面的走向与倾向及其变化。

(2) 结构面的延展性是指结构面在某一方向上的连续性或结构面连续段长短的程度。由于结构面的长短是相对于岩体尺寸而言的,因而它与岩体尺寸密切相关。按结构面的延展特性,可分为三种类型(图 2-48):非贯通、半贯通及贯通。

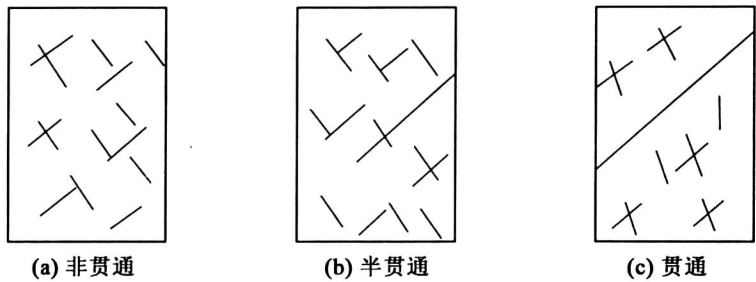


图 2-48 岩体内结构面贯通性类型

结构面的延展性可以用切割度 X_c 表示,切割度说明结构面在岩体中分离的程度。假设有一平直的断面,它与考虑的结构面重叠而且完全横贯所考虑的岩体,令其面积为 A ,则结构面的面积 a 与它之间的比率,即切割度为

$$X_c = \frac{a}{A} \tag{2-48}$$

切割度一般以百分数表示。另外,切割度也可以说明岩体连续性的好坏, X_c 越小,则岩体连续性越好;反之,则越差。

岩体中经常出现成组的平行结构面,同一切割面上出现的结构面面积为 $a_1、a_2、a_3$,则

$$X_c = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{A} = \frac{\sum a_i}{A} \tag{2-49}$$

按切割度 X_c 值的大小可将岩体分类,见表 2-1。

表 2-1 岩体按切割度 X_c 分类表

名称	X_c (%)
完整的	10 ~ 20
弱节理化	20 ~ 40
中等节理化	40 ~ 60
强节理化	60 ~ 80
完全节理化	80 ~ 100

(3) 结构面密度,是指岩体中结构面发育的程度,它可以用结构面的线密度、间距或体密度表示。

① 结构面的线密度 A :是指同一组结构面沿着法线方向,单位长度上结构面的数目。如

l 为在法线上量测的长度, n 为 l 长度内出现的结构面的数目, 则

$$k = \frac{n}{l} \tag{2-50}$$

当岩体上有几组结构面时, 测线上的线密度为各级线密度之和, 即

$$k = k_a + k_b + \cdots \tag{2-51}$$

实际测定结构面的线密度时, 测线的长度可为 20 ~ 50m。如果测线不可能沿结构面法线方向布置, 则应使测线水平, 并与结构面走向垂直。此时, 如实际测线长度为 L , 结构面的倾角为 α , 则

$$k = \frac{n}{L \sin \alpha} \tag{2-52}$$

②结构面间距: 是指同一组结构面在法线方向上, 该组结构面的平均间距, 如以 d 表示, 则

$$d = \frac{l}{n} = \frac{1}{k} \tag{2-53}$$

即结构面的间距为线密度的倒数。

Watkins (1970) 对结构面 (不连续面) 进行的分类, 见表 2-2。

表 2-2 结构面间距的分类表

描述		间距 (mm)
层理	节理	
薄页的	破碎的	<6
页状的	破裂的	6 ~ 20
非常薄的	非常密集的	20 ~ 60
薄的	密集的	60 ~ 200
中等的	中等密集的	200 ~ 600
厚的	稀疏的	600 ~ 2000
极厚的	极稀疏的	>2000

结构面的间距主要根据岩土力学性质、原生状况、构造及次生作用、岩体所处位置等情况决定。

③结构面的张开度: 是指结构面裂口开口处张开的程度。一般说来, 在相同边界条件受力的情况下, 岩石越硬, 结构面的间距越大, 张开度也越大。

张开度还可说明岩体的“松散度”和岩体的水力学特征。总体而言, 结构面张开度越大, 岩体将越“松散”, 是地下水的良好通道。

2.5.1.2 结构面的力学性质

结构面的力学性质主要包括变形性质 (法向变形、剪切变形) 与强度性质 (抗压强度、抗剪强度)。

1. 法向变形

(1) 压缩变形。在法向荷载作用下,粗糙结构面的接触面积和接触点数随荷载增大而增加,结构面间隙呈非线性减小,应力与法向变形之间成指数关系(图 2-49)。这种非线性力学行为归结于接触微凸体弹性变形、压碎和间接拉裂隙的产生,以及新的接触点、接触面积的增加。当荷载去除时,将引起明显的后滞和非弹性效应。Goodman(1974)通过试验,得出法向应力 σ_n 与结构面闭合量 δ_n 有如下关系:

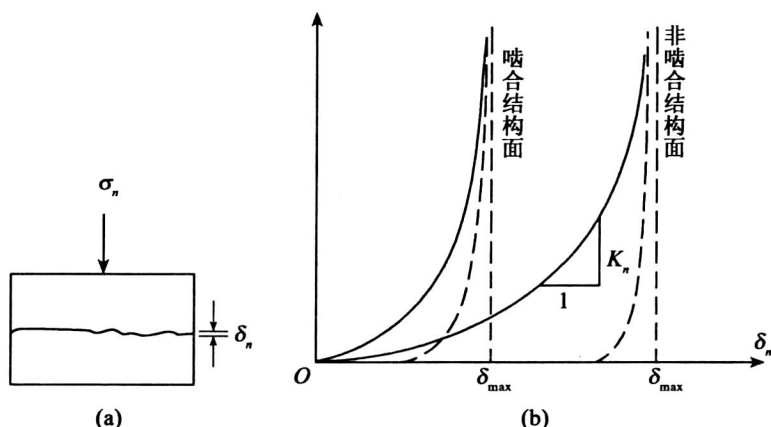


图 2-49 结构面法向变形曲线

$$\frac{\sigma_n - \xi}{\xi} = s \left(\frac{\delta_n}{\delta_{\max} - \delta_n} \right)^t \quad (2-54)$$

式中, ξ 为原位应力,由测量结构面法向变形的初始条件决定; δ_{\max} 为最大可能的闭合量; s, t 为与结构面几何特征、岩土力学性质有关的两个参数。

图 2-49 中, K_n 称为法向变形刚度,反映结构面产生单位法向变形的法向应力梯度,它不仅取决于岩石本身的力学性质,更取决于粗糙结构面接触点数、接触面积和结构面两侧微凸体相互啮合程度。通常情况下,法向变形刚度不是一个常数,与应力水平有关。根据 Goodman(1974)的研究,法向变形刚度可由下式表达:

$$K_n = K_{n0} \left(\frac{K_{n0} \delta_{\max} + \delta_n}{K_{n0} \delta_{\max}} \right)^2 \quad (2-55)$$

式中, K_{n0} 是结构面的初始刚度。

Bandis 等人(1984)通过对大量的天然、不同风化程度和表面粗糙程度的非充填结构面的试验研究,提出双曲线型法向应力 σ_n 与法向变形 δ_n 的关系式为

$$\sigma_n = \frac{\delta_n}{a - b\delta_n} \quad (2-56)$$

式中, a, b 是常数。

显然,当法向应力 $\sigma_n \rightarrow \infty$, $a/b = \delta_{\max}$ 时,从上式可推导出法向刚度的表达式为

$$K_n = \frac{\partial \sigma_n}{\partial \delta_n} = \frac{1}{(a - b\delta_n)^2} \quad (2-57)$$

Bandis 等人(1983)结合双曲线型加卸载曲线,将有效法向应力、结构面闭合量和表面粗糙性联系在一起,得出法向刚度的经验公式:

$$K_n = K_{n0} \left(1 - \frac{\delta_n}{K_{n0} \delta_{\max} + \delta_n} \right)^{-2} \quad (2-58)$$

式中, K_{n0} 、 δ_{\max} 分别是结构面的初始法向刚度和最大闭合量,并由以下公式给出:

$$K_{n0} = 0.02 \left(\frac{JCS}{\delta_{n0}} \right) + 1.75JRC - 7.15 \quad (2-59)$$

$$\delta_{\max} = A + B(JRC) - C \left(\frac{JCS}{\delta_{n0}} \right)^D \quad (2-60)$$

式中, JCS 为结构面的抗压强度; JRC 为结构面的粗糙性系数(图 2-45); δ_{n0} 为每次加载或卸载开始时结构面的张开度; A, B, C, D 为常数,取决于结构面受力历史。

(2) 拉伸变形。图 2-50 为结构面受压受拉变形状况的全过程曲线,即结构面法向应力-应变关系曲线。若结构面受有初始应力 σ_0 ,受压时向左侧移动,其图形与前述相同;若结构面受拉,曲线沿着纵坐标右侧向上与横坐标相交时,表明拉力与初始应力相抵消,拉力继续加大至抗拉强度 σ_t 时(如开挖基坑),结构面失去抵抗能力,曲线迅速降至横坐标,以后张开没有拉力,曲线沿横坐标向右延伸。因此,一般计算中不允许岩石受拉,遵循所谓的“无拉力准则”。

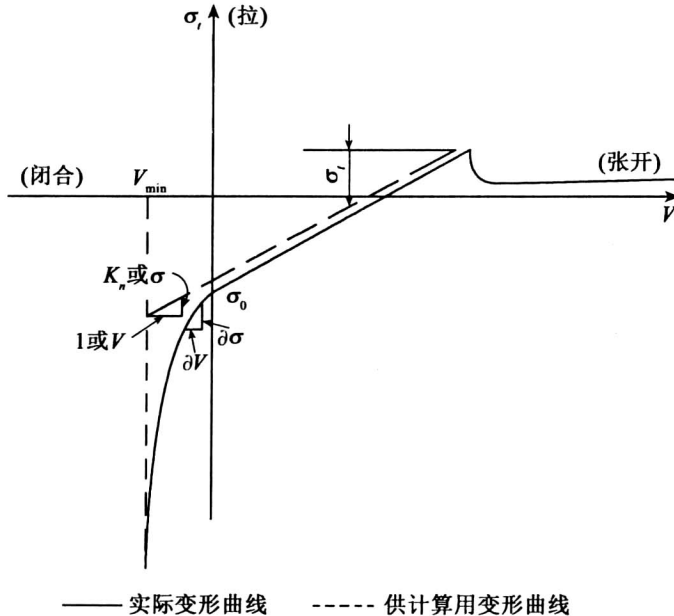


图 2-50 结构面法向应力-应变关系曲线

2. 剪切变形

在一定法向应力作用下,结构面在剪切作用下产生切向变形。通常有两种基本形式:

(1) 对非充填粗糙结构面,随剪切变形发生,剪切应力相对上升较快,当达到剪应力峰

值后,结构面抗剪能力出现较大的下降,并产生不规则的峰后变形(图2-51(b)中A曲线)或滞滑现象。

(2)对于平坦(或有充填物)的结构面,初始阶段的剪切变形曲线呈下凹型,随剪切变形的持续发展,剪切应力逐渐升高但没有明显的峰值出现,最终达到恒定值,有时也出现剪切硬化(图2-51(b)中B曲线)。

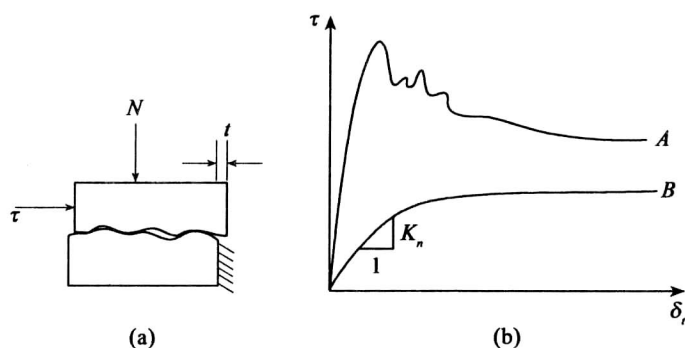


图 2-51 结构面的剪切变形曲线

剪切变形曲线从形式上可划分为弹性区、剪应力峰值区和塑性区(Goodman, 1974)。在结构面剪切过程中,伴随有微凸体的弹性变形、劈裂、磨粒的产生与迁移、结构面的相对错动等多种力学过程。因此,剪切变形一般是不可恢复的,即便在弹性区,剪切变形也不可能完全恢复。

通常将弹性区单位变形内的应力梯度称为剪切刚度 K_t , 即

$$K_t = \frac{\partial \tau}{\partial \delta_i} \quad (2-61)$$

根据(Goodman, 1974)研究,剪切刚度 K_t 可以由下式表示:

$$K_t = K_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_i} \right) \quad (2-62)$$

式中, K_0 为初始剪切刚度; τ_i 为产生较大剪切位移时的剪应力渐近值。

试验结果表明,对于较坚硬的结构面,剪切刚度一般是常数;对于松软结构面,剪切刚度随法向应力的大小改变。

对于凹凸不平的结构面,可简化成图2-52(a)所示的力学模型。受剪切结构面上有凸台,凸台角为 i ,模型上半部作用有剪切力 S 和法向力 N ,模型下半部固定不动。在剪应力作用下,模型上半部沿凸台斜面滑动,除有切向运动外,还产生向上的移动。这种剪切过程中产生的法向移动分量称为剪胀。在剪切变形过程中,剪力与法向力的复合作用,可能使凸台剪断或拉破坏,此时剪胀现象消失(图2-52(b))。当法向应力较大或结构面强度较小时, S 持续增加,使凸台沿根部剪断或拉破坏,结构面剪切过程中没有明显的剪胀(图2-52(c))。从这个模型可看出,结构面的剪切变形与岩石强度、结构面粗糙性和法向应力有关。

(3)当结构面内充填物的厚度小于主力凸台高度时,结构面的抗剪性能与非充填时的

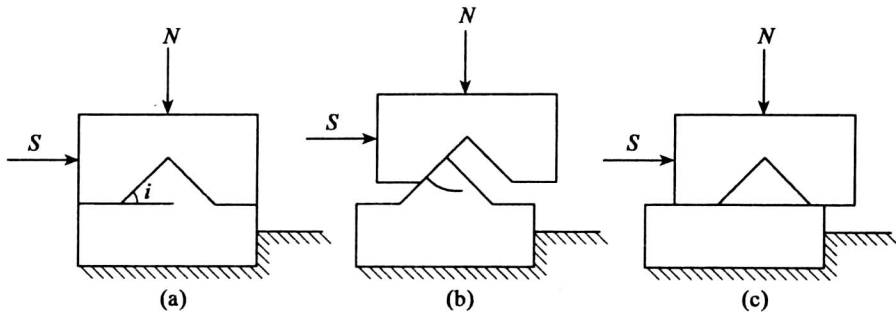


图 2-52 结构面的剪切力学模型

力学特性相类似。当充填厚度大于主力凸台高度时,结构面的抗剪强度取决于充填材料。充填物的厚度、颗粒大小与级配、矿物组分和含水程度都会对充填结构面的力学性质有不同程度的影响。

①夹层厚度的影响。试验结果表明,结构面抗剪强度随夹层厚度增加迅速降低,并且与法向应力的大小有关。

②矿物颗粒的影响。充填材料的颗粒直径为 2 ~ 30mm 时,抗剪强度随颗粒直径的增大而增加,但颗粒直径超过 30mm 后,抗剪强度变化不大。

③含水量的影响。由于水对泥夹层的软化作用,含水量的增加使泥质矿物内聚力和结构面的法向刚度和剪切刚度大幅度下降。暴雨引发岩体滑坡事故正是由于结构面含水量剧增的缘故,因此,水对岩体稳定性的影响不可忽视。

3. 抗剪强度

结构面最重要的力学性质之一是抗剪强度。从结构面的变形分析可以看出,结构面在剪切过程中的力学机制比较复杂,构成结构面抗剪强度的因素是多方面的,大量试验结果表明,结构面强度一般可以通过库仑准则表述,即

$$\tau = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (2-63)$$

式中, c, φ 为结构面上的黏结力和摩擦角; σ_n 为作用在结构面上的法向应力。

摩擦角可表示为 $\varphi = \varphi_b + i$, φ_b 是岩石平坦表面基本摩擦角, i 是结构面上凸台斜坡角。

图 2-53 为上面凸台模型的剪力与法向力的关系曲线,它近似呈直线的特征。结构面受剪初期,剪切力上升较快;随剪力和剪切变形增加,结构面上部分凸台被剪断,此后剪切力上升梯度变小,直至达到峰值抗剪强度。

试验表明,低法向应力时,结构面有剪切位移和剪胀;高法向应力时,凸台剪断,结构面抗剪强度最终变成残余抗剪强度。在剪切过程中,凸台起伏形成的粗糙度以及岩石强度对结构面的抗剪强度起着重要作用。考虑到上述三个基本因素(法向应力、粗糙度、结构面抗压强度)的影响, Barton 和 Choubey (1977) 提出结构面的抗剪强度公式:

$$\tau = \sigma_n \tan \left(\text{JRC} \log \frac{\text{JCS}}{\sigma_n} + \varphi_b \right) \quad (2-64)$$

式中: JCS 为结构面的抗压强度; φ_b 为岩石表面基本摩擦角; JRC 为结构面粗糙性系数。

图 2-54 是 Barton 和 Choubey (1976) 给出的 10 种典型剖面, JRC 值根据结构面的粗糙

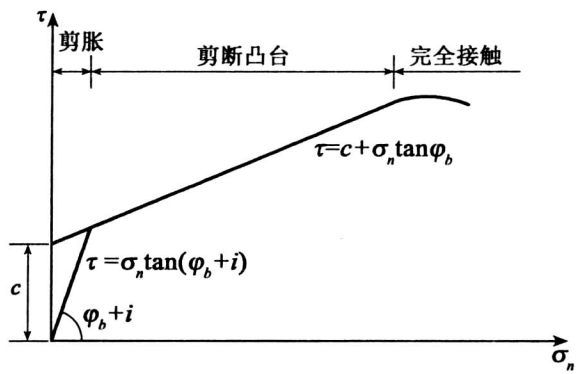


图 2-53 凸台模型的剪力与法向力的关系曲线

性在 0 ~ 20 间变化,平坦近平滑的结构面为 5,平坦起伏结构面为 10,粗糙起伏结构面为 20。

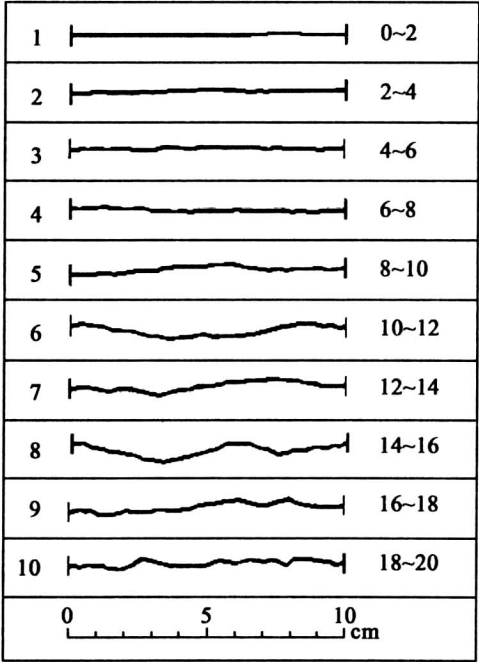


图 2-54 典型 JRC 剖面

JRC 值通过直剪试验或简单倾斜拉滑试验得出的峰值剪切强度和基本摩擦角反算,即

$$\text{JRC} = \frac{\varphi_p - \varphi_b}{\log \frac{\text{JCS}}{\sigma_n}} \tag{2-65}$$

式中,峰值剪切角 $\varphi_p = \arctan(\tau_p / \sigma_n)$ 或等于倾斜试验中岩块产生滑移时的倾角。

对于具体的结构面,可以对照 JRC 典型剖面目测确定 JRC 值。

为了克服目测确定结构面 JRC 值的主观性以及由试验反算确定 JRC 值的不便,近年来国内外学者提出应用分形几何方法描述结构面的粗糙程度。

2.5.1.3 影响结构面力学性质的因素

1. 尺寸效应

结构面的力学性质具有尺寸效应。Barton 和 Bandis(1982)用不同尺寸的结构面进行了试验,研究表明:当结构面的试块长度从 5~6cm 增加到 36~40cm 时,平均峰值摩擦角降低 8~12 度。随试块面积的增加,平均峰值剪应力呈减小趋势。结构面的尺寸效应还体现在以下几个方面:

- (1)随着结构面尺寸的增大,达到峰值强度的位移量增大;
- (2)随着尺寸的增加,剪切破坏形式由脆性破坏向延性破坏转化;
- (3)尺寸加大,峰值剪胀角减小;
- (4)随结构面粗糙度减小,尺寸效应也减小。

结构面的尺寸效应在一定程度上与表面凸台受剪破坏有关。对试验过的结构面观察发现,大尺寸结构面真正接触点数很少,但接触面积大;小尺寸结构面接触点数多,而每个点的接触面积都较小。前者只是将最大的凸台剪断了。研究还发现,结构面强度 JCS 与试件的尺寸成反比,结构面的强度与峰值剪胀角是引起尺寸效应的基本因素。对于不同尺寸的结构面,这两种因素在抗剪阻力中所占的比重不同:小尺寸结构面凸台破坏和峰值剪胀角所占比重均高于大尺寸结构面。当法向应力增大时,结构面尺寸效应将随之减小。

2. 前期变形历史

自然界中结构面在形成过程中和形成以后,大多经历过位移变形。结构面的抗剪强度与变形历史密切相关,即新鲜结构面的抗剪强度明显高于受过剪切作用的结构面的抗剪强度。Jaeger 的试验表明,当第一次进行新鲜结构面剪切试验时,试样具有很高的抗剪强度。沿同一方向重复进行到第 7 次剪切试验时,试样还保留峰值与残余值的区别,当进行到第 15 次时,已看不出峰值与残余值的区别。这说明在重复剪切过程中,结构面上凸台被剪断、磨损,岩粒、碎屑的产生与迁移,使结构面的抗剪力学行为逐渐由凸台粗糙度和起伏度所控制转化为由结构面上碎屑的力学性质所控制。

3. 后期充填性质

结构面在长期地质环境中,由于风化或分解,被水带入的泥沙以及构造运动时产生的碎屑和岩溶产物充填。

在岩土工程经常遇到岩体软弱夹层和断层破碎带,它的存在常导致岩体滑坡和隧道坍塌,这也是岩土工程治理的重点。软弱夹层力学性质与其岩性矿物成分密切相关,其中以泥化物对软弱结构面的弱化程度最为显著。同时,矿物粒度的大小分布也是控制变形与强度的主要因素。

已有研究表明,泥化物中有大量的亲水性黏土矿物,一般水稳定性都比较差,对岩体的力学性质有显著影响。一般来说,主要黏土矿物影响岩体力学性能的大小顺序是:蒙脱石<伊利石<高岭石。表 2-3 汇总了不同类型软弱夹层的力学性能,从表中可以看出,软弱结构面抗剪强度随碎屑成分与颗粒尺寸的增大而提高,随黏粒含量的增加而降低。

表 2-3 夹层物质成分对结构面抗剪强度的影响

软弱夹层物质成分	摩擦系数	黏结力 (MPa)
泥化夹层和夹泥层	0.15 ~ 0.25	0.005 ~ 0.02
破碎夹泥层	0.3 ~ 0.4	0.02 ~ 0.04
破碎夹层	0.5 ~ 0.6	0 ~ 0.1
含铁锰质角砾破碎夹层	0.65 ~ 0.85	0.03 ~ 0.15

另外,泥化夹层具有时效性,在恒定荷载下会产生蠕变变形。一般认为,充填结构面长期抗剪强度比瞬时强度低 15% ~ 20%,泥化夹层的长期强度与瞬时抗剪强度之比为 0.67 ~ 0.81,此比值随黏粒含量的降低和砾粒含量的增多而增大。在抗剪参数中,泥化夹层的时效主要表现在 c 值的降低,对摩擦角的影响较小。因为软弱夹层的存在表现出时效性,必须注意岩体长期极限强度的变化和预测,保证岩体的长期稳定性。

2.5.2 岩体的变形

岩体变形是评价工程岩体稳定性的重要指标,也是岩体工程设计的基本准则之一。例如,在修建拱坝和有压隧洞时,除研究岩体的强度外,还必须研究岩体的变形性能。当岩体中各部分的变形性能差别较大时,将会在建筑物结构中引起附加应力;或者虽然各部分岩体变形性质差别不大,但如果岩体软弱,抗变形性能差时,将会使建筑物产生过量的变形等,这些都会导致工程建筑物破坏或无法使用。

由于岩体中存在大量的结构面,结构面中还往往有各种充填物。因此,在受力条件改变时,岩体的变形是岩块材料变形和结构变形的总和,而结构变形通常包括结构面闭合、充填物压密及结构体转动和滑动等变形。在一般情况下,岩体的结构变形起着控制作用。目前,岩体的变形性质主要通过原位岩体变形试验进行研究。

2.5.2.1 岩体变形试验

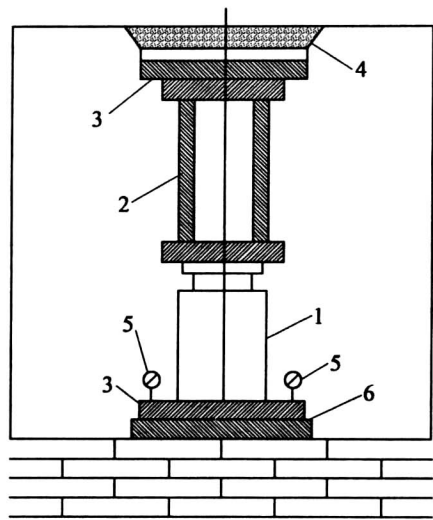
岩体变形试验按施加荷载作用方向,可分为:

- (1) 法向变形试验:承压板法、狭缝法、单、双和三轴压缩试验、环形试验;
- (2) 切向变形试验:倾斜剪切仪、挖试洞等。

按其原理和方法不同可分为静力法和动力法两种。静力法的基本原理:在选定的岩体表面、槽壁或钻孔壁面上施加法向荷载,并测定其岩体的变形值,然后绘制出压力-变形关系曲线,计算出岩体的变形参数。根据试验方法不同,静力法又可分为承压板法、钻孔变形法、狭缝法、水压洞室法及单(双)轴压缩试验法等。动力法是用人工方法对岩体发射弹性波(声波或地震波),并测定其在岩体中的传播速度,然后根据波动理论求岩体的变形参数。根据弹性波激发方式的不同,又分为声波法和地震波法两种。

1. 承压板法

按承压板的刚度不同,可分为刚性承压板法和柔性承压板法两种。刚性承压法试验通常是在平巷中进行,其装置如图 2-55 所示。先在选择好的具代表性的岩面上清除浮石,平整岩面;然后依次装上承压板、千斤顶、传力柱和变形量表等;将硐顶作为反力装置,通过油压千斤顶对岩面施加荷载,并用百分表测记岩体变形值。



1—千斤顶;2—传力柱;3—钢板;4—混凝土顶板;5—百分表;6—承压板
图 2-55 承压板变形试验装置示意图

试验点的选择应具有代表性,并避开大的断层及破碎带。受荷面积可视岩体裂隙发育情况及加荷设备的供力大小而定,一般以 $0.25 \sim 1.0\text{m}^2$ 为宜。承压板尺寸与受荷面积相同并具有足够的刚度。试验时,先将预定的最大荷载分为若干级,采用逐级一次循环法加压。在加压过程中,同时测记各级压力(p)下的岩体变形值(W),绘制 p - W 曲线(图 2-56)。通过某级压力下的变形值,用布西涅斯克公式计算岩体的变形模量 E_m (MPa) 和弹性模量 E_{me} (MPa),即

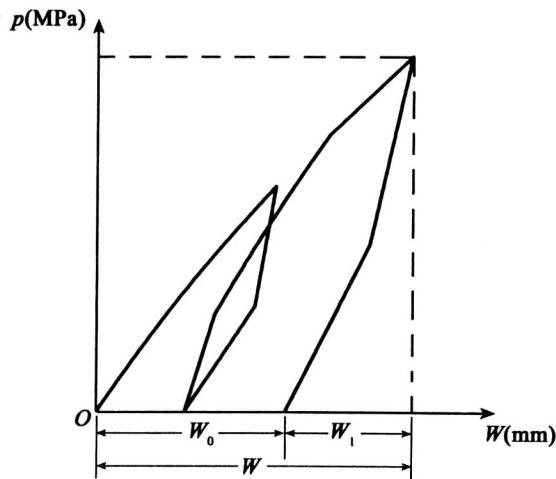


图 2-56 岩体 p - W 曲线

$$E_m = \frac{pD(1-\mu_m^2)\omega}{W} \quad (2-66)$$

$$E_{me} = \frac{pD(1-\mu_m^2)\omega}{W_e} \quad (2-67)$$

式中, p 为承压板单位面积上的压力, MPa; D 为承压板的直径或边长, cm; W 、 W_e 为相应于 p 下的岩体总变形和弹性变形, cm; ω 为与承压板形状与刚度有关的系数, 对圆形板 $\omega=0.785$, 对方形板 $\omega=0.886$; μ_m 为岩体的泊松比。

试验中如用柔性承压板, 则岩体的变形模量应按柔性承压板公式进行计算。

2. 钻孔变形法

钻孔变形法是利用钻孔膨胀计等设备, 通过水泵对一定长度的钻孔壁施加均匀的径向荷载(图 2-57), 同时测记各级压力下的径向变形(U)。利用厚壁筒理论可推导出岩体的变形模量 E_m (MPa) 与 U 的关系为

$$E_m = \frac{dp(1+\mu_m)}{U} \quad (2-68)$$

式中, d 为钻孔孔径(cm); p 为计算压力(MPa); 其余符号意义同前。

与承压板法相比较, 钻孔变形试验有如下优点:

- (1) 对岩体扰动小;
- (2) 可以在地下水位以下和相当深的部位进行;
- (3) 试验方向基本上不受限制, 而且试验压力可以达到很大;
- (4) 在一次试验中可以同时量测几个方向的变形, 便于研究岩体的各向异性。

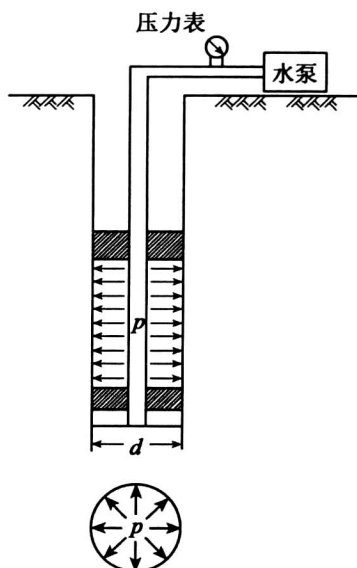
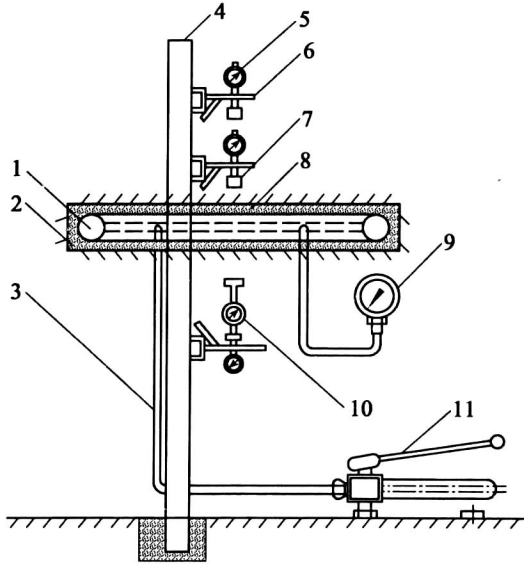


图 2-57 钻孔变形试验装置示意图

其主要缺点在于, 试验涉及的岩体体积小, 代表性受到局限。

3. 狭缝法

狭缝法又称狭缝扁千斤顶法,是在选定的岩体表面割槽,然后在槽内安装扁千斤顶(压力枕)进行试验(图 2-58)。试验时,利用油泵和扁千斤顶对槽壁岩体分级施加法向压力,同时利用百分表测记相应压力下的变形值 W_R 。岩体的变形模量 E_m (MPa)按下式计算:



1—扁千斤顶;2—槽壁;3—油管;4—测杆;5—百分表(绝对测量);6—磁性表架;7—测量标点;8—砂浆;
9—标准压力表;10—千分表(相对测量);11—油泵

图 2-58 狭缝法装置示意图

$$E_m = \frac{pl}{2W_R} [(1-\mu_m)(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) + (1+\mu_m)(\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \quad (2-69)$$

式中, p 为作用于槽壁上的压力, MPa; W_R 为量测点 A_1, A_2 的相对位移值 (cm), 如图 2-59 所示, $W_R = y_2 - y_1$ 。

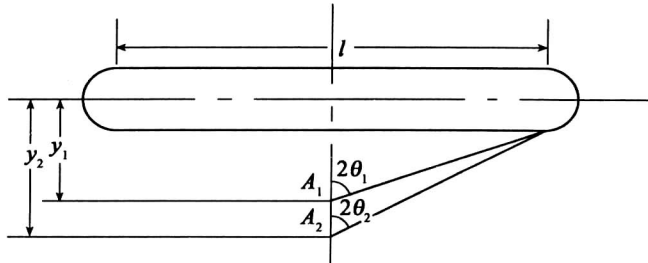


图 2-59 变形计算示意图

2.5.2.2 岩体变形参数估算

由于岩体变形试验费用昂贵、周期长,一般只在重要的或大型工程中进行。因此,人们企图用一些简单易行的方法估算岩体的变形参数。目前已提出的岩体变形参数估算方法有两种:一是在现场地质调查的基础上,建立适当的岩体地质力学模型,利用室内小试件试验资料估算;二是在岩体质量评价和大量试验资料的基础上,建立岩体分类指标与变形参数之间的经验关系,并用于变形参数估算。现简要介绍如下:

1. 层状岩体变形参数估算

层状岩体可概化为图 2-60(a) 所示的地质力学模型。假设各岩层厚度相等为 S , 且性质相同, 层面的张开度可忽略不计。根据室内试验成果, 设岩块的变形参数为 E, μ 和 G , 层面的变形参数为 K_n, K_s 。取 $n-t$ 坐标系, n 为垂直层面, t 为平行层面。在以上假定条件下取一由岩块和层面组成的单元体(图 2-60(b))来考察岩体的变形, 分几种情况讨论如下:

(1) 法向应力 σ_n 作用下的岩体变形参数。根据荷载作用方向又可分为沿 n 方向和 t 方向加 σ_n 两种情况。

沿 n 方向加荷时, 如图 2-60(b) 所示, 在 σ_n 作用下, 岩块和层面产生的法向变形分别为

$$\begin{aligned}\Delta V_i &= \frac{\sigma_n}{E} S \\ \Delta V_j &= \frac{\sigma_n}{K_n}\end{aligned}\quad (2-70)$$

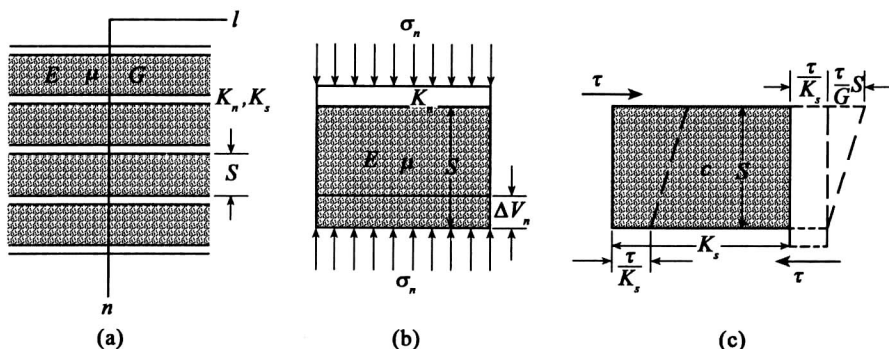


图 2-60 层状岩体地质力学模型及变形参数估算示意图

则岩体的总变形 ΔV_n 为

$$\Delta V_n = \Delta V_i + \Delta V_j = \frac{\sigma_n}{E} S + \frac{\sigma_n}{K_n} = \frac{\sigma_n}{E_{mn}} S \quad (2-71)$$

简化后, 得层状岩体垂直层面方向的变形模量 E_{mn} 为

$$\frac{1}{E_{mn}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{K_n} \quad (2-72)$$

假设岩块本身是各向同性的, 沿 n 方向加荷时, 由 t 方向的应变可求出岩体的泊松比 μ_{nr} 为

$$\mu_{mr} = \frac{E_{mn}}{E} \mu \quad (2-73)$$

沿 t 方向加荷时, 岩体的变形主要是岩块引起的, 因此岩体的变形模量 E_{mr} 和泊松比 μ_{mr} 为

$$\begin{aligned} E_{mr} &= E \\ \mu_{mr} &= \mu \end{aligned} \quad (2-74)$$

(2) 剪应力作用下的岩体变形参数。如图 2-60(c) 所示, 对岩体施加剪应力 τ 时, 则岩体剪切变形由沿层面滑动变形 Δu 和岩块的剪切变形组成 Δu_r , 组成, Δu 和 Δu_r 分别为

$$\begin{aligned} \Delta u_r &= \frac{\tau}{G} S \\ \Delta u &= \frac{\tau}{K_s} \end{aligned} \quad (2-75)$$

岩体的剪切变形 Δu_j 为

$$\Delta u_j = \Delta u + \Delta u_r = \frac{\tau}{K_s} + \frac{\tau}{G} S = \frac{\tau}{G_{mr}} S \quad (2-76)$$

简化后, 得岩体的剪切模量 G_{mr} 为

$$\frac{1}{G_{mr}} = \frac{1}{G} + \frac{1}{K_s} \quad (2-77)$$

由式(2-72) ~ 式(2-75), 可求出表征层状岩体变形性质的 5 个参数。

应当指出, 以上估算方法是在岩块和结构面的变形参数及各岩层厚度都为常数的情况下得出的, 当各层岩块和结构面变形参数及厚度都不相同时, 岩体变形参数的估算比较复杂。例如, 对式(2-72), 各层 K_n, E, S 都不相同时, 可采用当量变形模量的办法来处理, 方法是先按式(2-76)求出每一层岩体的变形模量 E_{mni} , 然后再按下式求层状岩体的当量变形模量 E'_{mn} 。

$$\frac{1}{E'_{mn}} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{E_{mni}} S \quad (2-78)$$

式中, S_i 为岩层的单层厚度; S 为岩体总厚度。

其他参数也可以用类似的方法进行处理, 具体可参考有关文献, 在此不详细讨论。

2. 裂隙岩体变形参数的估算

对于裂隙岩体, 国内外都特别重视建立岩体分类指标与变形模量之间的经验关系, 并用于推算岩体的变形模量, 下面介绍常用的几种。

(1) 比尼卫斯基(Bieniawski, 1978)研究了大量岩体变形模量实测资料, 建立了分类指标 RMR 值和变形模量 E_m (GPa) 间的统计关系如下:

$$E_m = 2\text{RMR} - 100 \quad (2-79)$$

上式只适用于 $\text{RMR} > 55$ 的岩体。为弥补这一不足, Serafim 和 Pereira(1983)根据收集到的资料以及 Bieniawski 的数据, 提出了适于 $\text{RMR} \leq 55$ 的岩体的关系式:

$$E_m = 10^{\frac{\text{RMR}-10}{40}} \quad (2-80)$$

(2) 挪威的 Bhasin 和 Barton 等人(1993)研究了岩体分类指标 Q 值、纵波速度 v_{mp} (m/s) 和岩体平均变形模量 E_{mean} (GPa) 间的关系, 提出了如下的经验关系:

$$v_{mp} = 100001gQ + 3500$$

$$E_{\text{mean}} = \frac{v_{mp} - 3500}{40} \quad (2-81)$$

利用式(2-81),已知 Q 值或 v_{mp} 时,即可求出岩体的变形模量。式(2-81)只适用于 $Q > 1$ 的岩体。

除以上方法外,也有人提出用声波测试资料估算岩体的变形模量。我国也有一些地区根据岩体质量情况由岩块参数直接折减成岩体参数。

2.5.2.3 岩体变形曲线

1. 法向变形曲线

按 p - W 曲线的形状和变形特征可分为图 2-61 所示的 4 类:

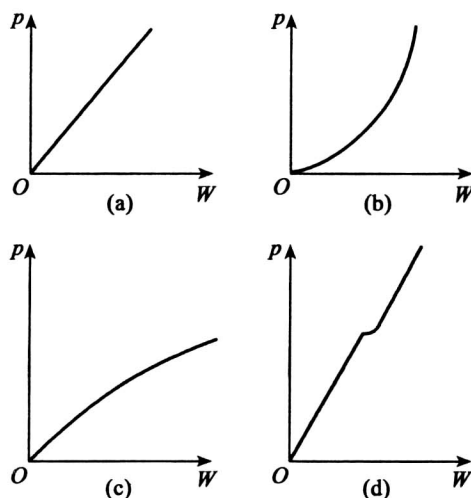


图 2-61 岩体变形类型

(1) 直线型。此类为一通过原点的直线(图 2-61(a)),其方程为 $p=f(W)$, $\frac{dp}{dW}=K$ (即岩体的刚度为常数),且 $\frac{d^2p}{dW^2}=0$,反映岩体在加压过程中 W 随 p 成正比增加。岩性均匀且结构面不发育或结构面分布均匀的岩体多呈这类曲线。根据 p - W 曲线的斜率大小及卸压曲线特征,这类曲线又可分为如下两类:

陡直线型,如图 2-62 所示,其特点是 p - W 曲线的斜率较陡,呈陡直线,说明岩体刚度大,不易变形。卸压后变形几乎恢复到原点,以弹性变形为主,反映出岩体接近于均质弹性体。较坚硬、完整、致密均匀、少裂隙的岩体,多具有这类曲线特征。

曲线斜率较缓,呈缓直线型,反映出岩体刚度低、易变形。卸压后,岩体变形只能部分恢复,有明显的塑性变形和回滞环(图 2-63)。这类曲线虽是直线,但不是弹性。出现这类曲线的岩体主要有由多组结构面切割,且分布较均匀的岩体及岩性较软弱面较均质的岩体;另外,平行层面加压的层状岩体,也多为缓直线型。

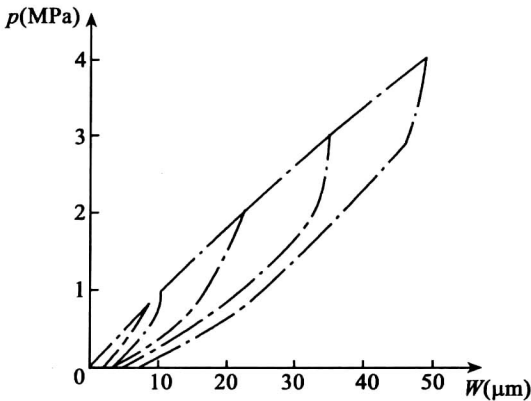


图 2-62 陡直线型曲线

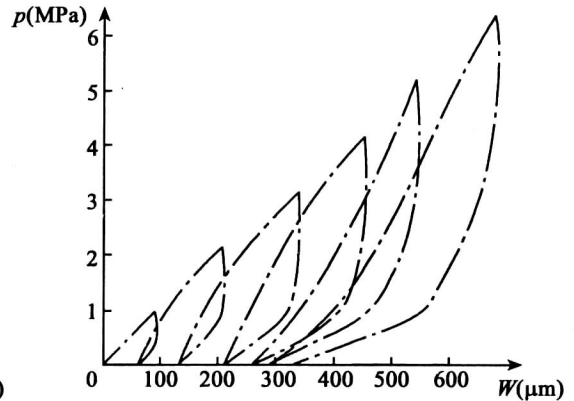
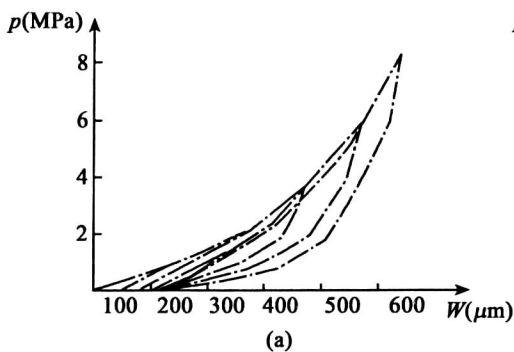


图 2-63 缓直线型曲线

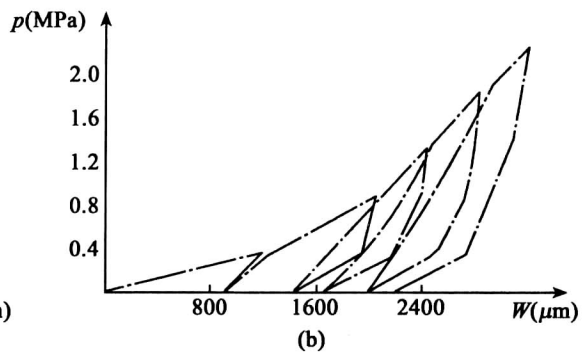
(2) 上凹型。曲线方程为 $p=f(W)$, $\frac{dp}{dW}$ 随 p 增大而递增, $\frac{dp}{dW} > 0$, 呈上凹型曲线(图 2-64 (b))。层状及节理岩体多呈这类曲线。据其加卸压曲线又可分为以下两种:

每次加压曲线的斜率随加、卸压循环次数的增加而增大, 即岩体刚度随循环次数增加而增大。各次卸压曲线相对较缓, 且相互近于平行。弹性变形 W_e 和总变形 W 之比随 p 的增大而增大, 说明岩体弹性变形成分较大(图 2-64(a))。这种曲线多出现于垂直层面加压的较坚硬层状岩体中。

加压曲线的变化情况与上相同, 但卸压曲线较陡, 说明卸压后变形大部分不能恢复, 为塑性变形(图 2-64(b))。存在软弱夹层的层状岩体及裂隙岩体常呈这类曲线。另外, 垂直层面加压的层状岩体也可出现这类曲线。



(a)



(b)

图 2-64 上凹型曲线

(3) 上凸型。这类曲线的方程为 $p=f(W)$, 随 p 增加而递减, $\frac{d^2p}{dW^2} < 0$, 呈上凸型曲线。结构面发育且有泥质充填的岩体, 较深处理藏有软弱夹层或岩性软弱的岩体(黏土岩、风化岩)等常呈这类曲线。

(4)复合型。 p - W 曲线呈阶梯或“S”形。结构面发育不均或岩性不均匀的岩体常呈此类曲线。

上述4类曲线依次称为弹性、弹-塑性、塑-弹性及塑-弹-塑性岩体。但岩体受压时的力学行为是十分复杂的,它包括岩块压密、结构面闭合、岩块沿结构面滑移或转动等;同时,受压边界条件又随压力增大而改变,因此,实际岩体的 p - W 曲线也是比较复杂的,应注意结合实际岩体地质条件加以分析。

2. 剪切变形曲线

原位岩体剪切试验研究表明,岩体的剪切变形曲线十分复杂。沿结构面剪切和剪断岩体的剪切曲线明显不同;沿平直光滑结构面和粗糙结构面剪切的剪切曲线也有差异。根据 τ - u 曲线的形状及残余强度 (τ_r) 与峰值强度 (τ_p) 的比值,可将岩体剪切变形曲线分为如图 2-65 所示的 3 类。

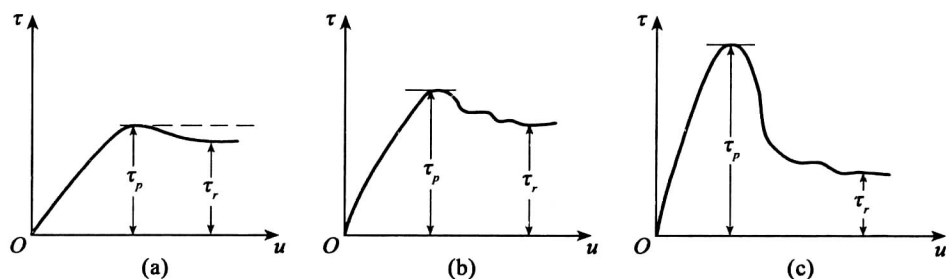


图 2-65 岩体剪切变形曲线类型示意图

(1)峰值前,变形曲线的平均斜率小,破坏位移大,一般可达 2~10mm;峰值后,随位移增大强度损失很小或不变, $\tau_r/\tau_p \approx 1.0 \sim 0.6$ 。沿软弱结构面剪切时,常属这类曲线(图 2-65(a))。

(2)峰值前,变形曲线平均斜率较大,峰值强度较高;峰值后,随剪位移增大强度损失较大,有较明显的应力降。 $\tau_r/\tau_p \approx 0.8 \sim 0.6$ 。沿粗糙结构面、软弱岩体及强风化岩体剪切时,多属这类曲线(图 2-65(b))。

(3)峰值前变形曲线斜率大,曲线具有较明显的线性段和非线性段,比例极限和屈服极限较易确定。峰值强度高,破坏位移小,一般约 1mm。峰值后,随位移增大强度迅速降低,残余强度较低, $\tau_r/\tau_p \approx 0.3 \sim 0.6$ 。剪断坚硬岩体时的变形曲线多属此类(图 2-65(c))。

2.5.2.4 影响岩体变形特性的主要因素

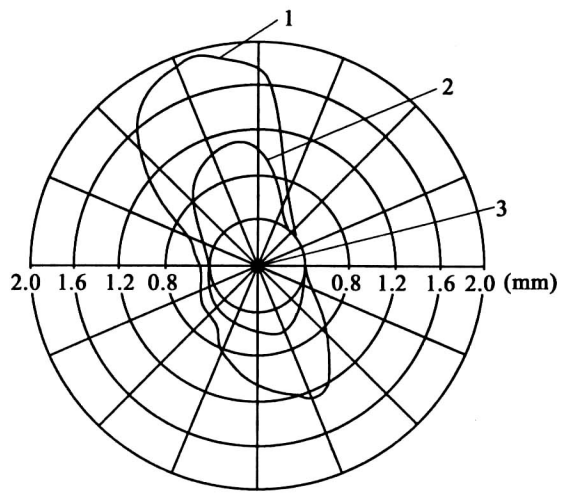
影响岩体变形性质的因素较多,主要包括组成岩体的岩性、结构面发育特征及荷载条件、试件尺寸、试验方法和温度等。

结构面的影响包括结构面方位、密度、充填特征及其组合关系等方面的影响,统称为结构面效应。

1. 结构面方位

主要表现在岩体变形随结构面及应力作用方向间夹角的不同而不同,即导致岩体变形的各向异性。这种影响在岩体中结构面组数较少时表现特别明显,而随结构面组数增多,反

而越来越不明显。图 2-66 所示为泥岩体变形与结构面产状间的关系,由图可见,无论是总变形或弹性变形,其最大值均发生在垂直结构面方向上,平行结构面方向的变形最小。另外,岩体的变形模量也具有明显的各向异性。一般来说,平行结构面方向的变形模量大于垂直方向的变形模量,其比值一般为 1.5 ~ 3.5。



1—总变形;2—弹性变形;3—结构面走向

图 2-66 硐室岩体径向变形与结构面产状关系(据肖树芳,1986)

2. 结构面的密度

主要表现在随结构面密度增大,岩体完整性变差,变形增大,变形模量减小。图 2-67 为

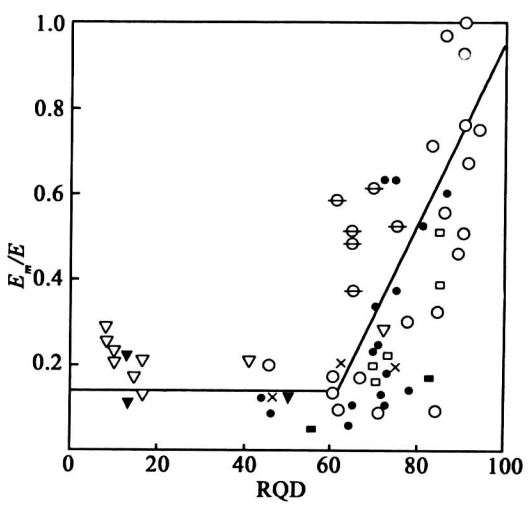


图 2-67 岩体 E_m/E 与 RQD 关系

岩体 E_m 与 RQD 值的关系,图中 E 为岩块的变形模量。由图可见,当岩体 RQD 值由 100 降至 65 时, E_m/E 迅速降低;当 $RQD < 65$ 时, E_m/E 变化不大,即当结构面密度大到一定程度时,对岩体变形的影响就不明显了。

3. 结构面的张开度及充填特征

它们对岩体的变形有明显的影晌。一般来说,张开度较大且无充填或充填较薄时,岩体变形较大,变形模量较小;反之,则岩体变形较小,变形模量较大。对于载荷的影响、尺度效应、温度、试验的系统误差问题方面的影响,与对岩石(岩块)变形试验影响基本上是一致的。

2.5.3 岩体的强度

2.5.3.1 节理岩体强度分析

岩体是由各种形状的岩块和结构面组成的地质体,因此其强度必然受到岩块和结构面强度及其组合方式(岩体结构)的控制。一般情况下,岩体的强度既不同于岩块的强度,也不同于结构面的强度,但是,如果岩体中结构面不发育,呈整体或完整结构时,则岩体的强度大致与岩块接近,可视为均质体;如果岩体将沿某一特定结构面的滑动破坏时,则其强度取决于结构面的强度。这是两极端情况,比较容易处理。困难的是节理裂隙切割的裂隙化岩体强度确定问题,其强度介于岩块与结构面强度之间。

岩体强度是指岩体抵抗外力破坏的能力,和岩块一样,也有抗压强度、抗拉强度和剪切强度之分。但对于节理裂隙岩体来说,抗拉强度很小,工程设计上一般不允许岩体中有拉应力出现。实际上,岩体抗拉强度测试技术难度大,目前对岩体抗拉强度的研究很少,因此,下面主要讨论的是岩体的抗压强度和剪切强度。

在实际工程中遇到均质岩体的情况不多,大多数情况岩体强度主要由结构面(不连续面)所决定。这些结构面各种各样,有的大到断层,有的小到裂隙和细微裂隙。一般而言,细微裂隙可在研究岩块强度性质时加以考虑,宽度大于 20mm 的结构面应当加以单独考虑,具体分析;其余的结构面则在研究岩体强度中考虑。这些结构面有的是单独出现或多条出现,有的是成组出现,有的有规律,有的无规律。这里,我们把成组出现的有规律的裂隙称为节理,其相应的岩体称为节理岩体。图 2-68 表示岩基、岩坡及地下洞室围岩中的结构面的典型分布情况,借以表明它们对岩体稳定的影响。

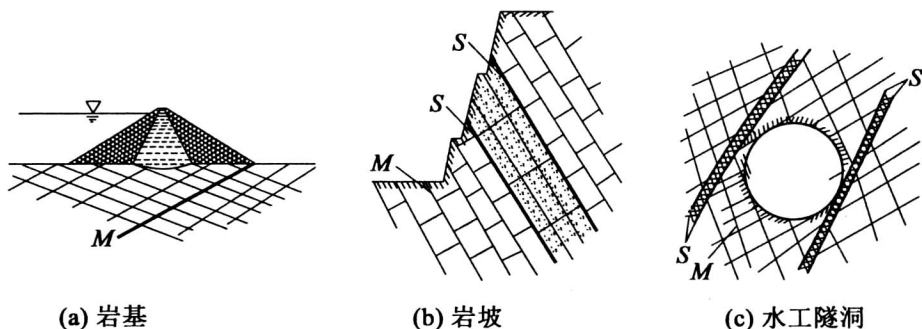


图 2-68 节理和其他结构面对岩体稳定性的影响

节理或其他结构面的强度指标都可以通过室内外的抗剪试验求得。目前,室内外用得较多的还是直剪试验。试验方法与一般岩石的试验没有什么不同,只是要求剪切面必需是节理面,试验结果的整理也同一般岩石强度试验,要求得出节理面的内摩擦角 φ_j 以及凝聚力 c_j 。求出节理面的强度指标后,就可根据节理面的产状来分析岩体的稳定性。

在均质岩体内,岩体破坏面与主应力面总是成一定的关系。当剪切时,破裂面与大主应力面(法线)成 $\alpha=45^\circ+\frac{\varphi}{2}$ 角。当拉断时,破裂面就是主应力面。可是,当有软弱结构面时情

况就不同了,当剪切破坏时,破裂面可能是 $45^\circ+\frac{\varphi}{2}$ 的面,但绝大多数情况下,破裂面就是软弱结构面(节理面)。在后一情况中,破裂面与主应力面的夹角就是软弱结构面与主应力面的夹角。在实践中,可能会遇到两种类型产状的节理面,一种是节理面与一个主应力面的法线相平行的,另一种是节理面与主应力面的法线斜交的。第一种情况属于平面问题,在进行应力分析时比较简单;第二种情况属于三维空间问题,应力分析比较复杂,应当结合具体情况作具体分析。不管是哪种类型的节理面,它们都可用莫尔-库仑强度条件判定节理面上的稳定情况。当节理面上的剪应力 τ 达到节理面的抗剪强度 τ_f 时,节理面处于极限平衡状态:

$$\tau = \tau_f = c_j + \sigma \tan \varphi_j \quad (2-82)$$

式中, σ 为节理面上的正应力, MPa。

节理面的抗剪强度一般总是低于岩石的抗剪强度,如图 2-69 所示(直线 2 低于直线 1)。但需注意,当岩体内代表某点应力状态的应力圆与节理面强度曲线相切甚至相割时,岩体是否破坏还要看应力圆上代表该节理面上应力的点在圆周上的位置而定。为了清楚起见,设岩体内有一节理面 mm , 其倾角为 β (即节理面法线与大主应力成 β 角), 如图 2-70 所示。根据该处岩体的应力状态 σ_1 和 σ_3 可以绘一应力圆, 如图 2-69 中的 O_1 所示。从该圆的 m 点(圆与横轴的交点)作 mm (图 2-69) 的平行线交圆周于 A 点, 则 A 点就代表节理面上的应力。由于 A 点在节理面强度线的上方, 说明节理面上的应力已大于节理面的抗剪强度, 即 $\tau > \tau_f$, 节理面早已滑动了, 是不稳定的。而根据 σ_1 和 σ_3 绘出的莫尔应力圆 O_2 , 从该圆的 m_2 点作 mm 线的平行线交圆周于 B 点, B 点就代表节理面上的应力。由于 B 点在节理面强度线的下方, 说明节理面上的剪应力小于节理面的强度, 即 $\tau < \tau_f$ 。尽管莫尔应力圆已与节理面强度线相割, 节理面却还是稳定的。显然, 如果代表节理面应力的点刚好落在 B' 点, 则节理面上就处于极限平衡状态。利用这种图解方法, 很容易判断结构面的稳定性。下面将导出判断节理面稳定与否的具体判别式。

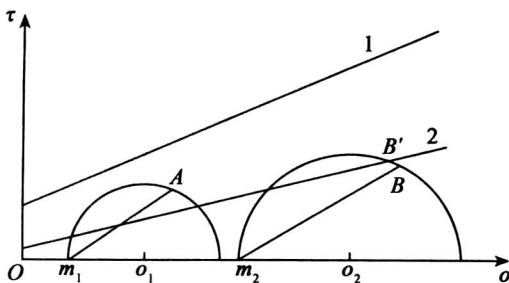


图 2-69 判断节理面稳定情况的图形解释

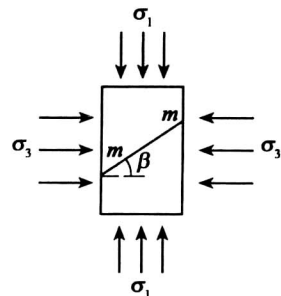


图 2-70 岩石中的节理面

如图 2-69 上以 O_1 圆代表的应力状态,则当节理面处于稳定状态和极限平衡状态时,节理面上的剪应力 τ 应当满足下列条件:

$$|\tau| \leq c_j + \sigma \tan \varphi_j \quad (2-83)$$

式中,等号表示极限平衡状态。

从材料力学中知道:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \beta \cos \beta \quad (2-84)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\beta = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta$$

将上式中的 τ 和 σ 代入式(2-83),得到

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \beta \cos \beta \leq (\sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta) \tan \varphi_j + c_j \quad (2-85)$$

移项整理后可得

$$\sigma_1 \cos \beta (\cos \beta \tan \varphi_j - \sin \beta) + \sigma_3 \sin \beta (\cos \beta + \sin \beta \tan \varphi_j) + c_j \geq 0 \quad (2-86)$$

通过三角运算,得出

$$\sigma_1 \cos \beta \sin(\varphi_j - \beta) + \sigma_3 \sin \beta \cos(\varphi_j - \beta) + c_j \cos \varphi_j \geq 0 \quad (2-87)$$

这就是判断节理面稳定情况的判别式(式中等号表示极限平衡状态)。如果式(2-87)的左端小于零,则节理面处于不稳定状态。

式(2-87)常常可用来估算节理岩体内地下洞室边墙的稳定性。如图 2-71 所示,假定在层状(节理)岩体中开挖隧洞,岩体中节理的倾角为 β ,现考虑边墙处岩体的稳定情况。从图 2-71 可知,开挖后洞壁上的水平应力 $\sigma_x = \sigma_z = 0, \sigma_y = \sigma_1$ 。因此式(2-87)成为

$$\sigma_y \cos \beta \sin(\varphi_j - \beta) + c_j \cos \varphi_j \geq 0 \quad (2-88)$$

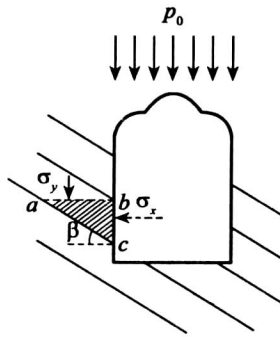


图 2-71 节理岩体边墙稳定性算例

边墙岩体是否处于平衡状态可分以下几种情况来讨论:

(1) 当 $\beta < \varphi_j$ 时, $\sin(\varphi_j - \beta) > 0$, 因此式(2-88)左边两项均为正, 式(2-88)显然能满足, 这就说明边墙岩块 abc 处于平衡状态。

(2) 当 $\beta = \varphi_j$ 时, 式(2-88)显然能够成立, 因此岩块处于平衡状态。

(3) 当 $\beta > \varphi_j$ 时, $\sin(\varphi_j - \beta) < 0$, 因而式(2-88)左边第一项为负, 但第二项却为正值。因

此在此情况下式(2-88)是否能满足就取决于式(2-88)中第一项的绝对值是否小于第二项,要视具体情况而定。

(4) 当 $\beta = 45^\circ + \varphi_j/2$ 时,即节理的倾角与一般均质岩体中所产生的破裂面方向相同,这时将 $\beta = 45^\circ + \varphi_j/2$ 代入式(2-88),则有

$$\sigma_y \cos(45^\circ + \varphi_j/2) \sin[\varphi_j - (45^\circ + \varphi_j/2)] + c_j \cos \varphi_j \geq 0 \quad (2-89)$$

或者

$$\sigma_y \leq \frac{2c_j \cos \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j} \quad (2-90)$$

2.5.3.2 结构面对岩体强度的影响分析

岩体的强度在很大程度上取决于结构面的强度,这主要是因为结构面的自然特征与力学性质对裂隙岩体强度具有控制性影响。

1. 结构面的方位对岩体强度的影响

试验发现,当结构面处于某种方位时(用倾角 β 表示),在某些应力条件下,破坏不沿结构面发生,而是仍在岩石材料内发生。在理论上也可证明结构面方位对强度的影响。下面讨论这一问题。

在式(2-87)中取等号,经过三角运算,可得结构面破坏准则(极限平衡)的另一种形式表示的公式:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2c_j + 2\sigma_3 \tan \varphi_j}{(1 - \tan \varphi_j \cot \beta) \sin 2\beta} \quad (2-91)$$

式中, c_j, φ_j 均为常数。

假如 σ_3 固定不变,则 $\sigma_1 - \sigma_3$ (或者说 σ_1) 随 β 而变化。所以式(2-91)可以看做是当 σ_3 固定时造成破坏的应力差 $\sigma_1 - \sigma_3$ 随 β 而变化的方程式。当 $\beta \rightarrow 90^\circ$ 以及当 $\beta \rightarrow \varphi_j$ 时, $\sigma_1 - \sigma_3 \rightarrow \infty$, 或者 $\sigma_1 \rightarrow \infty$ 。这就表明,当结构面平行于 σ_1 时以及结构面法线与 σ_1 成 φ_j 角时,在 σ_3 固定的条件下, σ_1 可无限增大,结构面不致破坏。当然,实际的 σ_1 是不会无限大的,当 σ_1 达到岩石的抗压强度时,岩石材料就破坏了。由此得知,只有当结构面的倾角 β 满足 $\varphi_j < \beta < 90^\circ$ 的条件时,才可能沿着结构面发生破坏,并且发生在式(2-91)所给出的 $\sigma_1 - \sigma_3$ 的情况。当 β 不满足上述条件时,破坏沿着岩石材料内部发生。

将式(2-91)对 β 求导,并令导数 $\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\beta} = 0$, 可以求得当 $\beta = 45^\circ + \frac{\varphi_j}{2}$ 时, $\sigma_1 - \sigma_3$ 有最小值,相应的 σ_1 的最小值 $\sigma_{1,\min}$ 为

$$\sigma_{1,\min} = \sigma_3 + \frac{2(c_j + f_j \sigma_3)}{\sqrt{1 + f_j^2} - f_j} \quad (2-92)$$

式中, $f_j = \tan \varphi_j$ 。

此时的莫尔圆与结构面的强度包络线相切,如图 2-72 所示。

当岩体不沿结构面破坏,而沿岩石的某一方向破坏时,岩体的强度就等于岩石的强度。此时,破坏面与 σ_1 的夹角为(图 2-72)

$$\beta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \quad (2-93)$$

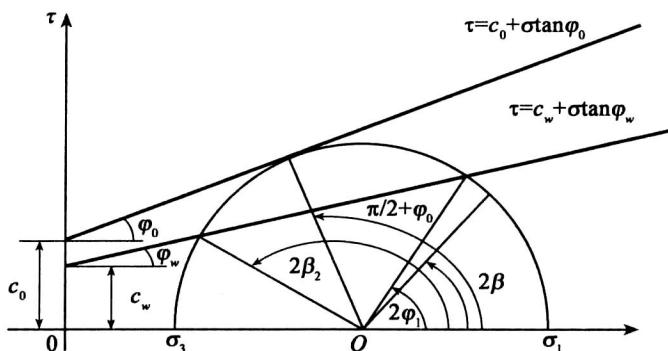


图 2-72 单结构面岩体强度分析

岩块的强度为

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \frac{2(c_j + \sigma_3 f_0)}{(1 - f_0 \cot \beta) \sin 2\beta} \quad (2-94)$$

式中, $f_0 = \tan \varphi_0$, c_0 、 φ_0 分别为岩石的黏结力和内摩擦角。

根据莫尔强度理论,若应力莫尔圆上的一点落在强度包络线之下,则试件不会沿此截面破坏。所以从图 2-72 可以看出,当结构与 σ_1 的夹角 β 满足下式:

$$2\beta_2 < 2\beta < 2\beta_1 \quad (2-95)$$

时,试件将不会沿结构面破坏。

在图 2-72 中,显然,当 β 角满足式(2-94)所列条件时,试件不会沿节理面破坏,但应力莫尔圆已与岩石强度包络线相切,因此试件将沿 $\beta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}$ 岩石截面破坏。若应力莫尔圆不和岩石强度包络线相切,而是落在其下,则试件将不发生破坏。

β_1, β_2 值也可通过下列计算方法确定:

由正弦定律

$$\frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\sin \varphi_j} = \frac{c_j \cot \varphi_j + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\sin(2\beta_1 - \varphi_j)}$$

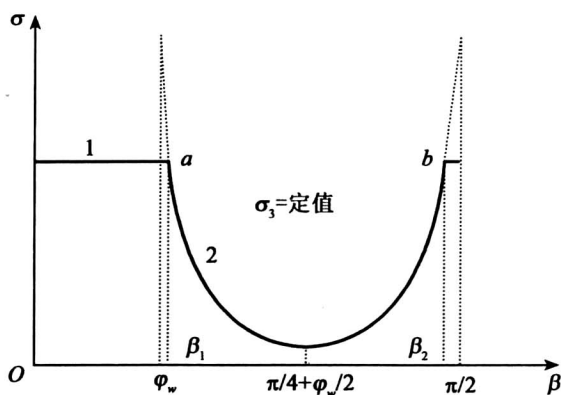
简化整理后可求得

$$\beta_1 = \frac{\varphi_j}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{(\sigma_1 + \sigma_3 + 2c_j \cot \varphi_j) \sin \varphi_j}{\sigma_1 - \sigma_3} \right] \quad (2-96)$$

同理可得

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_j}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{(\sigma_1 + \sigma_3 + 2c_j \cot \varphi_j) \sin \varphi_j}{\sigma_1 - \sigma_3} \right] \quad (2-97)$$

图 2-73 给出当 σ_3 为定值时,岩体的承载强度 σ_1 与 β 的关系。水平线与结构面破坏曲线相交于两点 a, b 。此两点相对于 β_1 与 β_2 , 此两点之间的曲线表示沿结构面破坏时的 β - σ_1 值,在此两点之外,即当 $\beta < \beta_1$ 或 $\beta > \beta_2$ 时,岩体不会沿结构面破坏,岩体强度取决于岩石强度,而与结构面的存在无关。



1—完整岩石破裂;2—沿结构面滑动

 图 2-73 结构面力学效应($\sigma_3 = \text{常数}$ 时, σ_1 与 β 无关系)

改写式(2-91),可得到岩体的三轴压缩强度 σ_{1m} 为

$$\sigma_{1m} = \sigma_3 + \frac{2(c_w + \sigma_3 f)}{(1 - f \cot \beta) \sin 2\beta} \quad (2-98)$$

令 $\sigma_3 = 0$, 可得岩体单轴的压缩强度 σ_{mc} 为

$$\sigma_{mc} = \frac{2c_j}{(1 - f \cot \beta) \sin 2\beta} \quad (2-99)$$

2. 多结构面效应

如果岩体含有二组或二组以上结构面,岩体强度的确定方法是分步运用单结构面理论式(2-99),分别绘出每一组结构面单独存在时的强度包络线和应力莫尔圆。岩体到底沿哪组结构面破坏,由 σ_1 与各组结构面的夹角所决定。当沿强度最小的那组结构面破坏时,岩体强度取得最小抗压强度。

图 2-74 所示含有三组结构面的岩石试件,首先绘出三组结构面及岩石的强度包络线和受力状态莫尔圆。若第一组结构面的受力状态点落在第一组结构面的强度包络线上 $\tau = c_{w1} + \sigma \tan \varphi_{w1}$ 或其之上,即第一结构面与 σ_1 的夹角 β 满足 $2\beta'_1 \leq 2\beta \leq 2\beta'_2$,则岩体第一组结构面破坏;若 β' 满足 $2\beta'_2 \leq 2\beta'$ 或 $2\beta' \leq 2\beta'_1$,则岩体将不沿第一组结构面破坏,而若此时第二组结构面与 σ_1 的夹角 β'' 满足 $2\beta''_1 \leq 2\beta'' \leq 2\beta''_2$,则岩体将沿第二组结构面破坏。依此类推,若三组节理面的受力状态点均落在其相应的强度包络线之下,即

$$\begin{aligned} 2\beta'_2 < 2\beta' \text{ 或 } 2\beta' < 2\beta'_1 \\ 2\beta''_2 < 2\beta'' \text{ 或 } 2\beta'' < 2\beta''_1 \\ 2\beta'''_2 < 2\beta''' \text{ 或 } 2\beta''' < 2\beta'''_1 \end{aligned} \quad (2-100)$$

则此时,岩体将不沿三组结构面破坏,而将沿 $\beta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}$ 的岩石截面破坏,因为图 2-74 中的莫尔圆已和岩石的强度包络线相切。若莫尔圆不和岩石强度包络线相切,而是落在其下,则此时岩体将不发生破坏。试验表明,随着岩体内结构面的增加,岩体强度特性越来越趋于各向同

性,而岩体的整体强度却大大削弱。Hoek 和 Brown 认为,含四组以上性质相近结构面的岩体,在地下开挖工程设计中按各向同性岩体来处理是合理的。另外,随着围压 σ_3 增大,岩体由各向异性向各向同性转化,一般认为,当 σ_3 接近岩体单轴抗压强度时,可视为各向同性体。

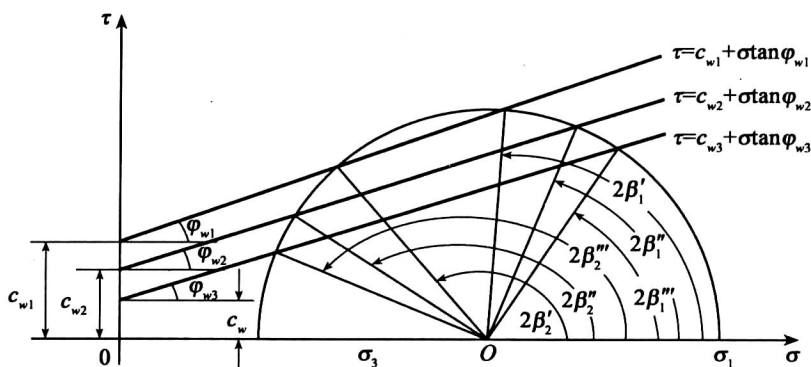


图 2-74 多组结构面岩体强度效应

3. 结构面的粗糙程度对岩体强度的影响

前面所讨论的发生滑动破坏的面是平行于剪力方向的。实际上,绝大多数结构面既不光滑,也不是平面,而是凹凸起伏的,也就是相当粗糙的,在剪应力作用下滑动时,并不各处平行于作用剪应力的方向,因此,结构面凹凸起伏的程度或粗糙度必然影响结构面的强度。下面用简化模型讨论这一过程。

图 2-75 (a) 表示直剪试验时水平剪力与结构面方向一致的情况下达到极限平衡状态。设滑动面的摩擦角为 φ_j , 内聚力 c_j 为零, 则

$$\frac{T}{P} = \tan \varphi_j \quad (2-101)$$

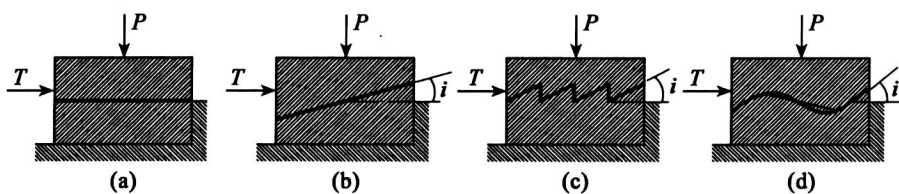


图 2-75 粗糙度模型的理想面

如果结构面不是水平的,而是有一倾角 i , 则结构面发生滑动时其上的剪力 T 与法向力 P 之间的关系为

$$\frac{T^*}{P^*} = \tan \varphi_j \quad (2-102)$$

将 T 和 P 在结构面方向内分解, 得

$$T^* = T \cos i - P \sin i \quad (2-103)$$

$$P^* = P \cos i + T \sin i \quad (2-104)$$

将以上两式代入式(2-102)并加以简化整理,得到滑动条件为

$$\frac{T}{P} = \tan(\varphi_j + i) \quad (2-105)$$

因此,倾斜结构面具有“似”摩擦角 $\varphi_j + i$ 。帕顿(Patton)把这个模型推广到呈锯齿状的结构面,如图 2-75(c)、(d)所示,它通过一系列模型试验发现,当 P 较小时,结构面的滑动遵循式(2-105)。随着剪切,试样在垂直方向不断增大体积。当 P 值增加到某种临界值时,滑动不沿倾斜面产生,而是穿过锯齿底面,破坏不发生扩容性垂直运动。因此,抗剪强度包络线成为双线性型,如图 2-76 所示。

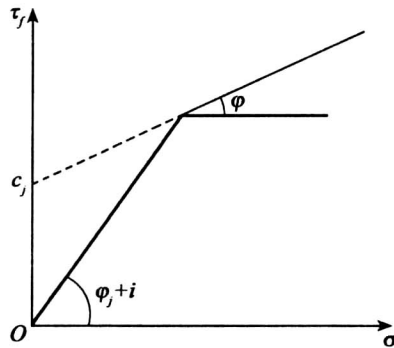


图 2-76 结构面的强度包络线

具体应用时,结构面的抗剪强度应当写为:

- (1) 当低的正应力时, $\tau_f = \sigma \tan(\varphi_j + i)$;
- (2) 当高的正应力时, $\tau_f = c_j + \sigma \tan \varphi_j$ 。

式中, i 称为起伏角; φ_j 应当用平面型面所作试验求取, φ_j 的值大多在 $21^\circ \sim 40^\circ$ 范围内变化,一般为 30° 。当结构面上存在云母、滑石、绿泥石或其他片状硅酸盐矿物时,或者当有黏土质断层时, φ_j 可降低很多。结构面内饱和黏土中的孔隙水一般不易排除,充填有蒙脱质黏土的结构面的 φ_j 可低到 6° 。结构面的起伏角 i 变化范围很大,可从 0° 到 40° 。

在无试验资料可用时, φ_j 可参考表 2-4 取值。

4. 结构面内充水对岩体强度的影响

如果结构面内有水压力,由于这种水压力使有效正应力降低,结构面强度也相应降低。有意义的是计算引起结构面滑动所需的水压力。这时必须确定从代表结构面原来应力状态的莫尔圆到代表极限状态的莫尔圆向左移动的距离(图 2-77)。这个计算比无结构面的岩石稍复杂些,因为除了初始应力和强度参数之外,还需考虑结构面的方位(结构面法线与大主应力成 β 角)。如果初始应力状态为 σ_1 和 σ_3 ,则根据推导,造成结构面开始破坏的水压力用下式表示:

表 2-4 各种岩石结构面基本摩擦角 φ_j 的近似值表

岩 类	$\varphi_j(^{\circ})$	岩 类	$\varphi_j(^{\circ})$
闪 岩	32	花岗岩(粗粒)	31 ~ 35
玄武岩	31 ~ 38	石灰岩	33 ~ 40
砾 岩	35	斑 岩	31
白 垩	30	砂 岩	25 ~ 35
白云岩	27 ~ 31	页 岩	27
片麻岩(片状的)	23 ~ 29	粉砂岩	27 ~ 31
花岗岩(细粒)	29 ~ 35	板 岩	25 ~ 30

$$P_w = \frac{c_j}{\tan \varphi_j} + \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \times \left(\cos^2 \beta - \frac{\sin \beta \cos \beta}{\tan \varphi_j} \right)$$

(2-106)

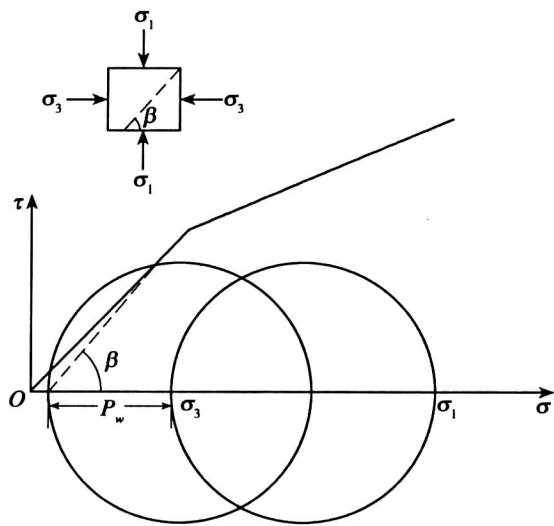


图 2-77 结构面在水压力下开始破坏的莫尔圆

计算时,可以先用 $c_j=0$ 和 $\varphi_j=\varphi+i$ 代入上式求得一个 P_w ,再用 $c_j \neq 0$ 和 $\varphi_j=\varphi$ 代入上式计算另一个 P_w ,从中取较小的一个 P_w 。

2.5.3.3 岩体强度的确定方法

1. 试验确定法

确定岩体强度的试验是指在现场原位切割较大尺寸试件进行单轴压缩、三轴压缩和抗剪强度试验。为了保持岩体的原有力学条件,在试块附近不能爆破,只能使用钻机、风镐等机械破岩,根据设计的尺寸,凿出所需规格的试体。一般试体为边长 0.5 ~ 1.5m 的立方体,加载设备用千斤顶和液压枕(扁千斤顶)。

(1) 岩体单轴抗压强度的测定。切割成的试件如图 2-78 所示。在拟加压的试件表面

(图 2-78 中为试件的上端)抹一层水泥砂浆,将表面抹平,并在其上放置方木和工字钢组成的垫层,以便将千斤顶施加的荷载经垫层均匀传给试体。根据试体破坏时千斤顶施加的最大荷载及试体受载截面积,计算岩体的单轴抗压强度。

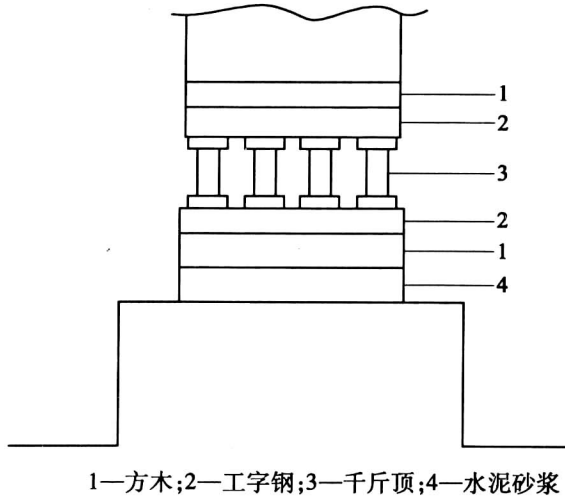


图 2-78 岩体单轴抗压强度测定

(2) 岩体抗剪强度的测定。一般采用双千斤顶法,即一个垂直千斤顶施加正压力,另一个千斤顶施加横推力,如图 2-79 所示。

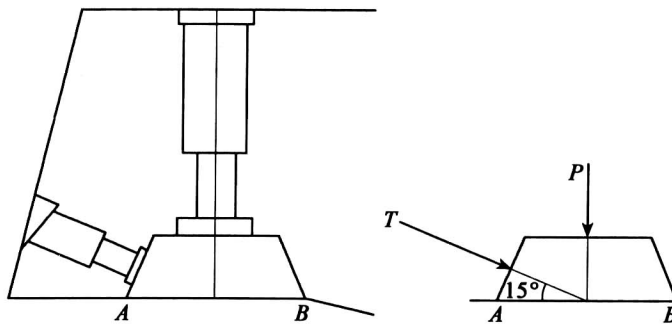


图 2-79 岩体抗剪试验

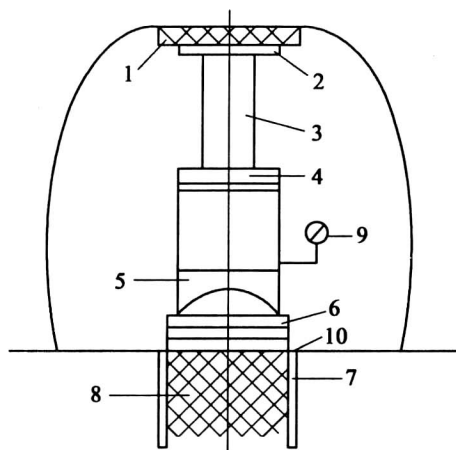
为使剪切面上不产生力矩效应,合力通过剪切面中心,使其接近于纯剪切破坏,另一个千斤顶成倾斜布置,一般采取倾角 $\alpha = 15^\circ$ 。试验时,每组试体应有 5 个以上,剪断面上应力按式(2-107)计算。然后根据 τ, σ 绘制岩体强度曲线。

$$\sigma = \frac{P + T \sin \alpha}{F}$$

$$\tau = \frac{T}{F} \cos \alpha \quad (2-107)$$

式中, P 、 T 为垂直及横向千斤顶施加的荷载; F 为试体受剪截面积。

(3) 岩体三轴压缩强度试验。地下工程的受力状态是三维的, 所以做三轴力学试验非常重要。但由于现场原位三轴力学试验在技术上很复杂, 只在必要时才进行。现场岩体三轴试验装置如图 2-80 所示, 用千斤顶施加轴向荷载, 用压力枕施加围压荷载。



1—混凝土顶座; 2、4、6—垫板; 3—顶柱;
5—球面垫; 7—压力枕; 8—试件; 9—液压表; 10—液压枕

图 2-80 原位岩体三轴试验

根据围压情况, 可分为等围压三轴试验 ($\sigma_2 = \sigma_3$) 和真三轴试验 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)。研究表明, 中间主应力在岩体强度中起重要作用, 在多节理的岩体中尤其重要, 因此, 真三轴试验越来越受重视; 而等围压三轴试验的实用性更强。

2. 经验估算法

岩体强度是岩体工程设计的重要参数, 而做岩体的原位试验又十分费时、费钱, 难以大量进行。因此, 如何利用地质资料及小试块室内试验资料, 对岩体强度作出合理估算是岩体力学中重要的研究课题。下面介绍两种方法:

(1) 准岩体强度。这种方法实质是用某种简单的试验指标修正岩块强度作为岩体强度的估算值。

节理、裂隙等结构面是影响岩体强度的主要因素, 其分布情况可通过弹性波传播查明。弹性波穿过岩体时, 遇到裂隙便发生绕射或被吸收, 传播速度将有所降低, 裂隙越多, 波速降低越大, 小尺寸试件含裂隙少、传播速度大。因此, 根据弹性波在岩石试块和岩体中的传播速度比, 可判断岩体中裂隙发育程度。称此比值的平方为岩体完整性系数, 以 K 表示, 即

$$K = \left(\frac{v_{ml}}{v_{cl}} \right)^2 \quad (2-108)$$

式中, v_{ml} 为岩体中弹性波纵波传播速度; v_{cl} 为岩块中弹性波纵波传播速度。

各种岩体的完整性系数列于表 2-5。岩体完整系数确定后, 便可计算准岩体强度。

准岩体抗压强度: $R_{mc} = KR_c$;

准岩体抗拉强度: $R_{mt} = KR_t$ 。

式中, R_c 为岩石试件的单轴抗压强度; R_t 为岩石试件的单轴抗拉强度。

表 2-5 各种岩石的完整性系数

岩体种类	岩体完整性系数 K
完整	>0.75
块状	$0.45 \sim 0.75$
碎裂状	<0.45

(2) Hoek-Brown 经验方程。Hoek 和 Brown (1980) 根据岩体性质的理论与实践经验, 用试验法导出了岩块和岩体破坏时主应力之间的关系为

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{mR_c\sigma_3 + sR_c^2} \quad (2-109)$$

式中: σ_1 为破坏时的最大主应力; σ_3 为作用在岩石试样上的最小主应力; m, s 为与岩性及结构面情况有关的常数, 查表 2-6 得出。

由式(2-109), 令 $\sigma_3 = 0$, 可得岩体的单轴抗压强度 R_{mc} , 即

$$R_{mc} = \sqrt{s} R_c \quad (2-110)$$

对于完整岩石, $s = 1$, 则 $R_{mc} = R_c$, 即为岩块抗压强度; 对于裂隙岩石, $s < 1$ 。

将 $\sigma_1 = 0$ 代入方程(2-110)中, 并对 σ_3 求解所得的二次方程, 可解得岩体的单轴抗拉强度为

$$R_{mt} = \frac{1}{2} R_c (m - \sqrt{m^2 + 4s}) \quad (2-111)$$

式(2-111)的剪应力表达式为

$$\tau = AR_c \left(\frac{\sigma}{R_c} - T \right)^B \quad (2-112)$$

式中: τ 为岩体的剪切强度; σ 为岩体法向应力; A, B 为常数, 查表 2-6 求得;

$T = \frac{1}{2} (m - \sqrt{m^2 + 4s})$, 查表 2-6 求得。

利用式(2-109) ~ 式(2-112)和表 2-6, 即可对裂隙岩体的三轴压缩强度 σ_1 、单轴抗压强度 R_{mc} 及单轴抗拉强度 R_{mt} 进行估算, 还可求出 c_m, φ_m 的值。进行估算时, 先进行工程地质调查, 得出工程所在处的岩体质量指标 (RMR 和 Q 值)、岩石类型及岩块单轴抗压强度 R_c 。

Hoek 曾指出, m 与莫尔-库仑判据中的内摩擦角 φ 非常类似, 而 s 则相当于内聚力 c 值。如果这样, 根据 Hoek-Brown 提供的常数 (表 2-6), m 最大为 25, 显然这时用式(2-109)估算的岩体强度偏低, 特别是在低围压下及较坚硬完整的岩体条件下, 估算的强度明显偏低。但对于受构造扰动及结构面较发育的裂隙化岩体, Hoek (1987) 认为用这一方法估算是合理的。

表 2-6 岩体质量和经验常数之间关系表(据 Hoek-Brown, 1980)

岩体状况	具有很好结晶解理的碳酸盐类岩石, 如白云岩、灰岩、大理岩	成岩的黏土质岩石, 如泥岩、粉砂岩、页岩、板岩(垂直于板理)	强烈结晶, 结晶解理不发育的砂质岩石, 如砂岩、石英岩	细粒、多矿物、结晶岩浆岩, 如安山岩、辉绿岩、玄武岩、流纹岩	粗粒、多矿物结晶岩浆岩和变质岩, 如角闪岩、辉长岩、片麻岩、花岗岩、石英闪长岩等
完整岩块试件, 实验室试件尺寸, 无节理, $RMR = 100$, $Q = 500$	$M = 7.0$ $s = 1.0$ $A = 0.816$ $B = 0.658$ $T = -0.140$	$M = 10.0$ $s = 1.0$ $A = 0.918$ $B = 0.677$ $T = -0.099$	$M = 15.0$ $s = 1.0$ $A = 1.044$ $B = 0.692$ $T = -0.067$	$M = 17.0$ $s = 1.0$ $A = 1.086$ $B = 0.696$ $T = -0.059$	$m = 25.0$ $s = 1.0$ $A = 1.220$ $B = 0.705$ $T = -0.040$
非常好质量岩体, 紧密互锁, 未扰动, 未风化岩体, 节理间距 3m 左右, $RMR = 85$, $Q = 100$	$M = 3.5$ $s = 0.1$ $A = 0.651$ $B = 0.679$ $T = -0.028$	$M = 5.0$ $s = 0.1$ $A = 0.739$ $B = 0.692$ $T = -0.020$	$M = 7.5$ $s = 0.1$ $A = 0.848$ $B = 0.702$ $T = -0.013$	$M = 8.5$ $s = 0.1$ $A = 0.883$ $B = 0.705$ $T = -0.012$	$m = 12.5$ $s = 0.1$ $A = 0.998$ $B = 0.712$ $T = -0.008$
好的质量岩体, 新鲜至轻微风化, 轻微构造变化岩体, 节理间距为 1 ~ 3m, $RMR = 65$, $Q = 10$	$M = 0.7$ $s = 0.004$ $A = 0.369$ $B = 0.669$ $T = -0.006$	$M = 1.0$ $s = 0.004$ $A = 0.427$ $B = 0.683$ $T = -0.004$	$M = 1.5$ $s = 0.004$ $A = 0.501$ $B = 0.695$ $T = -0.003$	$M = 17.0$ $s = 1.0$ $A = 1.086$ $B = 0.696$ $T = -0.059$	$m = 2.5$ $s = 0.004$ $A = 0.603$ $B = 0.707$ $T = -0.002$
中等质量岩体, 中等风化, 岩体中发育有几组节理间距为 0.3 ~ 1m, $RMR = 44$, $Q = 1.0$	$M = 0.14$ $s = 0.0001$ $A = 0.198$ $B = 0.662$ $T = -0.0007$	$M = 0.20$ $s = 0.0001$ $A = 0.234$ $B = 0.675$ $T = -0.0005$	$M = 0.30$ $s = 0.0001$ $A = 0.280$ $B = 0.688$ $T = -0.0003$	$M = 0.34$ $s = 0.0001$ $A = 0.295$ $B = 0.691$ $T = -0.0003$	$M = 0.50$ $s = 0.0001$ $A = 0.346$ $B = 0.700$ $T = -0.0002$
坏质量岩体, 大量风化节理, 间距为 30 ~ 500mm, 并含有一些夹泥, $RMR = 23$, $Q = 0.1$	$M = 0.04$ $s = 0.00001$ $A = 0.115$ $B = 0.646$ $T = -0.0002$	$M = 0.05$ $s = 0.00001$ $A = 0.129$ $B = 0.655$ $T = -0.0002$	$M = 0.08$ $s = 0.00001$ $A = 0.162$ $B = 0.646$ $T = -0.0001$	$M = 0.09$ $s = 0.00001$ $A = 0.172$ $B = 0.676$ $T = -0.0001$	$M = 0.13$ $s = 0.00001$ $A = 0.203$ $B = 0.686$ $T = -0.0001$
非常坏质量岩体, 具大量严重风化节理, 间距小于 50mm 充填夹泥, $RMR = 3$, $Q = 0.01$	$M = 0.007$ $s = 0$ $A = 0.042$ $B = 0.534$ $T = 0$	$M = 0.010$ $s = 0$ $A = 0.050$ $B = 0.539$ $T = 0$	$M = 0.015$ $s = 0$ $A = 0.061$ $B = 0.546$ $T = 0$	$M = 0.017$ $s = 0$ $A = 0.065$ $B = 0.548$ $T = 0$	$M = 0.025$ $s = 0$ $A = 0.078$ $B = 0.556$ $T = 0$

第3章 岩土渗透性及渗流

3.1 概 述

岩土是一种三相组成的多孔介质,其孔隙在空间互相连通。在饱和岩土中,水充满整个孔隙,当岩土中不同位置存在水位差时,岩土中水就会在水位能量作用下,从水位高的位置向水位低的位置流动。液体从物质微孔中透过的现象称为渗透(Osmosis)。岩土体具有被液体透过的性质称为岩土的渗透性(Permeability),或透水性。液体在岩土孔隙或其他透水性介质中的流动问题称为渗流(Seepage)。

岩土的渗透性同岩土的强度、变形特性一起,是岩土力学中的几个主要课题。强度、变形、渗流是相互关联、相互影响的,土木工程领域内的许多工程实践都与岩土的渗透性密切相关。归纳起来,岩土的渗透性研究主要包括下述三个方面:

(1) 渗流量问题:如基坑开挖或施工围堰时的渗水量及排水量计算(图3-1(a))、土坯堤坝身、坝基岩土中渗水量(图3-1(b))、水井的供水量或排水量(图3-1(c))等。

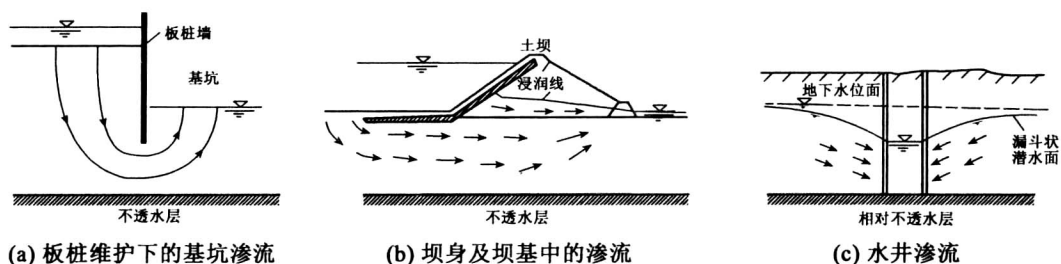


图 3-1 渗流示意图

(2) 渗透破坏问题:岩土中的渗流会对岩土颗粒施加作用力,即渗透力,当渗透力过大时,就会引起岩土颗粒或岩土体的移动,产生渗透变形、甚至渗透破坏,如边坡破坏、地面隆起、堤坝失稳等现象。近年来高层建筑基坑失稳事故有不少就是由渗透破坏引起的。

(3) 渗流控制问题:当渗流量或渗透变形不满足设计要求时,就要研究工程措施进行渗流控制。

显然,水在岩土体中的渗流,一方面会引起水头损失或基坑积水,影响工程效益和进度;另一方面将引起岩土体变形,改变构筑物或地基的稳定条件,直接影响工程安全。因此,研究岩土的渗透性规律及其与工程的关系具有重要意义。岩土的渗透性是反映岩土的孔隙性

规律的基本内容之一。

本章主要介绍岩土的渗透性及渗流规律、二维渗流和流网及其计算、渗透破坏与渗流控制。

3.2 岩土的渗透性

3.2.1 渗流基本概念

水的势能(Potential Energy):岩土体中任一点处水的总势能 $\Delta\varphi$ 为各种势能分量之和,可表达为:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_g + \Delta\varphi_m + \Delta\varphi_p + \Delta\varphi_v + \Delta\varphi_o + \Delta\varphi_e + \cdots \quad (3-1)$$

式中, $\Delta\varphi_g$ 为重力势; $\Delta\varphi_m$ 为广义毛细势; $\Delta\varphi_p$ 为压力势; $\Delta\varphi_v$ 为速度势; $\Delta\varphi_o$ 为盐渗势; $\Delta\varphi_e$ 为电渗势。

重力势即岩土中水的位能,取决于所研究点和基准面的相对位置。在基准面以上,重力势为正;在基准面以下,重力势为负。基准面可以任意确定,因为描述流动所需的是两点间的能量梯度。

广义毛细势(Capillary Potential)是骨架与水相互作用而形成的势能,它不仅取决于孔隙中弯液面的表面张力,而且也与颗粒表面水的物理化学作用有关。地下水位以上广义毛管势为负,地下水位以下为零;处于平衡状态时,与重力势大小相等地、符号相反。

压力势是由水所受压力引起的,在地下水位以下相当于测压管压力。在非饱和岩土中,当饱和度小于某一数值后,将不存在压力势。

速度势是水流速度引起的。

盐渗析势(Osmotic Potential)是两点处水的盐浓度不同而引起的势能差。

电渗势(Electro-Osmotic Potential)是岩土中两点因电位不同而引起的孔隙水势能。

虽然岩土中水的总势能包括多个分量,但通常主要分量并不多。在地下水位以上,主要的势能组合为重力势和广义毛管势;在地下水位以下,主要为重力势和压力势。在渗流分析中,势能常用水头(Hydraulic Head)表示,其定义式为

$$h = h_z + h_p + h_v = z + \frac{p}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} \quad (3-2)$$

式中, h 为总水头, m; v 为流速, m/s; g 为重力加速度, m/s²; p 为水压, kPa; γ_w 为水的重度, kN/m³; z 为基准面高程, m。

当水在岩土中渗流时,其速度很慢,因此由速度引起的水头项可以忽略,从而有

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w} \quad (3-3)$$

图 3-2 中, A、B 两点的水头差为

$$\Delta h = h_A - h_B = \left(\frac{P_A}{\gamma_w} + Z_A \right) - \left(\frac{P_B}{\gamma_w} + Z_B \right) \quad (3-4)$$

则水力梯度(Hydraulic Gradient)为

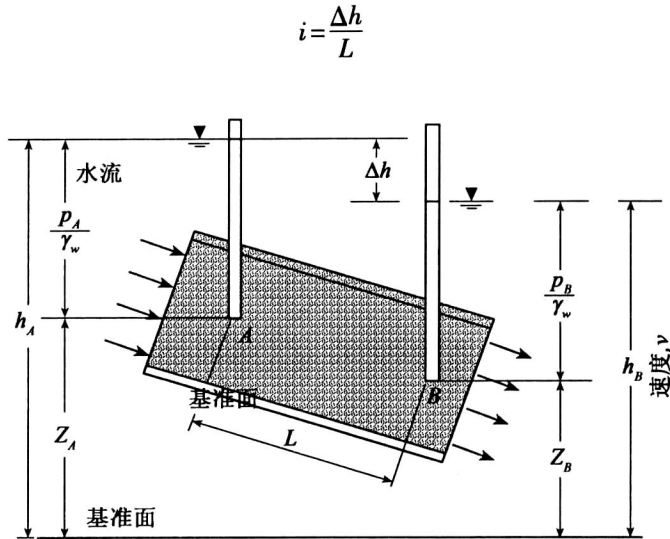


图 3-2 土中渗流水头变化示意图

3.2.2 渗透定律

由于岩土体中孔隙一般非常微小且很曲折,水在岩土体流动过程中粘滞阻力很大,流速十分缓慢,因此多数情况下其流动状态属于层流(Laminar Flow),即相邻两个水分子运动的轨迹相互平行而不混流。

法国工程师 H. 达西(Darcy,1855)利用图 3-3 所示的试验装置对均匀砂进行了大量渗透试验,得出层流条件下,土中水渗透速度与能量损失之间关系的渗流规律,即达西定律。达西试验装置的主要部分是一个上端开口的直立圆筒,下部放碎石,碎石上放一块多孔滤板。滤板上放置颗粒均匀的土样,其断面积为 A ,长度为 L 。筒的侧壁装有两支测压管,分别设置在土样上下两端的过水断面处 1、2。水由上端进水管 a 注入圆筒,并以溢水管 b 保持筒内为恒定水位。透过土样的水从装有控制阀门 d 的弯管流入容器 V 中。当筒的上部水面保持恒定以后,通过砂土的渗流是恒定流,测压管中的水面将恒定不变。图 3-3 中的 $o-o$ 面为基准面, h_1 、 h_2 分别为 1、2 断面处的测压管水头; $\Delta h = h_1 - h_2$ 即为经过砂样长度 L 后的水头损失。

达西根据对不同尺寸的圆筒和不同类型及长度的土样所进行的试验,发现单位时间内的渗出水量 q 与水力梯度 i 和圆筒断面积 A 成正比,且与土的透水性质有关,即

$$q \propto A \times \frac{\Delta h}{L} \tag{3-5}$$

写成等式则为

$$q = kA \times i \tag{3-6}$$

或

$$v = \frac{q}{A} = ki \tag{3-7}$$

式中, q 为单位渗水量, cm^3/s ; v 为断面平均渗透速度, cm/s ; i 为水力梯度,表示单位渗流长

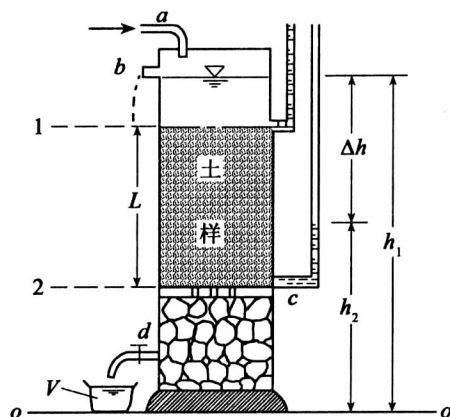


图 3-3 达西渗透试验装置

度上的水头损失 ($\Delta h/L$), 或称水力坡降; k 为反映土的透水性的比例系数, 称为土的渗透系数。它相当于水力梯度 $i=1$ 时的渗透速度, 故其量纲与渗透速度相同, cm/s 。

式(3-6)或式(3-7)即为达西定律表达式, 达西定律表明, 在层流状态的渗流中, 渗透速度 v 与水力梯度 i 的一次方成正比 (图 3-4(a))。但是, 对于密实的黏土, 由于吸着水具有较大的黏滞阻力, 因此, 只有当水力梯度达到某一数值, 克服了吸着水的黏滞阻力以后, 才能发生渗透。这一开始发生渗透时的水力梯度称为黏性土的起始水力梯度。一些试验资料表明, 当水力梯度超过起始水力梯度后, 渗透速度与水力梯度的规律还会偏离达西定律而呈非线性关系, 如图 3-4(b) 中的实线所示。为了实用方便, 常用图中的虚直线来描述密实黏土的渗透速度与水力梯度的关系, 并以下式表示:

$$v = k(i - i_b) \quad (3-8)$$

式中, i_b 为密实黏土的起始水力梯度, 其余符号意义同前。

另外, 试验也表明, 在砾类土和巨粒土中, 只有在小的水力梯度下, 渗透速度与水力梯度才呈线性关系, 而在较大的水力梯度下, 水在土中的流动即进入紊流状态, 则呈非线性关系, 此时达西定律不适用, 如图 3-4(c) 所示。

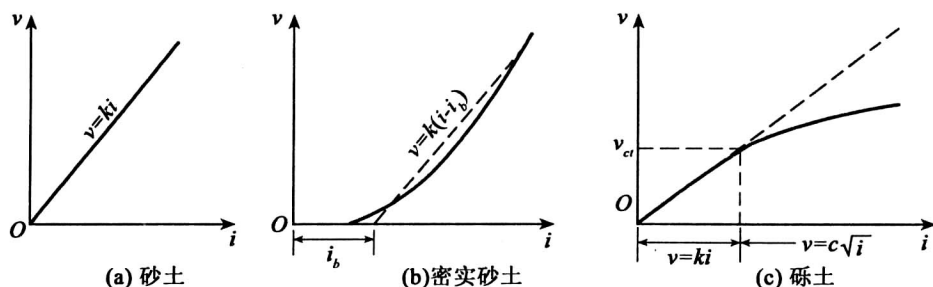


图 3-4 土中渗透速度与水力梯度的关系

需要注意的是,式(3-7)中的渗透速度 v 并不是土孔隙中水的实际平均流速,因为公式推导中采用的是土样的整个截面积,其中包括土粒骨架所占的部分面积在内。显然,土粒本身是不能透水的,故真实的过水截面积 A_r 应小于整个截面积 A ,实际平均流速 v_r ,应大于 v 。一般 v 称为假想平均流速。 v 与 v_r 的关系可通过水流连续原理建立如下:

$$q = vA = v_r A_r \quad (3-9)$$

若均质砂土的孔隙率为 n ,则 $A_r = nA$,即得

$$v_r = \frac{vA}{nA} = \frac{v}{n} \quad (3-10)$$

由于水在土中沿孔隙流动的实际路径十分复杂, v_r 也并非渗透的真实流速,要想真正确定某一具体位置的真实流速,无论理论分析或实验方法都很难做到。下面述及渗透速度均指这种假想平均流速。

3.2.3 渗透试验与渗透系数

渗透系数 k 是反映土的渗透能力的定量指标,也是渗流计算时必须用到的一个基本参数,它只能通过试验直接测定。测定方法可分为室内渗透试验和现场试验两大类。

3.2.3.1 室内渗透试验

室内测定渗透系数的仪器和方法较多,从试验原理上大体可分为常水头法和变水头法两种。

常水头法是在整个试验过程中,水头保持不变,其试验装置如图 3-5 所示。前述达西渗透试验也属于这种类型。

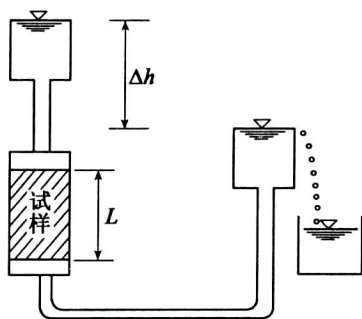


图 3-5 常水头试验装置示意图

设试样的高度即渗流长度为 L ,截面积为 A ,试验时的常水头差为 Δh ,这三者在试验前可以直接量测或控制。试验中只要用量筒和秒表测得在某一时段 t 内经过试样的渗水量 Q ,即可求出该时段内通过土体的单位渗水量,即

$$q = \frac{Q}{t} \quad (3-11)$$

将上式代入式(3-6)中,便得到土的渗透系数

$$k = \frac{QL}{A\Delta h t} \quad (3-12)$$

黏性土由于渗透系数很小,流经试样的水量很少,难以直接准确量测,因此,应采用变水头法。在整个试验过程中,水头是随时间而变化的,其试验装置如图 3-6 所示。试样的一端与细玻璃管相接,在试验过程中量测某一时段内细玻璃管中水位的变化,就可根据达西定律,求得土的渗透系数。

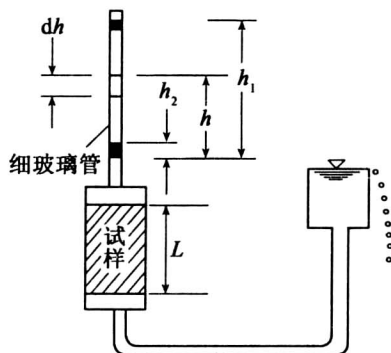


图 3-6 变水头试验装置示意图

设细玻璃管的内截面积为 a , 试验开始以后任一时刻 t 的水位差为 h , 经过时段 dt , 细玻璃管中水位下落 dh , 则在时段 dt 内经过细管试样的流量为

$$dQ = -adh$$

式中, 负号表示渗水量随 h 的减小而增加。

根据达西定律, 在时段 dt 内流经试样的渗水量又可表示为

$$dQ = k \frac{h}{L} A dt$$

同一时段内经过土样的渗流量应与细管流量相等, 即

$$dt = -\frac{aL dh}{kA h}$$

将上式两边积分

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{aL}{kA} \frac{dh}{h}$$

即可得到土的渗透系数为

$$k = \frac{aL}{A(t_2 - t_1)} \ln \frac{h_1}{h_2} \quad (3-13)$$

式中, a 、 L 、 A 为已知, 试验时只要量测与时刻 t_1 、 t_2 对应的水位 h_1 、 h_2 , 就可求出渗透系数。

3.2.3.2 现场测定渗透系数

在现场进行渗透系数 k 值测定时, 常用现场井孔抽水试验或井孔注水试验的方法。对于均质的粗粒土层, 用现场抽水试验测出的 k 值往往要比室内试验更为可靠。下面介绍用抽水试验确定 k 值的方法。

图 3-7 为一现场井孔抽水试验示意图。在现场打一口试验井, 贯穿要测定 k 值的砂土层, 并在距井中心不同距离处设置一个或两个观测孔。然后自井中以不变的速率连续进行抽水。抽水造成井周围的地下水位逐渐下降, 形成一个以井孔为轴心的降落漏斗状的地下水面。测定试验井和观测孔中的稳定水位, 可以画出测压管水位变化图形。测定水头差形成的水力梯度, 使水流向井内。假定水流是水平流向时, 则流向水井的渗流过水断面应是一系列的同心圆柱面。待出水量和井中的动水位稳定一段时间后, 若测得的抽水量为 q , 观测孔距井轴线的距离分别为 r_1 、 r_2 , 孔内的水位高度为 h_1 、 h_2 , 通过达西定律即可求出土层的平均 k 值。

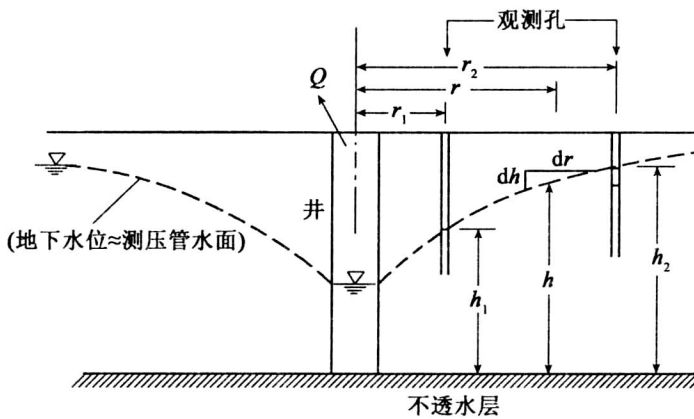


图 3-7 抽水试验

现围绕井轴取一过水断面, 该断面距井中心距离为 r , 水面高度为 h , 则过水断面积 $A = 2\pi rh$; 假设该过水断面上各处水力梯度为常数, 且等于地下水位线在该处的坡度时, 则 $i = dh/dr$ 。根据达西定律, 单位时间自井内抽出的水量即单位渗水量 q 为

$$q = Aki = 2\pi rhk \frac{dh}{dr}$$

得

$$q = Aki = 2\pi rhk \frac{dh}{dr}$$

$$q = Aki = 2\pi rhk \frac{dh}{dr}$$

经积分运算可得到土的渗透系数

$$k = \frac{q}{\pi} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{(h_2^2 - h_1^2)} \quad (3-14)$$

3.2.3.3 影响渗透系数的主要因素

影响土的渗透系数的主要因素有:

(1) 土的粒度成分。一般土粒越粗、大小越均匀、形状越圆滑, k 值也就越大。粗粒土中

含有细粒土时,随细粒含量的增加, k 值急剧下降。

(2)土的密实度。土越密实, k 值越小,试验资料表明,对于砂土, k 值大致上与土的孔隙比的二次方成正比。对于黏性土,孔隙比 e 对 k 的影响更大。

(3)土的饱和度。一般情况下,饱和度越低, k 值越小,这是因为低饱和土的孔隙中存在较多气泡会减小过水面积,甚至堵塞细小孔道。同时,由于气体因孔隙水压力的变化而胀缩,因而饱和度的影响成为一个不定因素。为此,要求试样必须充分饱和,以保持试验的精度。

(4)土的结构。细粒土在天然状态下具有复杂结构,结构一旦扰动,原有的过水通道的形状、大小及其分布就会全都改变,因而 k 值也就不同。扰动土样与击实土样的 k 值通常均比同一密度原状土样的 k 值为小。

(5)水的温度。试验表明,渗透系数 k 与渗流液体(水)的重度 γ_w 以及黏滞度 η 有关。水温不同时, γ_w 相差不多,但 η 变化较大。水温越高, η 越低; k 与 η 基本上成线性关系。

(6)土的构造。土的构造因素对 k 值的影响也很大。例如,在黏性土层中有很薄的砂土夹层的层理构造,会使土在水平方向的 k_h 值比垂直方向的 k_v 值大许多倍,甚至几十倍。因此,在室内做渗透试验时,土样的代表性很重要。

3.2.3.4 成层土的等效渗透系数

天然沉积土往往由渗透性不同的土层所组成,宏观上具有非均质性。对于平面问题与土层层面平行和垂直的简单渗流情况,当各土层的渗透系数和厚度为已知时,即可求出整个土层与层面平行和垂直的平均渗透系数,作为进行渗流计算的依据。

现在,先考虑与层面平行的渗流情况。图3-8为在渗流场中截取的渗流长度为 L 的一段与层面平行的渗流区域,各土层的水平向渗透系数分别为 $k_{1x}, k_{2x}, \dots, k_{nx}$,厚度分别为 H_1, H_2, \dots, H_n ,总厚度为 H 。若通过各土层的单位渗水量为 $q_{1x}, q_{2x}, \dots, q_{nx}$,则通过整个土层的总单位渗水量应为各土层单位渗水量之总和,即

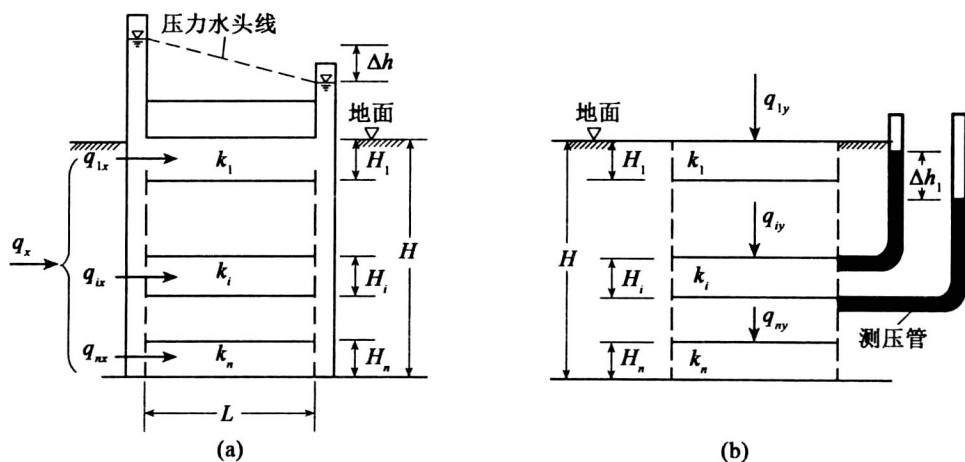


图3-8 成层土渗流情况

$$q_x = q_{1x} + q_{2x} + \cdots + q_{nx} = \sum_{i=1}^n q_{ix} \quad (3-15)$$

根据达西定律,总的单位渗水量又可表示为

$$q_x = k_x i H \quad (3-16)$$

式中, k_x 为与层面平行的土层平均渗透系数; i 为土层的平均水力梯度, $i = \Delta h / L$ 。

对于这种条件下的渗流,通过各土层相同距离的水头损失均相等,因此,各土层的水力梯度与整个土层的平均水力梯度亦应相等。于是任一土层的单位渗水量为

$$q_{ix} = k_{ix} i H_i \quad (3-17)$$

将式(3-16)和式(3-17)代入式(3-15)后可得到整个土层与层面平行的平均渗透系数为

$$k_x = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n k_{ix} H_i \quad (3-18)$$

对于与层面垂直的渗流情况,如图 3-8(b) 所示,可用类似的方法求解。设通过各土层的单位渗水量为 $q_{1y}, q_{2y}, \cdots, q_{ny}$, 根据水流连续定理,通过整个土层的单位渗水量 q_y 必等于通过各土层的渗流量,即

$$q_y = q_{1y} = q_{2y} = \cdots = q_{ny} \quad (3-19)$$

设渗流通过任一土层的水头损失为 Δh_i , 水力梯度 $i_i = \Delta h_i / H_i$, 则通过整个土层的水头总损失 h 应为 $\sum \Delta h_i$, 总的平均水力梯度 i 应为 h / H 。由达西定律,通过整个土层的总单位渗水量为

$$q_y = k_y \frac{h}{H} A \quad (3-20)$$

式中, k_y 为与层面垂直的土层平均渗透系数; A 为渗流截面积。

通过任一土层渗水量为

$$q_{iy} = k_{iy} \frac{\Delta H_i}{H_i} A = k_{iy} i_i A \quad (3-21)$$

将式(3-20)、式(3-21)两式分别代入式(3-19),消去 A 后可得

$$k_y \frac{h}{H} = k_{iy} i_i \quad (3-22)$$

而整个土层的水头总损失又可表示为

$$h = i_1 H_1 + i_2 H_2 + \cdots + i_n H_n = \sum_{i=1}^n i_i H_i \quad (3-23)$$

将式(3-23)代入式(3-22)并整理后,即可得到整个土层与层面垂直的平均渗透系数为

$$k_y = \frac{H}{\frac{H_1}{k_{1y}} + \frac{H_2}{k_{2y}} + \cdots + \frac{H_n}{k_{ny}}} = \frac{H}{\sum_{i=1}^n \frac{H_i}{k_{iy}}} \quad (3-24)$$

由式(3-8)、式(3-24)可知,对于成层土,如果各土层的厚度大致相近,而渗透系数相差悬殊时,与层面平行的平均渗透系数将取决于最透水土层的厚度和渗透性,并可近似地表示为 $k'H'/H$, k' 和 H' 分别为最透水土层的渗透系数和厚度;而与层面垂直的平均渗透系数将

取决于最不透水层的厚度和渗透性,并可近似地表示为 $k''H/H''$, k'' 和 H'' 分别为最不透水层的渗透系数和厚度,因此,成层土与层面平行的平均渗透系数总大于与层面垂直的平均渗透系数。

3.3 渗流基本方程

3.3.1 基本方程

上述渗流属简单边界条件下的一维渗流,可以用达西定律进行渗流计算。但实际工程中,边界条件复杂,如围堰工程中的渗流,水流形态往往是二维或三维的,介质内的流动特性逐点不同,不能再视为一维渗流,这时达西定律需要微分形式表达,然后根据边界条件进行求解。本节简要介绍二维渗流方程。

假定:(1)土体完全饱和;(2)土颗粒和水本身不可压缩;(3)渗流服从 Darcy 定律,且渗透系数 k 在渗流过程中保持不变。取图 3-9 所示微元体为对象,根据连续性原理,即单位时间内微元体流入水量与流出水量应相等,建立基本方程。

当渗流场中水头及流速等渗流要素不随时间改变时,这种渗流称为稳定渗流。

现从稳定渗流场中任意点 A 处取一微单元体,面积为 $dx dz$,厚度 $dy=1$,在 x 和 z 方向各有流速 v_x 和 v_z ,如图 3-9 所示。

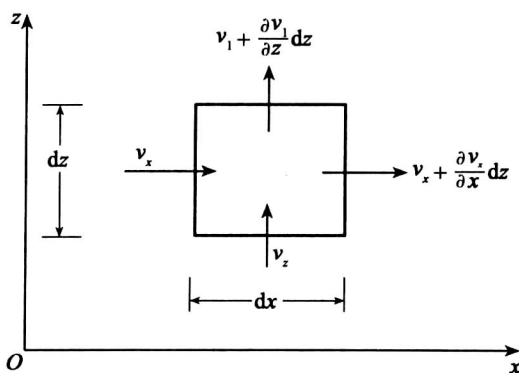


图 3-9 二维渗流连续方程

单位时间内流入单元体的水量为 dq_e , 则

$$dq_e = v_x dz \cdot 1 + v_z dx \cdot 1$$

单位时间内流出这个微单元体的水量为 dq_o , 则

$$dq_o = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dz \cdot 1 + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx \cdot 1$$

根据水流连续原理

$$dq_e = dq_o$$

从而得出

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-25)$$

即为二维渗流连续方程。

再根据达西定律,对于各向异性土:

$$v_x = k_x i_x = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3-26)$$

$$v_z = k_z i_z = k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3-27)$$

式中, k_x, k_z 分别为 x 和 z 方向的渗透系数; h 为测管水头。

将式(3-26)和式(3-27)代入式(3-25)可得出

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (3-28)$$

对于各向同性的均质土, $k_x = k_z$, 则式(3-28)可表达为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (3-29)$$

式(3-29)即为著名的拉普拉斯(Laplace)方程,也是平面稳定渗流的基本方程。通过求解一定边界条件下的拉普拉斯方程,即可求得该条件下的渗流场。

3.3.2 边界条件

在渗流问题中,边界条件主要有以下三种类型:

第一类边界 Γ_1 , 已知水头

$$h|_{\Gamma_1} = h_0(x, y) \quad (3-30)$$

第二类边界 Γ_2 , 已知流量 q , 对于各向同性稳定渗流

$$k \frac{\partial h}{\partial n} |_{\Gamma_2} = -q_0(x, y) \quad (3-31)$$

显然,不透水边界属于第二类边界的特例,即 $q=0$, 从而

$$k \frac{\partial h}{\partial n} |_{\Gamma_2} = 0 \quad (3-32)$$

第三类边界 Γ_3 为混合边界,指含水层边界的内外水头差和交换的流量之间保持一定的线性关系,即

$$h + \alpha \frac{\partial h}{\partial n} = \beta \quad (3-33)$$

式中, α, β 为边界上的已知函数。

现以图 3-10 所示的堤坝渗流为例来说明边界条件。 AB 和 DE 为第一类边界,如果是稳定渗流,这两个边界上的水头是常数。 AE 为第二类的不透水边界, C 为渗流逸出点, CD 为渗流逸出面边界, BC 为自由面边界。此外,两侧截断边界离所关心的区域较远时,可作为第一类边界,也可作为第二类边界(图 3-11)。

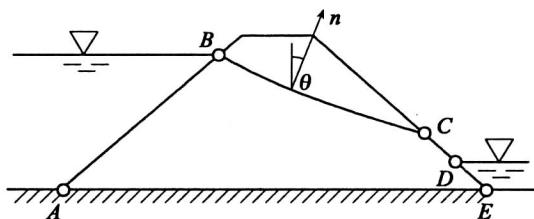


图 3-10 堤坝渗流

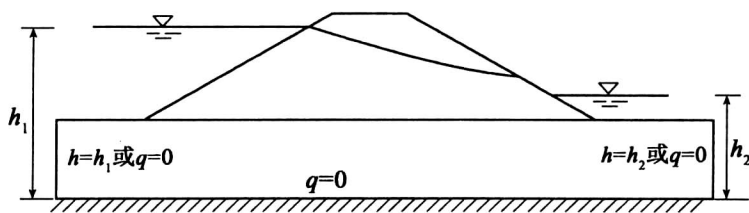


图 3-11 截断边界条件

3.3.3 初始条件

如果渗流场中各点的水头和流速等均不随时间变化,则这种渗流称为稳定渗流。对于稳定渗流,不需要初始条件。在非稳定渗流条件下,水头和流速随时间而变化,需给出渗流场中各点的初始水头,即

$$h|_{t=0} = h_0(x, y, z) \quad (3-34)$$

3.3.4 基本方程的应用

如图 3-12 所示,设一个两层的土样保持常水头土层 1 顶面和土层 2 底面的水头差为 h_1 ,由于渗流只是沿着竖向 z 方向发生,因此式(3-29)可简化为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

$$h = A_1 z + A_2$$

式中, A_1 、 A_2 为积分常数。

根据边界条件,可以求得通过土层 1 的系数:

边界条件 1: 当 $z=0$ 时, $h=h_1$;

边界条件 2: 当 $z=H_1$ 时, $h=h_2$ 。

将边界条件代入上述方程,解得

$$h = -\left(\frac{h_1 - h_2}{H_1}\right)z + h_1 \quad (0 \leq z \leq H_1) \quad (3-35)$$

当水流通过土层 2, 边界条件为:

边界条件 1: 当 $z=H_1$ 时, $h=h_2$;

边界条件 2: 当 $z=H_1+H_2$ 时, $h=0$ 。

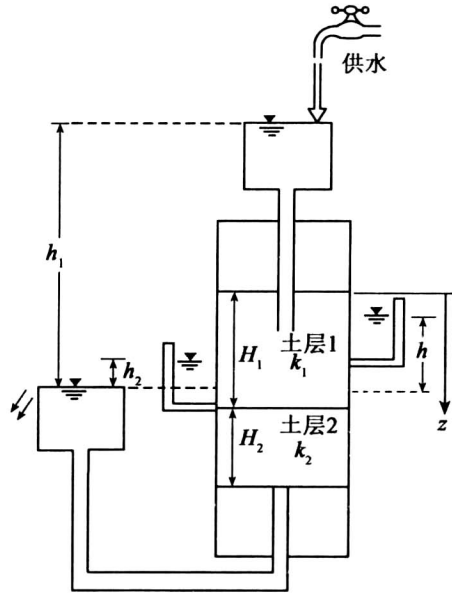


图 3-12 通过二层土的渗流

将边界条件代入上述方程,解得

$$h = -\left(\frac{h_2}{H_2}\right)z + h_2\left(1 + \frac{H_1}{H_2}\right) \quad (H_1 \leq z \leq H_1 + H_2) \quad (3-36)$$

在给定时间内,通过土层 1 的水量和通过土层 2 的水量相等,由此得

$$q = k_1 \frac{h_1 - h_2}{H_1} A = k_2 \frac{h_2 - 0}{H_2} A$$

式中, A 为土样截面积; k_1 、 k_2 分别为土层 1 和土层 2 的渗透系数。

变换上式可得

$$h_2 = \frac{h_1 k_1}{H_1 \left(\frac{k_1}{H_1} + \frac{k_2}{H_2} \right)} \quad (3-37)$$

将式(3-37)代入式(3-35),得

$$h = h_1 \left(1 - \frac{k_2 z}{k_1 H_2 + k_2 H_1} \right) \quad (0 \leq z \leq H_1) \quad (3-38)$$

同样,将式(3-37)代入式(3-36),得

$$h = h_1 \frac{k_1}{k_1 H_2 + k_2 H_1} (H_1 + H_2 - z) \quad (H_1 \leq z \leq H_1 + H_2) \quad (3-39)$$

根据式(3-38)和式(3-39)可得任何位置的水头 h 。

3.4 势流与流网

拉普拉斯方程表明,渗流场内任一点水头是其坐标的函数,知道水头分布,即可确定渗

流场的其他特征。求解拉氏方程一般有四类方法,即数学解析法、数值解法、电模拟法和图解法,其中,图解法简便、快速,在工程中实用性强,故数值分析的结果多整理为流网。

3.4.1 势流与势函数

流体绕 x, y, z 轴旋转分别为

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3-40)$$

式中, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别为绕 x, y, z 轴的旋转角速度。

如果流动是无旋的,即势流,那么 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, 即

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (3-41)$$

任一点的流速都可用势函数 φ 表示,即

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3-42)$$

由连续性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

可得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-43)$$

3.4.2 等势线

典型的渗流问题可视为平面问题,即可以假设在某一方向的任一断面,其渗流特性相同。在一定的边界条件下,求解式(3-43),可得 $\varphi(x, y)$, 并绘制等势线(Equipotential Lines)(图3-13)。等势线表示势能或水头的等值线,即每根等势线上的测压管水位都是齐平的。显然,沿特定等势线 $\varphi = \text{常数}$, 有

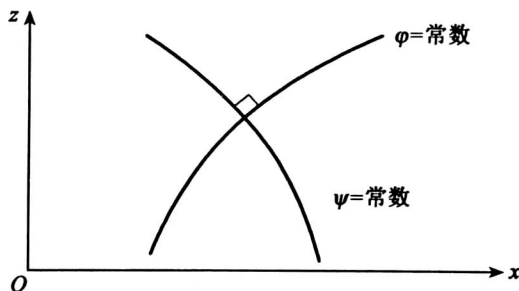


图3-13 等势线与流线

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

可见,等势线的斜率为

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)_{\varphi} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad (3-44)$$

3.4.3 流线

研究表明,对于平面势流也存在函数 ψ ,速度分量可表示为

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, v_z = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-45)$$

将上式代入无旋条件式 $\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, 得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 z} = 0 \quad (3-46)$$

ψ 称为流函数。 $\psi = \text{常数}$ 的曲线的切线方向与水流方向相同,故称为流线 (Seepage Lines), 即水质点的运动路线。上式表明流函数也满足 Laplace 方程。沿流线 $\psi = \text{常数}$, 有

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0 \quad (3-47)$$

可见,流线的斜率为

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)_{\psi} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \quad (3-48)$$

3.4.4 流网

流网 (Flownet) 就是由等势线与流线所组成的网格,它在平面渗流问题的研究中占重要的地位。有了流网,整个场的问题就得到了解决。

3.4.4.1 流网的特征

(1) 流线与等势线互相正交;

由流线与等势线的斜率,很易证明: $\left(\frac{dz}{dx} \right)_{\varphi} \left(\frac{dz}{dx} \right)_{\psi} = \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \right) \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \right) = - \frac{v_x}{v_z} \cdot \frac{v_z}{v_x} = -1$ 。

(2) 流线与等势线构成的各个网格的长宽比为常数。当长宽比为 1 时,网格为曲线正方形,这也是最常见的一种流网。

(3) 相邻等势线之间的水头损失相等。

(4) 各个流槽的渗流量相等。

由这些特征可进一步知道,流网中等势线越密的部位,水力梯度越大,流线越密的部位流速越大。

3.4.4.2 渗流量计算

设上、下游总水头差 H 被划分为 m 等份, 每相邻两等水头线间的差值均为 $\Delta h = H/m$ 。若总流量为 q , 流线所划分的流槽数 (Flow Channel) 数为 n , 则每相邻两流线间的流量为 $\Delta q = q/n$ 。取渗流场中任一网格, 沿流线和等势线的边长分别为 a 和 b , 则该网格的平均水力坡降和渗流速度分别为

$$i = \frac{\Delta h}{a} \quad (3-49)$$

$$v = ki = k \frac{\Delta h}{a} = k \frac{H}{am} \quad (3-50)$$

通过该网格及其流槽的流量为

$$\Delta q = vb = k \frac{b}{a} \frac{H}{m} \quad (3-51)$$

由于流网上的 Δq 及 Δh 处处相等, 所以各网格的长宽比 b/a 相同。

单位宽度流量为

$$q = n\Delta q = kH \frac{b}{a} \frac{H}{m} \quad (3-52)$$

流网法比较简便, 对复杂情况的适用性较强, 而且精度也能满足工程要求, 图 3-14 是基坑开挖中的隔水板桩地基渗流的流网。

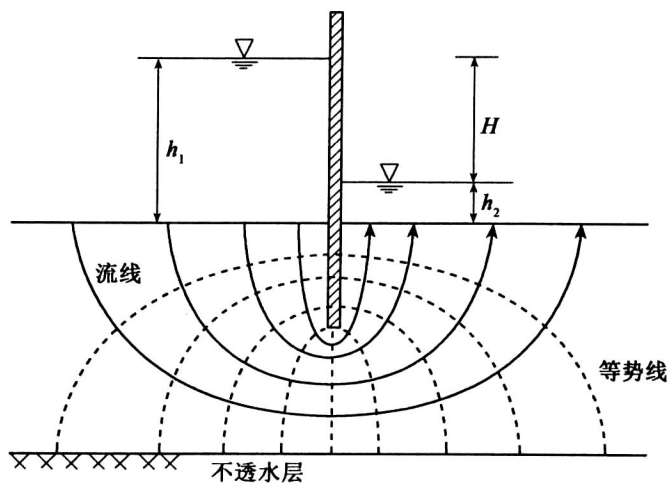


图 3-14 隔水板桩地基渗流的流网

3.5 渗流有限元计算

在非均质及复杂边界条件下, 渗流分析只能采用模型试验或数值方法。有限差分法用于渗流计算较早且较广泛, 但有限元法在复杂条件下更具优越性。

3.5.1 水头变分方程

假设所讨论的渗流问题中没有第三类边界,且浸润面边界进行特殊处理,则在满足第一类边界条件(将在有限元方程组中直接引入)的基础上,仍需满足连续方程和第二类边界条件。设 δh 为水头的变分,则上述两方程的等效积分形式为

$$-\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + Q \right] \delta h d\Omega + \int_{\Gamma_2} \left[k_x \frac{\partial h}{\partial x} l + k_y \frac{\partial h}{\partial y} m + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n + q \right] \delta h d\Gamma = 0$$

或

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (k_i h_{,i})_{,i} \delta h d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_2} k_i h_{,i} n_i \delta h d\Gamma - \int_{\Omega} Q \delta h d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \delta h d\Gamma = 0 \quad (3-53)$$

考虑上式中的第一项积分

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (k_i h_{,i})_{,i} \delta h d\Omega = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (k_i h_{,i} \delta h)_{,i} d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} k_i h_{,i} \delta h_{,i} d\Omega \quad (3-54)$$

根据散度定理,并注意到边界 Γ_1 上的水头变分为零,上式右边第一项可化为

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (k_i h_{,i} \delta h)_{,i} d\Omega = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} k_i h_{,i} n_i \delta h d\Gamma = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_2} k_i h_{,i} n_i \delta h d\Gamma \quad (3-55)$$

将式(3-55)代入式(3-54),再代入式(3-53)得水头变分方程

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} k_i h_{,i} \delta h_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} Q \delta h d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \delta h d\Gamma = 0 \quad (3-56a)$$

即

$$\int_{\Omega} \left[k_x \frac{\partial(\delta h)^T}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial(\delta h)^T}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + k_z \frac{\partial(\delta h)^T}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\delta h)^T Q d\Omega + \int_{\Gamma_2} (\delta h)^T q d\Gamma = 0 \quad (3-56b)$$

3.5.2 变分方程的离散

将土体离散成有限元组合体系,在此基础上对式(3-56)离散化得

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial(\delta h)^T}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial(\delta h)^T}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + k_z \frac{\partial(\delta h)^T}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \right] d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} (\delta h)^T Q d\Omega + \int_{\Gamma_2^e} (\delta h)^T q d\Gamma = 0 \quad (3-57)$$

单元 e 内任一点的水头可用节点水头表示为

$$\mathbf{h} = [N_1 N_2 \cdots N_m] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{h}^e \quad (3-58)$$

式中, m 为单元的节点数; N_i 为形函数; N 为形函数矩阵; \mathbf{h}^e 为单元节点水头向量。将上式代入式(3-57)得

$$\mathbf{H}\mathbf{h} + \mathbf{F} = 0 \quad (3-59)$$

式中, \mathbf{h} 为整体节点水头向量, 而

$$\mathbf{H} = \sum_e \mathbf{H}^e, \quad \mathbf{F} = \sum_e \mathbf{F}^e \quad (3-60)$$

上述求和表示集成而非简单相加。 \mathbf{H}^e 相当于结构计算中单元刚度矩阵, 表示为

$$\mathbf{H}^e = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mm} \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

其元素为

$$h_{ij} = \int_{\Omega} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega \quad (3-62)$$

式(3-60)中的 \mathbf{F}^e 为

$$\mathbf{F}^e = [F_1 F_2 \cdots F_m]^T = - \int_{\Omega} N^T Q d\Omega + \int_{\Gamma_2} N^T q d\Gamma \quad (3-63a)$$

$$F_i = - \int_{\Omega} N_i Q d\Omega + \int_{\Gamma_2} N_i q d\Gamma \quad (3-63b)$$

在式(3-56)及前面其他方程的推导中, 没有涉及渗透系数 k_x, k_y, k_z 对位置坐标的导数, 因此, 上述方程适用于非均质渗流问题, 即各单元可以具有不同的渗透系数。

3.5.3 浸润面边界的处理

在求解方程组(3-60)时, 第一类边界条件直接引入。第二类边界条件已经考虑, 还有浸润面边界条件需要处理。如前所述, 稳定渗流时在浸润面上必须满足条件:

$$h = z \quad (3-64)$$

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} l + k_y \frac{\partial h}{\partial y} m + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n = 0 \quad (3-65)$$

但浸润面的位置事先并不知道。这个问题可以采用迭代法解决: 先假定浸润面的位置, 按给定的边界条件和式(3-65)求解, 得出各点的 h 值以后, 再校核条件式(3-64)是否满足, 若不满足, 调整浸润面的位置, 一般可令浸润面的新坐标 z 等于刚才求出的水头 h , 然后再求解, 通常重复计算五六次即可得到满意的结果。

在上述方法中, 求解域限于饱和区, 故迭代计算中必须不断变动网格。随着网格的变动, 渗流刚度矩阵也将发生变化。因此这种方法比较麻烦, 特别是对于非稳定渗流, 处理起来就更加困难。

采用有限单元法计算出渗流场中水头分布后, 很容易计算流速、流量等。为了直观、计算方便, 通常将结果用流网来表示。

3.6 渗透破坏与控制

渗流引起的渗透破坏问题主要有两大类:一是由于渗流力的作用,使土体颗粒流失或局部土体产生移动,导致土体变形甚至失稳;二是由于渗流作用,使水压力或浮力发生变化,导致土体或结构物失稳。前者主要表现为流砂和管涌,后者则表现为岸坡滑动或挡土墙等构筑物整体失稳。

3.6.1 渗流力

地下水在土体中流动时,由于受到土粒的阻力,引起水头损失,从作用力与反作用力的原理可知,水流经过时必定对土颗粒施加一种渗流作用力。为研究方便,单位体积土颗粒所受到的渗流作用力称为渗流力或动水力。

在图 3-15 的渗透破坏试验中,对土样假想将土骨架和水分开来取隔离体,则对假想水柱隔离体来说,作用在其上的力有:

(1) 水柱重力 G_w 为土中水重力和土粒浮力的反力(等于土粒同体积的水重)之和,即

$$G_w = V_w \gamma_w + V_s \gamma_w = V \gamma_w = L A_w \gamma_w$$

(2) 水柱上下两端面的边界水压力 $\gamma_w h_w$ 和 $\gamma_w h_1$ 。

(3) 土柱内土粒对水流的阻力,其大小应与渗流力相等、方向相反。设单位土体内的渗流力和土粒对水流阻力分别为 J 和 T ,则总阻力为 $T' = T L A_w$,方向竖直向下;而渗透力 $J = T$,方向竖直向上。

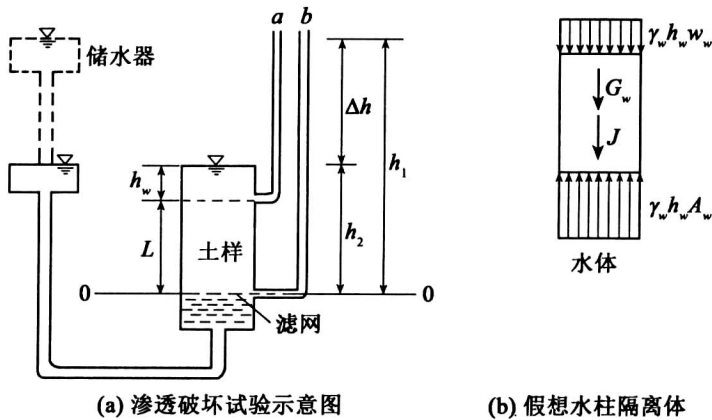


图 3-15 饱和土体中的渗流计算

现考虑假想水柱隔离体的平衡条件,可得

$$\begin{aligned} \gamma_w h_w A_w + G_w + T' &= \gamma_w h_1 A_w \\ T &= \frac{\gamma_w (h_1 - h_w - L)}{L} = \frac{\gamma_w \Delta h}{L} = \gamma_w i \end{aligned}$$

得到

$$J = T = \gamma_w i \quad (3-66)$$

从式(3-66)可知,渗流力是一种体积力,量纲与 γ_w 相同。渗流力的大小和水力梯度成正比,其方向与渗流方向一致。

3.6.2 流砂或流土现象

在图 3-15(a) 的试验装置中,若储水器不断上提,则 Δh 逐渐增大,从而作用在土体中的渗流力也逐渐增大。当 Δh 增大到某一数值,向上的渗流力克服了向下的重力时,土体就要发生浮起或受到破坏。将这种在向上的渗流力作用下,粒间有效应力为零时,颗粒群发生悬浮、移动的现象称为流砂现象,或流土现象。

这种现象多发生在颗粒级配均匀的饱和细、粉砂和粉土层中,它的发生一般是突发性的,对工程危害极大,如图 3-16 所示。

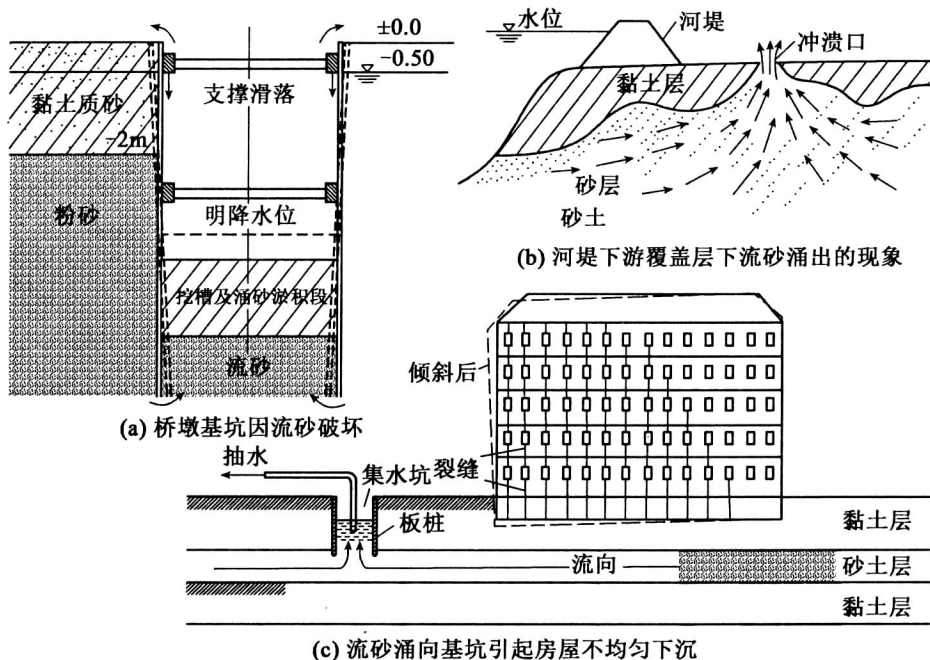


图 3-16 流砂现象引起破坏示例

流砂现象的产生不仅取决于渗流力的大小,同时与土的颗粒级配、密度及透水性等条件相关。

使土开始发生流砂现象时的水力梯度称为临界水力梯度 i_{cr} 。显然,渗流力 $\gamma_w i$ 等于土的浮重度 γ' 时,土处于产生流砂的临界状态,因此临界水力梯度 i_{cr} 为

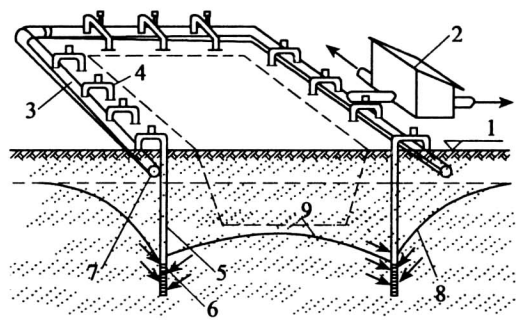
$$i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = (G_s - 1)(1 - n) \quad (3-67)$$

式(3-67)亦表明,临界水力梯度与土性密切相关,研究表明,土的不均匀系数越大, i_{cr} 值

越小;土中细颗粒含量越高, i_{cr} 值越大;土的渗透系数越大,临界水力梯度越低。

流砂现象的防治原则是:

- (1)减小或消除水头差,如采取基坑外的井点降水法降低地下水位(图 3-17),或采取水下挖掘;
- (2)增长渗流路径,如打板桩;
- (3)在向上渗流出口处地表用透水材料覆盖压重以平衡渗流力;
- (4)土层加固处理,如冻结法、注浆法等。



1—地面;2—水泵房;3—总管;4—弯联管;5—井点管;6—滤管;
7—原有地下水位线;8—降低后地下水位线;9—基坑

图 3-17 轻型井点降低地下水位全貌图

3.6.3 管涌现象和潜蚀作用

在渗透水流作用下,土中的细颗粒在粗颗粒形成的孔隙中移动,以至流失;随着土的孔隙不断扩大,渗透速度不断增加,较粗的颗粒也相继被水流逐渐带走,最终导致土体内形成贯通的渗流管道,如图 3-18 所示,造成土体塌陷,这种现象称为管涌。可见,管涌破坏一般有个时间发展过程,是一种渐进性质的破坏。

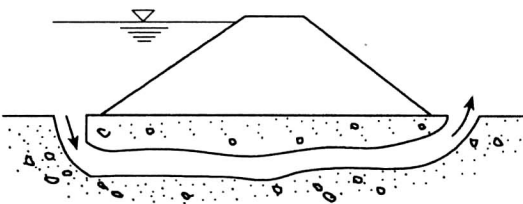


图 3-18 通过坝基的管涌图

在自然界中,在一定条件下同样会发生上述渗透破坏作用,为了与人类工程活动所引起的管涌相区别,通常称之为潜蚀。潜蚀作用有机械的和化学的两种。机械潜蚀是指渗流的机械力将细土粒冲走而形成洞穴;化学潜蚀是指水流溶解了土中的易溶盐或胶结物使土变

松散,细土粒被水冲走而形成洞穴,这两种作用往往是同时存在的。

土是否发生管涌,首先取决于土的性质,管涌多发生在砂性土中,其特征是颗粒大小差别较大,往往缺少某种粒径,孔隙直径大且相互连通。无黏性土产生管涌必须具备两个条件:

(1)几何条件:土中粗颗粒所构成的孔隙直径必须大于细颗粒的直径,这是必要条件,一般不均匀系数 $C_u > 10$ 的土才会发生管涌。

(2)水力条件:渗流力能够带动细颗粒在孔隙间滚动或移动是发生管涌的水力条件,可用管涌的水力梯度来表示。但管涌临界水力梯度的计算至今尚未成熟。表 3-1 给出了一些经验数据。对于重大工程,应尽量由试验确定。

表 3-1 发生管涌的临界水力坡降

临界水力坡降	级配连续土	级配不连续土
极限值	0.2 ~ 0.4	0.1 ~ 0.3
允许值	0.15 ~ 0.25	0.1 ~ 0.2

防治管涌现象,一般可从下列两个方面采取措施:改变几何条件,在渗流溢出部位铺设反滤层是防止管涌破坏的有效措施;改变水力条件,降低水力梯度,如打板桩。

第4章 岩土强度理论

材料强度通常是指材料破坏时的应力状态。在简单应力条件下,可以采用试验方法确定材料的强度;而在复杂应力条件下,问题却变得非常困难,这是因为试验仪器的制造和使用都不容易,且复杂应力状态有无数组合,单靠试验不可能解决问题。可行的途径是基于简单应力条件下的试验结果,结合理论假设建立复杂应力状态下的破坏条件,即破坏时的应力状态表达式。我们把全面描述和说明材料强度特性的理论称为强度理论(Strength Theory)或称为破坏准则(Failure Criterion),包括基本假设、破坏条件以及强度参数的规律。有时人们也把破坏条件称为破坏准则。

强度理论研究的重要性是显而易见的。众所周知,结构的力学分析可以得到应力和应变分布,但这并不是问题的终结,最后的步骤是根据结构物中的应力或应变状态判断材料是否破坏,这就需要建立材料破坏的强度理论。此外,强度理论研究对变形本构理论的发展也具有重大意义,因为强度准则通常是应力或应变空间中的极限面,从极限面可以蜕化出相应的屈服面,而屈服面方程是建立弹塑性本构方程所必需的。

到目前为止,已经提出了许多强度理论。本章仅介绍若干种常用的理论并对它们做出评述。内容包括:①强度条件的形式;②经典强度理论;③广义强度理论;④统一强度理论。

4.1 强度条件的形式

强度理论或破坏准则涉及材料破坏机理的说明、数学模型的建立和模型参数规律性的研究。其中,数学模型通常被称为强度条件或破坏条件。一般认为,建立材料的强度条件应基于破坏机理。但人们也常采用唯象的方法,从经验出发根据试验资料进行拟合。建立强度理论的基本思路是:通过某些简单的试验,获取材料在比较简单应力状态下的强度条件;然后通过某种理论,把这些试验结果推广到复杂应力状态中去,求取普遍形式的强度条件。

4.1.1 第一种形式

应力空间(Stress Space):以应力分量作为坐标轴的假想空间。物体中任一点的应力状态可用应力空间中的一点来表示,称为应力点。一点应力状态的变化可用应力点在应力空间的运动轨迹描述,应力点的运动轨迹称为应力路径。我们知道,一点的应力状态由六个独立应力分量决定,故一般的应力空间是六维的。如果材料是各向同性的,则主应力方向无关紧要。此时,可以用三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示一点的应力状态。以主应力为坐标轴形成的空间称为主应力空间(Main Stress Space)。必须指出,应力空间既非几何空间又非物理空间,它只是为了描述物体中一点的应力状态而引用的一个多维空间。

通常假设应力空间中存在一个曲面,当物体中一点的应力落在它所包围的区域内时,材料处于弹性状态,而在曲面上的点表示材料已发生或将要发生塑性变形,这个面称为屈服面。对于应变硬化材料,屈服面随塑性变形的增大而逐渐扩大。到达一定程度时材料发生破坏,此时的应力状态构成破坏面。对于理想塑性材料,破坏面与屈服面重合。破坏面的表达式(破坏时应力状态满足的条件)就是强度条件,其一般形式可以写成

$$f_f(\sigma_{ij}, k_f) = 0 \quad (4-1)$$

$f_f(\sigma_{ij}, k_f)$ 称为破坏函数,式中,下标 f 表示破坏; k_f 为破坏参数。如果材料是各向同性的,则一点是否破坏与主应力方向无关,此时强度条件可写成

$$f_f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_f) = 0 \quad (4-2)$$

4.1.2 第二种形式

根据弹塑性力学,应力张量 σ_{ij} 的第一、第二、第三不变量 I_1 、 I_2 、 I_3 与主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 具有如下关系:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_m \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (4-3)$$

式中, σ_m 为平均应力,或称为静水应力。

此外,应力张量 σ_{ij} 可以分解为应力球张量 $\sigma_m \delta_{ij}$ 和应力偏量 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$ 之和,而 s_{ij} 的第一、第二、第三不变量的表达式为

$$\begin{aligned} J_1 &= s_{ii} = s_x + s_y + s_z = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\ J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ J_3 &= s_x s_y s_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2 = s_1 s_2 s_3 \end{aligned} \quad (4-4)$$

显然, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, (I_1, I_2, I_3) 和 (J_1, J_2, J_3) 这三组量是相互确定的,都可以表示一点的应力状态。这样,强度条件可写成

$$f_f(I_1, I_2, I_3, k_f) = 0 \quad (4-5a)$$

或

$$f_f(I_1, J_2, J_3, k_f) = 0 \quad (4-5b)$$

4.1.3 第三种形式

在主应力空间中,等倾线或空间对角线 L 与3个坐标轴等倾角,即3个方向余弦均为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。空间对角线上的3个主应力都相等,故又称为等压线。与等压线正交的平面称为偏平面,其方程为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3} r \quad (4-6)$$

式中, r 为偏平面到坐标原点的距离。通过坐标原点的偏平面称为 π 平面,其方程显然为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (4-7)$$

设主应力空间三个坐标轴的单位基矢量分别为 e_1, e_2, e_3 ，则任意一点 $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 的应力矢量(图 4-1) OP 为

$$OP = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3$$

等倾线的单位矢量为

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_3$$

OP 在等倾线上的分量 OP'' 为静水应力分量,其大小为

$$|OP''| = OP \cdot N = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_m \quad (4-8)$$

OP 在 π 平面上的分量 OP' 为应力偏量分量,其大小为

$$|OP'| = \sqrt{|OP|^2 - |OP''|^2} = \sqrt{2} \sqrt{J_2} \quad (4-9)$$

将轴 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 向 π 平面上投影,所得为三个夹角互成 120° 的轴,分别用 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ 表示,显然,它们和相应的原坐标轴的夹角余弦为 $\sqrt{2/3}$ 。在 π 平面上取坐标系 Oxy , 其 y 轴与 σ'_2 轴重合(图 4-2)。为了确定任一点 $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 在 π 平面上的投影点 P' 的坐标 (x, y) , 可分别考虑点 $(\sigma_1, 0, 0), (0, \sigma_2, 0)$ 和 $(0, 0, \sigma_3)$ 的坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 和 (x_3, y_3) , 而

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

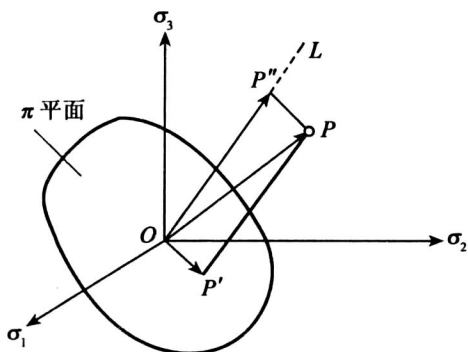


图 4-1 应力矢量

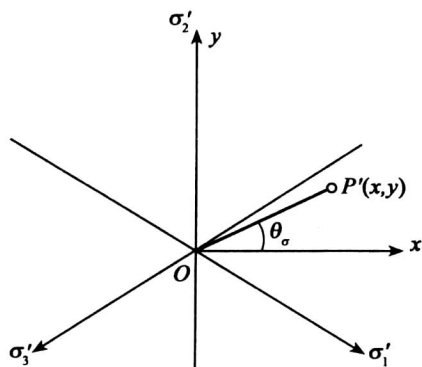


图 4-2 Lode 角 θ_σ

将点 $(\sigma_1, 0, 0)$ 向 π 平面上投影,投影点必落在 σ'_1 轴上,距离坐标原点 $\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{3}}$;再向 x, y 轴投影,可得

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sigma_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 30^\circ = \sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 &= \sigma_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 120^\circ = -\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\}$$

即 $(\sigma_1, 0, 0)$ 之投影点的坐标为 $(\sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sigma_1 \sqrt{6})$ 。同理,可知点 $(0, \sigma_2, 0)$ 和 $(0, 0, \sigma_3)$ 之投影点的坐标分别为 $(0, \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{3}})$ 和 $(-\sigma_3 \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sigma_3 \sqrt{6})$ 。于是, $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 点在 π 平面上的投影点 P' 的坐标为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), y = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}} \quad (4-10)$$

且

$$\tan \theta_\sigma = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_\sigma \quad (4-11a)$$

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (4-11b)$$

式中, θ_σ 称为Lode角,表示偏应力的方向,即应力矢量在 π 平面上的投影与 σ'_2 轴之垂线 x 轴间的夹角(图4-2); μ_σ 称为Lode参数。

可见,一点应力状态的静水应力分量和应力偏量分量的大小分别由 σ_m 和 J_2 确定,应力偏量分量的方向由 θ_σ 确定。这样,组合 $(I_1, J_2, \theta_\sigma)$ 或 $(\sigma_m, J_2, \theta_\sigma)$ 也能表示一点的应力状态,破坏条件可写成

$$f_f(I_1, J_2, \theta_\sigma, k_f) = 0 \quad (4-12)$$

在岩土力学中,常用广义剪应力 q 反映复杂应力状态下材料受剪切的程度,用广义剪应变 ε_s 反映复杂应力状态下材料的剪切变形,它们分别定义为

$$q = \sqrt{3J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\varepsilon_s = \frac{2\sqrt{J'_2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (4-13)$$

此外,平均应力 σ_m 也称为广义正应力,常用 p 表示,即

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m$$

这样,应力组合 (p, q, θ_σ) 也表示一点的应力状态,破坏条件可写成

$$f_f(p, q, \theta_\sigma, k_f) = 0 \quad (4-14)$$

4.1.4 破坏曲线

破坏面与 π 平面的交线称为 π 平面上的破坏曲线,破坏面与子午面的交线称为子午面上的破坏曲线,即破坏面的子午线。显然,在式(4-12)中令 $I_1 = \text{常数}$,可得偏平面上的破坏曲线,令 $\theta_\sigma = \text{常数}$,可得子午线。

在岩土力学中,通常采用 $\sigma_2 = \sigma_3$ 的常规三轴试验研究强度和变形特性,此时 $\mu_\sigma = -1$,这就意味着忽略了中间主应力 σ_2 或 μ_σ 的影响,破坏条件成为

$$f_f(p, q, k_f) = 0 \quad (4-15)$$

这样就可以在 pq 平面上研究破坏曲线的形状。破坏曲线具有如下特性:

(1) 破坏曲线是一条封闭曲线。材料在初始屈服曲线以内,处于弹性状态;如果屈服曲线不封闭,则表示在不封闭处材料将出现永不屈服的状态,这是不可能的。因此,屈服曲线必须封闭。对于岩土类材料,在静水压力屈服时,屈服曲线就是静水压力线,投影到偏平面就是偏平面上的坐标原点。

(2) 屈服曲线相对于坐标原点为外凸曲线。

(3) 对拉压屈服曲线相同的金属类材料,屈服曲线为 12 个 30° 的扇形对称图形。

4.1.5 岩土类材料的屈服与破坏特性

岩土类材料不同于金属材料的屈服与破坏特性主要有以下几点:

(1) 一般的岩土类材料都具有应变硬化或软化特性,故屈服与破坏函数不同。

(2) 三个主应力或三个应力不变量都对屈服或破坏有影响,即不仅代表剪应力的 $\sqrt{J_2}$ 影响着屈服与破坏,而且静水压力 p 及 q 或偏应力第三不变量 J_3 (θ_σ 及 μ_σ) 对屈服与破坏都有影响。

(3) 单纯的静水压力也可以产生屈服。

(4) 具有 S-D 效应,即拉压屈服与破坏强度不同。

(5) 高压下,屈服及破坏与静水压力呈非线性关系。

(6) 除坚硬的岩块、混凝土等可以承受一定的拉力破坏外,一般的岩土破坏都属于剪切破坏。例如,岩石和土的无侧限抗压试验看似压缩破坏,实际上是剪切破坏。

(7) 初始为各向异性。

一个较好的岩土类材料屈服与破坏准则或条件不仅应当尽量满足或反映上述岩土类材料的屈服与破坏特性,而且还应当满足屈服曲面外凸性的要求以及材料参数较少且易于测定;在数学方面,应尽量符合简单、实用等要求。下面在介绍各种岩土的屈服与破坏准则之后,将按照上述各项要求,对各种屈服与破坏准则进行评价与比较。

4.2 经典强度理论

4.2.1 Coulomb-Mohr 屈服准则

在岩土力学中,最广泛应用的是 Coulomb-Mohr 准则,简称 C-M 准则。该理论认为,如果过一点的某个面上剪应力达到该面的抗剪强度,则该点破坏,其数学表达式为

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (4-16)$$

很显然,抗剪强度参数一定时,一点破坏与否将取决于该点的最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3 。过该点任一截面上的应力可用 Mohr 圆表示(图 4-3)。当 Mohr 圆与抗剪强度曲线相切时,切点代表的截面上剪应力等于抗剪强度。此时有

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 \cot \varphi}$$

或

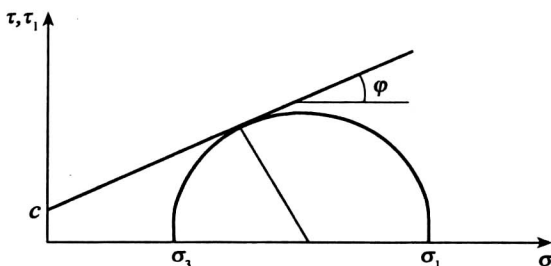


图 4-3 一点应力极限状态

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) + 2c \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \quad (4-17a)$$

或

$$\sigma_3 = \sigma_1 \tan^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2}) - 2c \tan(45^\circ - \frac{\varphi}{2}) \quad (4-17b)$$

或

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \varphi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi \quad (4-17c)$$

或

$$f_j = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi - \left(\cos \theta_\sigma + \frac{\sin \theta_\sigma \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{J_2} + c \cos \varphi = 0 \quad (4-17d)$$

式中, Lode 角 θ_σ 为

$$\theta_\sigma = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right) \text{ 或 } \sin 3\theta_\sigma = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \quad (4-18)$$

根据不变量 J_3 的取值特点, $\sin 3\theta_\sigma$ 的变化周期为 $\pm\pi/2$, 故 θ_σ 的变化范围为 $[-\pi/6, \pi/6]$ 。

为研究 C-M 破坏曲线的形状, 在 π 平面上取坐标系 Oxy , 其 y 轴与 σ_2' 轴重合 (图 4-4)。 $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 点在 π 平面上的投影点 P' 坐标为式

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3), y = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}} \quad (4-19)$$

注意到 $\sigma_i = s_i + \sigma_m, s_1 + s_2 + s_3 = 0$, 式 (4-19) 成为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (s_1 - s_3), y = \frac{2s_2 - s_1 - s_3}{\sqrt{6}} = -\frac{3(s_1 + s_3)}{\sqrt{6}} \quad (4-20)$$

上式是普遍的, 对于 π 平面上 $\sigma_m = 0$ 的应力点当然仍成立。

在 π 平面上, $\sigma_m = 0$, 强度条件 (4-17c) 成为

$$\frac{s_1 - s_3}{2} = c \cos \varphi + \frac{s_1 + s_3}{2} \sin \varphi \quad (4-21)$$

这就是破坏面与 π 平面的交线, 即破坏曲线。如果点 $P'(x, y)$ 在破坏曲线上, 则该点坐标必

满足上式。将式(4-20)代入上式得

$$\frac{x}{2} = c \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{6}} y \quad (4-22)$$

若 $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$, 则上述方程表示图 4-4 中的线段 AB; 其他情况下可得该图中的其他线段。可见, C-M 准则的破坏曲线为不等角六边形。由于土强度随静水压力的增大而提高, 故 C-M 准则的破坏面为一不等角的六棱锥面, 其中心线与 L 线重合 (图 4-5)。

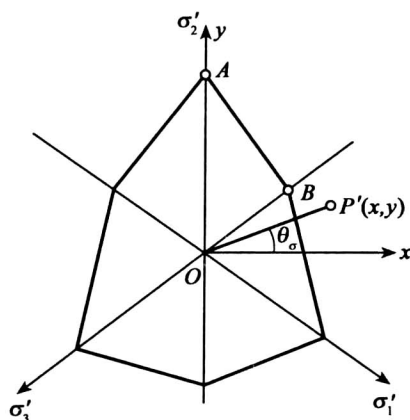


图 4-4 破坏曲线

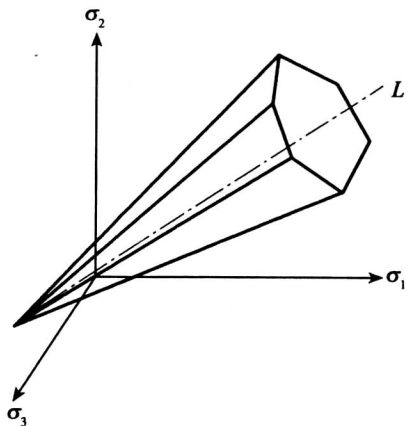


图 4-5 破坏面

C-M 准则的最大优点是, 它能反映岩土类材料的抗压强度不同的 S-D 效应与对正应力的敏感性, 而且简单实用。材料参数 c, φ 可以通过各种不同的常规试验仪器和方法测定。因此, C-M 准则在岩土力学和塑性理论中得到广泛应用。但是, C-M 准则不能反映 σ_2 对屈服和破坏的影响及单纯静水压力引起的岩土屈服特性, 而且屈服面有棱角。不便于塑性应变增量计算, 这就给数值计算带来困难。因此, 二十多年来, 理论界对 C-M 准则提出了许多的修正, 同时提出了许多新的岩土屈服与破坏准则。

4.2.2 Tresca 准则

1864 年, Tresca 针对金属材料提出了最大剪应力屈服准则, 即当材料的最大剪应力达到某一极限值 k_f 时, 材料产生屈服。因此, 它是 C-M 准则在 $\varphi = 0$ 时的特殊情况, 其最简单形式为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_f \quad (4-23)$$

当材料的单轴抗拉强度等于单轴抗压强度且强度值为 R 时, $k_f = R/2$, 所以有

$$\sigma_1 - \sigma_3 = R = 2k_f \quad (4-24)$$

当不知道主应力大小次序时, 式(4-24)可写成

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = R \quad (4-25a)$$

或

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = R \quad (4-25b)$$

或

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = R \quad (4-25c)$$

或

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - R^2][(\sigma_3 - \sigma_2)^2 - R^2][(\sigma_2 - \sigma_1)^2 - R^2] = 0 \quad (4-25d)$$

式(4-25a)表明它和平均应力 σ_m 及 σ_3 无关,故在应力空间中,它表示两个平行于 σ_3 轴和空间对角线或等倾线 L 的平面。同理,式(4-25b)表示两个平行于 σ_1 轴和 L 的平面,式(4-25c)表示两个平行于 σ_2 轴和 L 的平面。由这 6 个平面组成的破坏面是一个以 L 为轴线的正六棱柱面,破坏面与 π 平面的交线即破坏曲线是一个正六边形(图 4-6)。在平面应力状态下,一个主应力为零。若令 $\sigma_3 = 0$,则 Tresca 准则变为

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = R \text{ 或 } |\sigma_2| = R \text{ 或 } |\sigma_1| = R \quad (4-26)$$

以 σ_1, σ_2 为坐标轴建立直角坐标系,则在此坐标系中 Tresca 准则对应于斜六边形(图 4-7)。

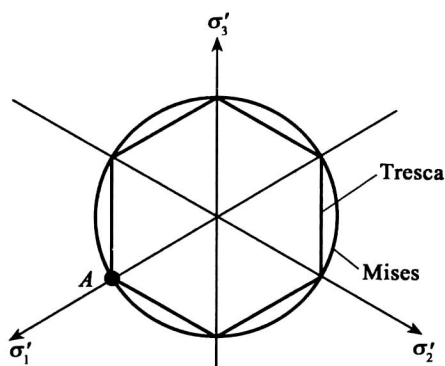


图 4-6 破坏曲线

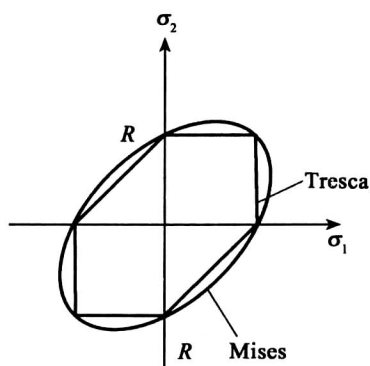


图 4-7 平面问题

在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 轴上选三个点,即 $(\sigma_1, 0, 0)$, $(0, \sigma_2, 0)$ 和 $(0, 0, \sigma_3)$ 。注意到, L 是等倾线, $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ 和相应的原坐标轴的夹角余弦为 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 这样,上述应力点在 π 平面上的投影落在 $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ 轴上,距原点分别为 $\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{3}}, \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{3}}, \sigma_3 \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

由于 $(R, 0, 0)$ 是破坏面上的一点,其在 π 平面上的投影点为 A (图 4-6),故原点到六角形顶点的距离为 $R \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

对于土,参数 k_f 可通过无侧限压缩试验确定。此时, $\sigma_1 = q_u$ (无侧限抗压强度), $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 故 $k_f = \frac{q_u}{2}$ 。也可通过不排水三轴试验确定,此时 $k_f = \tau_f = c_u$ 。

Tresca 准则只考虑了一个主剪应力,故也称为单剪应力强度理论。该理论的优点在于,当主应力大小顺序已知时,表达式简单,使用起来非常方便。但当不知道主应力大小顺序时,表达式过于复杂。此外,这个理论没有考虑中间主应力的影响,也没考虑材料的摩擦性质。

4.2.3 Mises 准则与 Drucker-Prager 准则

4.2.3.1 Mises 准则

针对 Tresca 屈服准则没有考虑 σ_2 对屈服与破坏的影响以及屈服面有棱角的缺陷, Mises 在对金属材料实验资料分析的基础上, 于 1913 年提出了同时考虑三个主应力影响的能量屈服准则, 后人称为 Mises 准则. Mises 准则的屈服函数可以表示为

$$f = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{6} k_M = 0 \quad (4-27a)$$

或

$$f = \sqrt{J_2} - k_M = 0 \quad (4-27b)$$

$$f = \tau_8 - \sqrt{\frac{2}{3}} k_M = 0 \quad (4-27c)$$

$$f = r_\sigma - \sqrt{2} k_M = 0 \quad (4-27d)$$

式中, k_M 为 Mises 材料屈服常数, 由试验确定, 当进行单向拉压试验时, $k_M = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$; 当进行纯剪切试验时, $k_M = \tau_s$; τ_8 为八面体表面剪应力; r_σ 为屈服圆柱面的半径, 其值等于应力偏量 τ_σ 的大小; σ_s 和 τ_s 分别为材料的抗拉屈服极限和剪切屈服极限。

式(4-27a)说明 Mises 屈服准则与三个主应力都有关。由于 J_2 与材料的形变能有关, 因此, 式(4-27b)说明当材料的形变比能达到一定程度时, 材料开始屈服, 故 Mises 准则称为能量屈服准则; 如果将其视为破坏准则, 则 Mises 准则就是材料力学中的能量强度理论。式(4-27c)说明八面体剪应力达到一定值时材料开始屈服, 而式(4-27d)说明 Mises 准则与应力第一不变量 I_1 及第三不变量 J_3 或 θ_σ 无关, 在偏平面上为 $r_\sigma = \tau_\sigma$ 不变的常量。因此, 在主应力空间, Mises 准则为一个以空间对角线或静水压力线为轴的圆柱体面, 圆柱半径为 $r_\sigma = \tau_\sigma$, 如图 4-8(a)、(b)所示; 在 $\sigma_2 = 0$ 的平面上为一个以原点为中心的椭圆, 如图 4-8(c)所示。

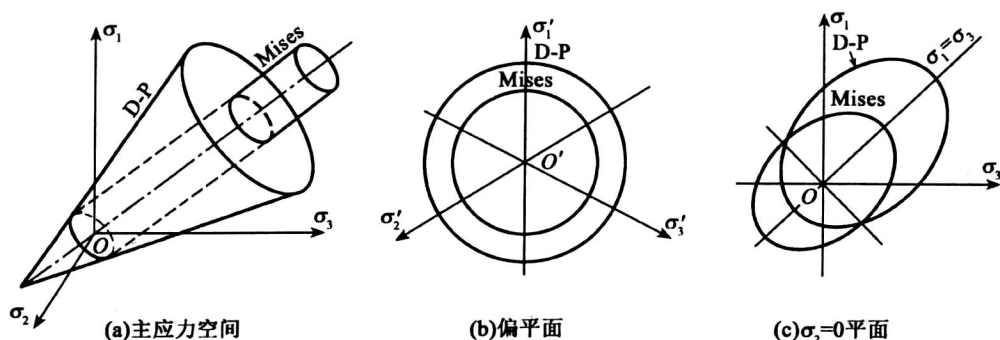


图 4-8 Mises 屈服准则

Tresca 准则属于最大剪应力屈服准则, 而 Mises 准则属于能量屈服准则。二者的差别可以通过简单的拉压和纯剪切试验测定的屈服参数进行比较, 或通过偏平面上的屈服曲线进

行比较,如表 4-1 和图 4-9 所示,表中 σ_s 和 τ_s 分别为材料的抗拉(压)屈服极限和剪切屈服极限,下标 M 和 T 分别表示与 Mises 和 Tresca 准则相对应的屈服极限或材料参数。由表 4-1 可以看出,当 Mises 准则成立时有 $\sigma_s=\sqrt{3}\tau_s$,当 Tresca 准则成立时 $\sigma_s=2\tau_s$ 。金属材料的试验结果证明 Mises 更加符合实际。这说明中间主应力 σ_2 对屈服是有影响的。如果规定 Mises 准则与 Tresca 准则在单向拉压时拟合,即 $\sigma_{sM}=\sigma_{sT}=\sigma_s$,则 Mises 准则为 Tresca 准则的外接圆,其半径为 $r_\sigma=\sqrt{2}k_M=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ 。这时,二者剪切屈服极限之比为 $\frac{\tau_{sM}}{\tau_{sT}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=1.155$ 。如果规定二者的剪切屈服极限相同,即 $\tau_{sM}=\tau_{sT}=\tau_s$,则 Mises 准则是 Tresca 准则的内切圆,其半径 $r_\sigma=\sqrt{2}\tau_s$,这时二者的单向拉(压)屈服极限之比为 $\frac{\tau_{sT}}{\tau_{sM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$,如图 4-9 所示。

表 4-1 Mises 与 Tresca 屈服准则比较

	单向拉压	纯剪切	准则成立时
Mises 准则	$k_M=\sigma_s/\sqrt{3}$	$k_M=\tau_s$	$\sigma_s=\sqrt{3}\tau_s$
Tresca 准则	$k_T=\sigma_s/\sqrt{3}$	$k_T=\tau_s$	$\sigma_s=2\tau_s$
当取 σ_s 相同时	$k_M=\frac{2}{\sqrt{3}}k_T$	—	$\tau_{sM}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tau_{sT}$
当取 τ_s 相同时	—	$k_M=k_T$	$\sigma_{sM}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{sT}$

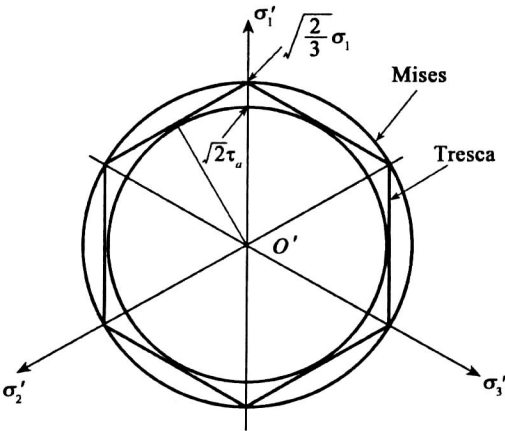


图 4-9 Tresca 与 Mises 准则比较

4. 2. 3. 2 Drucker-Prager 屈服准则

为了克服 Mises 准则没有考虑静水压力对屈服与破坏的影响,Drucker 与 Prager 于 1952 年提出了考虑静水压力影响的广义 Mises 屈服与破坏准则,即 Drucker-Prager 准则,简称为 D-P 屈服或破坏准则。D-P 准则或广义 Mises 准则的屈服函数为

$$f(I_1, \sqrt{J_2}) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0 \quad (4-28a)$$

$$f(p, q) = q - 3\sqrt{3}\alpha p - \sqrt{3}k = 0 \quad (4-28b)$$

$$f(\sigma_\sigma, \tau_\sigma) = \tau_\sigma - \sqrt{6}\alpha\sigma_\sigma - \sqrt{2}k = 0 \quad (4-28c)$$

式中, α 和 k 为 D-P 准则材料常数。按照平面应变条件下的应力和塑性变形条件, Drucker 与 Prager 导出 α 、 k 与 C-M 准则的材料常数 φ 、 c 之间的关系为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}} = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{9+12\tan^2\varphi}} \\ k &= \frac{\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{3+\sin^2\varphi}} = \frac{3c}{\sqrt{9+12\tan^2\varphi}} \end{aligned} \quad (4-29)$$

式(4-28a)和式(4-28b)说明 D-P 准则反映了 I_1 和 J_2 或 p 和 q 对屈服或破坏的影响;式(4-28c)则说明在偏平面上($p = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho_\sigma = \text{const}$, ρ_σ 为偏平面至原点的距离,其值等于偏平面上的

的正应力分量 σ_σ) 或 π 平面上($\rho_\sigma = 0$) D-P 准则的屈服曲线为一个以 $r_\sigma = \sqrt{2J_2}$ 为半径的圆。在主应力空间, D-P 准则的屈服曲面为一个以空间对角线为轴的圆锥面;在 $\sigma_2 = 0$ 的平面上, D-P 准则的屈服曲线为一个圆心在 $\sigma_1 = \sigma_3$ 轴上但偏离了原点的椭圆,如图 4-10 所示。当 $\alpha = 0$ 时, D-P 准则就还原为 Mises 准则。因此, D-P 准则是同时考虑了平均应力或体应变能及偏应力第二不变量或形变能的能量屈服准则。

式(4-29)的 D-P 准则的材料常数 α 、 k 是按照平面应变条件下与 C-M 准则的屈服极限相同的条件导出的。实际上, D-P 准则与 C-M 准则有多种不同的拟合方法,例如,在一般的三维应力条件下,使二者的锥尖位于同一点且使一个锥面子午线相重合,可以得到一般三维应力条件下 α 、 k 与 φ 、 c 的关系;在平面应力条件下,只要保证在 σ_1 - σ_3 平面上的屈服曲线有两点拟合,就可得到平面应力条件下 α 、 k 与 φ 、 c 的关系。图 4-10(a)、(b) 和表 4-2 分别表示各种不同 D-P 与 C-M 准则拟合条件及相应的 α 和 k 值,其中,折中圆为 C-M 准则的压缩圆与拉伸圆的平均圆。

应当提请注意的是,对于平面应力情况,当 $\alpha \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时,在 σ_1 - σ_3 平面的屈服曲线变为椭圆,

如图 4-8 所示;当 $\alpha \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时, σ_1 - σ_3 平面的屈服曲线就不再是椭圆,而变为抛物线或双曲线了。

只要由实验测定了 C-M 准则的材料常数 φ 和 c , 就可由表 4-2 求得各种不同拟合条件下 D-P 准则的材料常数 α 和 k 。当然,也可直接由真三轴实验直接测定各种不同应力和应变条件的 α 和 k 值。

由表 4-2 和图 4-10(a) 可以看出,平面应变条件下 D-P 准则的 α 和 k 值就是当 D-P 准则的圆锥体与 C-M 准则六边锥体内切时的 α 和 k 值。

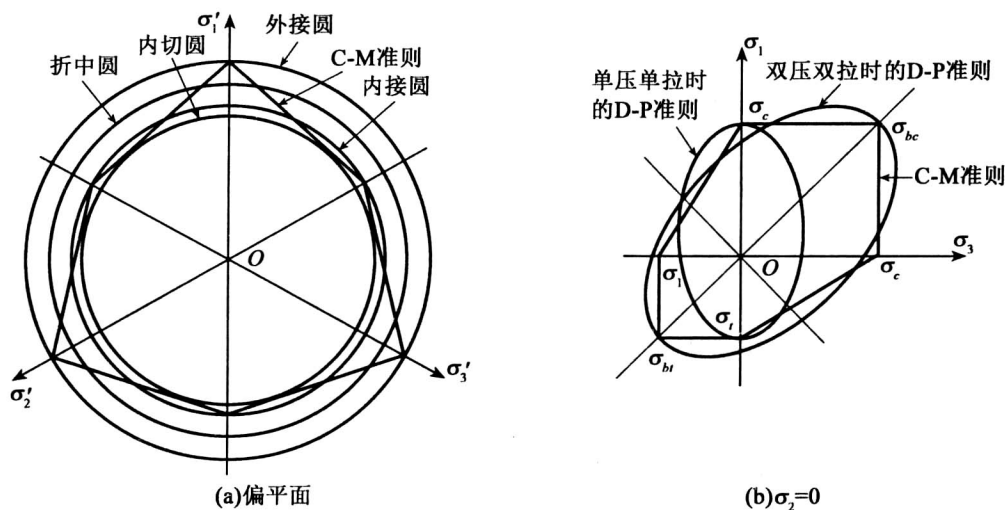


图 4-10 D-P 准则与 C-M 准则的拟合关系

表 4-2 D-P 准则与 C-M 准则不同拟合条件下的 α 和 k 值

	拟合条件	应力 (应变) 条件	α	k
一般三维应力	压缩锥	$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ $\theta_\sigma = -30^\circ$	$\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$	$\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$
	拉伸锥	$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ $\theta_\sigma = +30^\circ$	$\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$	$\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$
	折中锥	压缩锥与拉伸锥平均值	$\frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{3^2-\sin^2\varphi}$	$\frac{6\sqrt{3}c\cos\varphi}{3^2-\sin^2\varphi}$
	内切锥 (平面应变)	$\varepsilon_2 = 0$ $\tan\theta_\sigma = -\sin\varphi/\sqrt{3}$	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$	$\frac{\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$
平面应力	单压 σ_c 单拉 σ_t	$\sigma_1 = \sigma_c, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ $\sigma_3 = \sigma_t, \sigma_2 = \sigma_1 = 0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$	$\frac{2}{\sqrt{3}}c\cos\varphi$
	双压 双拉	$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_c, \sigma_2 = 0$ $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_t, \sigma_2 = 0$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\varphi$	$\frac{2}{\sqrt{3}}c\cos\varphi$

Mises 和 D-P 准则具有如下特点：

- (1) Mises 准则和广义 Mises 或 D-P 屈服准则同属于能量屈服与破坏准则，它们都考虑了中间主应力 σ_2 对屈服与破坏的影响；屈服曲面光滑没有棱角，有利于塑性应变增量方向的确定和数值计算。
- (2) 二者都比较简单，材料参数少，且易于试验测定或由 C-M 准则材料常数换算。

(3) Mises 准则没有考虑静水压力对屈服的影响,因此一般只适于金属类材料或 $\varphi=0$ 的软黏土的总应力分析;与 Mises 准则不同,D-P 准则考虑了静水压力对屈服与破坏的影响,特别适用于岩土类材料的本构模型。

(4) 二者都没有考虑单纯的静水压力 P 可以引起岩土类材料屈服的特点,同时没有考虑屈服与破坏的非线性特性。

(5) 二者均未考虑岩土类材料在偏平面上拉压强度不同的特性。

4.2.4 Lade-Duncan 准则及 Lade 准则

针对 C-M 等单一剪应力屈服或破坏准则及 D-P 等能量屈服或破坏准则存在的缺点,结合岩土类材料的屈服或破坏特性,Lade 与 Duncan 于 1975 年和 1977 年相继提出了一个屈服面的 Lade-Duncan 屈服与破坏准则和两个屈服面的 Lade 屈服准则,简称 L-D 屈服准则与 Lade 屈服准则。

4.2.4.1 L-D 屈服准则

根据对砂土进行的大量真三轴试验资料,Lade 与 Duncan 于 1975 年提出了适用于砂土的屈服与破坏准则。

1. 屈服函数

L-D 准则的屈服函数为

$$f(I_1, I_3, k) = \frac{I_1^3}{I_3} - k = 0 \quad (4-30a)$$

或

$$f(I_1, J_2, \theta_\sigma, k) = \frac{2}{3\sqrt{3}} J_2^{\frac{3}{2}} \sin 3\theta_\sigma - \frac{1}{3} I_1 J_2 + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{k}\right) I_1^3 = 0 \quad (4-30b)$$

$$f(\alpha, b, k) = \frac{[\alpha(1+b) + (2-b)]^3}{b\alpha^2 + (1-b)\alpha} - k = 0 \quad (4-30c)$$

式中, I_1 、 I_3 分别为应力第一、三不变量; k 为屈服参数或应力水平参数,当破坏时 $f=f_f$, $k=k_f$, k_f 为破坏参数; α , b 分别为

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad (4-31)$$

$$b = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - 1}{\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}} = \frac{\sigma_2 - 1}{\alpha - 1} = 2\mu_\sigma - 1 \quad (4-32)$$

当破坏时,

$$\alpha_f = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)_f = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (4-33)$$

$$b_f = \frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)_f - 1}{\alpha_f - 1} \quad (4-34)$$

因此, α 反映大小主应力之比值, b 反映 σ_2 的相对大小。

L-D 准则只有一个材料参数 k 或 k_f , 可以由应力水平或三轴固结排水或不排水试验

测定。

2. 准则的几何与物理意义

L-D 准则的屈服曲面在主应力空间为一个顶点在原点,以静水压力线为轴线,随应力水平不断扩张的开口曲边三角锥体。屈服曲面与破坏曲线相似并以破坏曲面为其极限。如图 4-11(a)所示,在偏平面上的投影为一套随静水压力不断扩大的曲边三角形。静水压力增大,曲边三角形曲率变小;静水压力减小,曲边三角形曲率变大并接近圆形,最后当 $p=0$ 时收缩为一点,如图 4-11(b)所示;在 $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_3$ 子午面上,屈服曲线为一族通过原点的射线,如图 4-11(c)所示。从式(4-30b)、式(4-30c)、式(4-31)及式(4-32)与图 4-11 可以看出, L-D 准则的屈服曲线为应力的三次曲线,它反映了三个主应力或三个应力不变量对屈服与破坏的影响。而式(4-34)说明了破坏时 α_f (或 φ) 与 b_f 必须满足的关系,这充分说明了中间主应力对屈服与破坏的影响,这里屈服与破坏强度以摩擦角 φ 表示,而这一特点正是 C-M 准则所没有反映的。

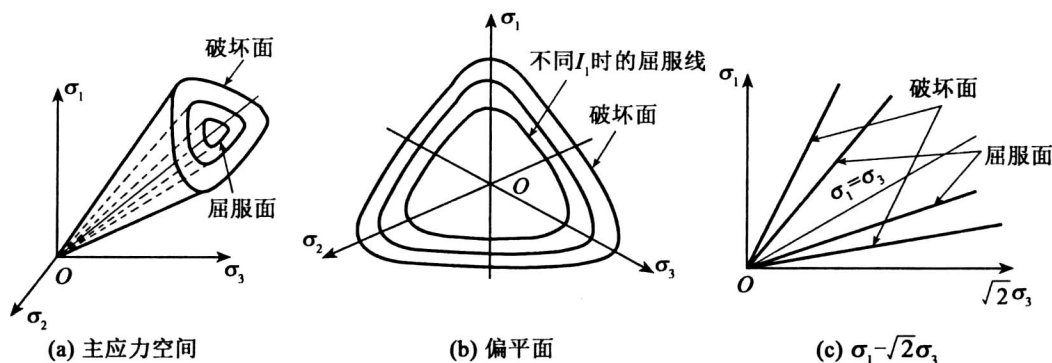


图 4-11 L-D 屈服准则

虽然 L-D 准则反映了三个主应力,特别是中间主应力 σ_2 对屈服与破坏的影响,屈服曲面光滑没有棱角,但是,它只适用于砂类土,还不能适用于岩石、混凝土以及超固结黏土等具有抗拉强度或黏聚力的大多数岩土类材料,还不能反映单纯的静水压力和比例加载时产生的屈服现象以及高应力水平作用下屈服曲线与静水压力的非线性关系。对此, Lade 于 1977 年提出了具有两个屈服面的 Lade 屈服准则。

4.2.4.2 Lade 双屈服面屈服准则

为了克服 Lade-Duncan 一个屈服面屈服与破坏准则在理论上的缺陷,在 1977 年与 1979 年, Lade 对其一个屈服面的准则进行了修正与完善,提出了 Lade 两个屈服面的屈服与破坏准则,该准则包括一个含两个参数的剪切屈服与破坏函数或屈服面,即

$$f_p(I_1, J_3, m, k) = \left(\frac{I_1^2}{I_3} - 27 \right) \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m - k = 0 \quad (4-35a)$$

$$f_p(I_1, J_2, \theta_\sigma, m, k) = 9I_1J_2 + 6\sqrt{3}J_2^{\frac{3}{2}}\sin 3\theta_\sigma \cdot \left[\left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m + \frac{1}{27}k \right] - \frac{1}{27}kI_1^3 = 0 \quad (4-35b)$$

和一个压缩屈服函数或屈服面,即

$$f_c(I_1, J_2, r) = I_1^2 + 2J_2 - r^2 = 0 \quad (4-36a)$$

$$f_c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, r) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - r^2 = 0 \quad (4-36b)$$

式中, J_2 为第二应力不变量; k, r 分别为剪切与压缩的应力水平, 破坏时 $f_p = f_f, k = k_f; m, k_f$ 为材料参数。

由于这一准则假设了两个屈服函数, 对应两个不同的屈服面, 故称为 Lade 两个屈服面屈服与破坏准则, 或修正 L-D 准则。

对于具有黏聚力或抗拉强度的岩土类材料, 在计算式(4-35)及式(4-36)中的应力不变量 I_1, J_2, θ_σ 时, 应采用换算应力或等效应力计算。考虑抗拉强度的换算应力为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_x + \alpha p_a \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_y + \alpha p_a \\ \bar{\sigma}_z &= \sigma_z + \alpha p_a \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

式中, α 为反映材料黏聚力或抗拉强度大小的无量纲参数; p_a 为大气压力, 取与应力相同的量纲与单位。

1. 准则的几何意义与物理意义

从式(4-35b)可以看出, 剪切或剪胀屈服面反映了所有三个应力不变量 I_1, J_2, J_3 对屈服与破坏的影响。在主应力空间, 剪胀屈服面是以静水压力线或空间对角线为对称轴, 母线为三次曲线且不通过原点的一族开口曲边三角锥体。 k 值增大, 剪胀屈服面扩大, 以破坏面 k_f 为其极限, 如图 4-12(a) 所示。在 I_1 等于常数的偏平面上, 屈服曲线为以 $\sqrt{J_2}$ 和 θ_σ 为参变量的三次曲线, 其图形与 L-D 一个屈服面的图形相似, 亦为一族曲边三角形, 如图 4-12(b) 所示。在 $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_3$ 的常规三轴仪试验平面上, 屈服曲线为一族应力的三次曲线, 如图 4-12(b) 所示。这就克服了 C-M 准则及 L-D 准则屈服极限随静水压力直线增大及不能反映比例加载时产生屈服的缺点, 在 $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_3$ 子午面上屈服曲线的曲率取决于材料参数 m 值, m 为 0 ~ 1.0, 当 $m=0$ 时, 子午面上的屈服曲线蜕化为 L-D 一个屈服面的屈服曲线。

从式(4-36b)可以看出, 压缩屈服面在主应力空间是一个以原点为球心、以 $r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$ 为半径的一族同心球面, 当材料具有抗拉强度时, 球心移到 O' 点, 如图 4-12(b) 所示。球形屈服面反映了材料的剪缩特性和单纯的静水压力可以产生屈服的现象。固结压力增加, 球面半径增大, 理论上可以无限压缩而不致破坏, 这正好反映了岩土类材料单纯承受静水压力不会产生破坏的事实。在 $\sigma_2 = 0$ 的平面上, 屈服与破坏曲线的形状如图 4-12(c) 所示。剪胀屈服面与压缩屈服面联合构成了完整的 Lade 双屈服面屈服与破坏准则。从物理意义上讲, 剪胀屈服面反映了岩土类材料在剪应力作用下, 不仅产生塑性剪切变形, 还产生塑性体积膨胀, 即所谓的“剪胀性”, 而压缩屈服面则反映了“剪缩性”和单纯的静水压力产生的体积压缩。

2. 材料参数

Lade 双屈服面准则作为屈服准则, 共有 m, k, a, r 四个参数, 其中, m 代表 $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_3$ 平面上剪切屈服曲线的弯曲程度; a 反映抗拉强度的相对大小; k 和 r 分别为剪切屈服和压缩屈

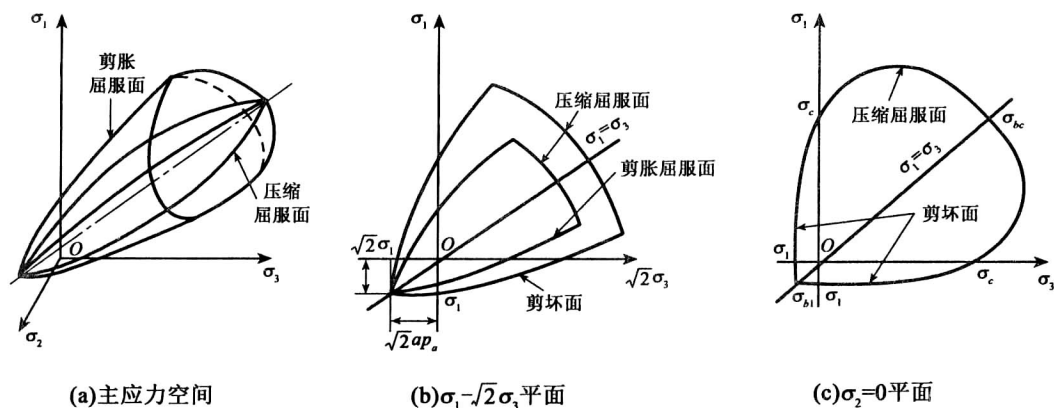


图 4-12 Lade 双屈服面屈服准则

服参数或应力水平。由于没有压缩破坏面,如果将 Lade 准则视为破坏准则,则只有 m, k_f, a 三个参数,它们可以通过单向拉伸、单向压缩及固结三轴排水或不排水剪试验测定,其中, a 值略大于材料抗拉强度 σ_t 。如果已知材料抗拉强度,则可按下列经验公式计算 a 值:

岩土类材料:

$$a = (1.001 - 1.023) \left| \frac{\sigma_t}{p_a} \right| \tag{4-38a}$$

混凝土材料:

$$a = (1.003 - 1.014) \left| \frac{\sigma_t}{p_a} \right| \tag{4-38b}$$

黏性土的抗拉强度较小、且不可靠,一般不予考虑。如果没有进行材料抗拉强度试验,建议根据材料单向抗压强度 σ_c 按下述经验关系计算材料的抗拉强度:

$$\sigma_t = T p_s \left(\frac{\sigma_t}{p_a} \right)^t \tag{4-39}$$

式中, T 和 t 分别为无量纲的抗拉强度系数与指数。

对于岩土类材料, Lade 给出的 T, t 值见表 4-3。

表 4-3 岩土类材料的 T, t 值

参数 \ 材料	混凝土	胶黏土	岩石		
			火成岩	变质岩	沉积岩
t	2/3	0.88	0.7	1.6	0.75
T	-0.61	-0.37	-0.53	-0.0082	-0.22

m 和 k 值可以根据三轴试验结果,破坏时 $\lg \frac{I_3}{I_1^3} - \lg \frac{p_a}{I_1}$ 的双对数关系如图 4-13 所示,图中直线的斜率为 m ,而该线在 $\lg \frac{p_a}{I_1} = 1$ 处的纵坐标就是 k 值。Lade 统计了大量的岩土材料三轴试验资料,得出了表 4-4 的 a, m, k 的值。

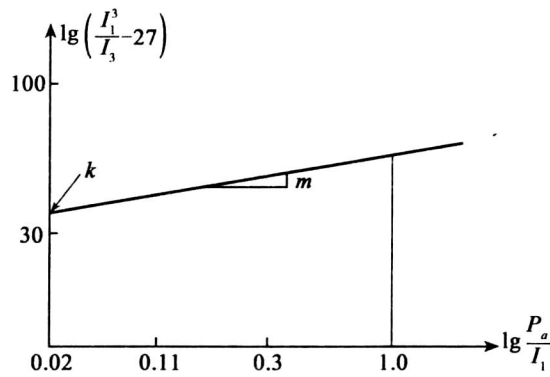


图 4-13 m, k 值确定

表 4-4 岩土类材料的 a, m, k 值

材料 参数	土类	岩石类		混凝土、水泥	
	一般值	一般值	极端值	一般值	极端值
a	—	20 ~ 300	6 ~ 487	20 ~ 35	0.69 ~ 1.41
m	0 ~ 0.5	0.7 ~ 1.7	0.3 ~ 2.72	0.9 ~ 1.2	0.69 ~ 1.41
k	20 ~ 280	$10^4 \sim 10^8$	$2 \times 10^3 \sim 8 \times 10^{12}$	104 ~ 106	8 ~ 746

3. 准则评价

(1) L-D 一个屈服面和 Lade 双屈服面屈服准则考虑了所有三个主应力或应力不变量对屈服与破坏的影响,材料参数少且易于用常规三轴试验测定,同时考虑了岩土类材料的拉压强度不同的 S—D 效应。

(2) 适用范围广。L—D 及 Lade 屈服准则可以适用于岩石、混凝土、砂类土及黏性土等各种岩土类材料。

(3) L-D 准则没有考虑单纯的静水压力作用可以产生屈服、材料的剪缩性以及比例加载所产生的屈服现象,也没有反映剪胀屈服线与静水压力的非线性相关关系。而 Lade 两个屈服面准则克服了这些缺点,在理论上更加完善。

(4) 除 Lade 双屈服面屈服准则在剪胀屈服面与压缩屈服面的空间交线上具有奇异性或棱角外, L-D 准则及 Lade 屈服准则在主应力空间、偏平面与子午面上均为光滑曲线(锥体顶点除外),有利于数值计算和塑性应变增量方向的确定。

(5) L-D 准则及 Lade 屈服准则的屈服曲线为应力的三次函数,因此比其他一次曲线屈服准则(如 Tresca 准则)和二次曲线屈服准则要复杂一些。

综上所述, L-D 准则及 Lade 准则是一个较好的岩土类材料屈服与破坏准则,特别是 Lade 双屈服面准则,理论上比较完善,几乎能够反映岩土类材料的所有屈服与破坏特性,已经受到岩土工程界的普遍重视。它们除了作为 L-D 或 Lade 弹塑性本构模型的一部分应用于岩土工程问题的边值问题及应力应变分析之外,如果作为一个破坏准则代替岩土力学中广泛应用的 C-M 屈服与破坏准则,则可以应用于岩土边坡稳定、挡土墙土压力以及地基承载力等塑性极限

平衡与极限分析之中。目前还没有这方面的研究成果,但是这却是很有意义的。

如果说上述几种准则是岩土类材料通用的破坏准则的话,传统的岩土力学理论还发展许多岩石材料特有的屈服或破坏准则,其中,以格里菲斯准则与霍克-布朗准则最具有代表性。

4.2.5 格里菲斯(Griffith)理论

设岩石中含有大量的方向杂乱的细微裂隙,其中有一系列细微裂隙,如图 4-14 所示,它们的长轴方向与大主应力 σ_1 成 β 角。假定这些裂隙是张开的,并且形状近似于椭圆。研究证明,即使在压应力情况下,只要裂隙的方位合适,则裂隙的边壁上也会出现很高的拉应力。一旦这种拉应力超过材料的局部抗拉强度,则这些裂隙边壁就开始破裂。

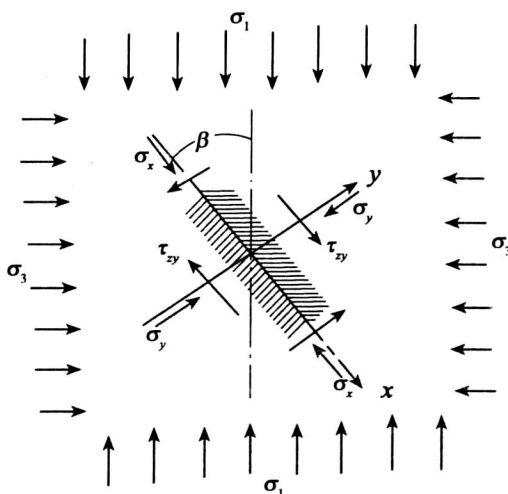


图 4-14 细微裂隙受力示意图

为了确定张开椭圆裂隙周围的应力,作如下简化假定:

(1) 椭圆可作为半无限弹性介质中的单孔处理,即假定相邻的裂隙之间不相互影响,并忽略材料特性的局部变化。

(2) 椭圆及作用于其周围材料上的应力系统可作为二维问题处理,忽略裂缝的三维空间形状和裂缝平面内的应力的影响。

按岩土力学中的规定,压应力为正,拉应力为负,而且 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$,取 x 轴沿裂隙的方向(椭圆长轴方向), y 轴正交于裂隙面方向(椭圆短轴方向),如图 4-15 所示,椭圆裂隙的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha \\ y &= b \sin \alpha \end{aligned} \quad (4-40)$$

式中, a 和 b 分别为椭圆的长半轴和短半轴(mm); α 为对 x 轴的偏心角($^\circ$)。

椭圆的轴比用下式表示,即

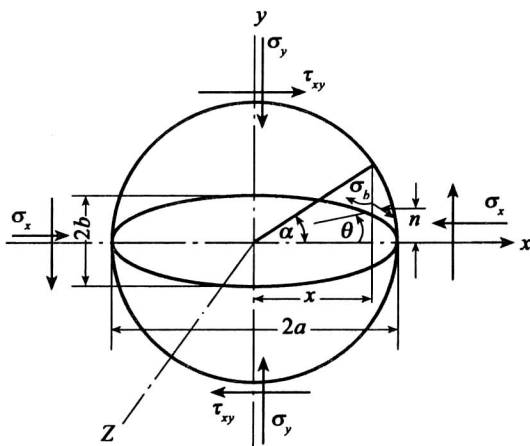


图 4-15 椭圆裂隙周围材料上的应力

$$m = \frac{b}{a} \quad (4-41)$$

根据弹性力学公式及数学极值理论进行推导,可以得到格里菲斯理论的强度准则:

当 $\sigma_1 + 3\sigma_3 > 0$ 时, $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8R_t(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$, 裂隙方位角 $\beta = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\sigma_1 + \sigma_3)}$ 。

当 $\sigma_1 + 3\sigma_3 < 0$ 时, $\sigma_3 = -R_t$, 裂隙方位角 $\beta = 0$ 。

这个准则也可用应力 τ_{xy} 和 σ_y 表示, 即

$$\tau_{xy}^2 = 4R_t(R_t + \sigma_y) \quad (4-42)$$

式(4-42)在 τ_{xy} - σ_y 平面内为一个抛物线, 如图 4-16(a) 所示, 它表示一个张开椭圆细微裂隙边壁上破坏开始时的剪应力 τ_{xy} 和正应力 σ_y 的关系。由图中可以看出, 这条曲线的形状与莫尔包络线相似, 该曲线在负象限内明显弯曲, 表明其抗拉强度要比由莫尔-库仑直线包络线给出的合理得多, 而且, 其与实际测定的抗拉强度 R_t 是一致的。

格里菲斯理论的强度准则在平面 σ_1 - σ_3 内的图形如图 4-16(b) 所示, 它由直线段部分及与之相切的抛物线部分组成。由图可知, 当 $\sigma_3 = 0$ 时(单向加压), $\sigma_1 = 8R_t$, 即单轴抗压强度 $R_c = 8R_t$, 这一结论与试验测定的结果基本吻合。

格里菲斯理论以张开椭圆裂隙为前提, 若在压应力占优势的情况下, 则在受压过程中材料的裂隙往往会发生闭合, 这样, 压应力就可以从一边的缝壁传递到另一边的缝壁, 从而在缝壁间产生摩擦, 这种情况下, 裂隙的增长和发展就与张开裂隙的情况有所不同。麦克林托克(Meclintock)等考虑了这一影响(主要是裂隙间的摩擦条件), 对格里菲斯理论作了修正, 称为修正格里菲斯理论。该理论的强度条件可写为

$$\sigma_1[(f^2+1)^{\frac{1}{2}}-f]-\sigma_3[(f^2+1)^{\frac{1}{2}}+f]=4R_t\left[1+\frac{\sigma_c}{R_t}\right]^{\frac{1}{2}}-2f\sigma_c \quad (4-43)$$

式中, σ_c 为裂隙闭合所需的压应力, 由试验确定。

勃雷斯(Brace)认为, 使裂隙闭合所需的压应力 σ_c 很小, 一般可以忽略不计。因此, 式(4-43)可简化为

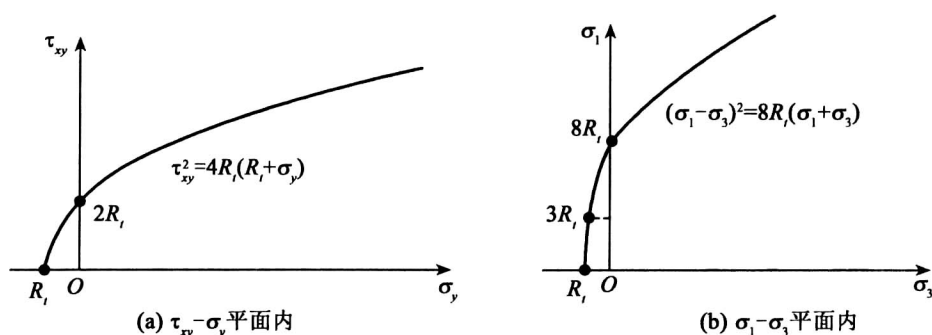


图 4-16 格里菲斯理论的强度准则图形

$$\sigma_1 [(f^2+1)^{\frac{1}{2}} - f] - \sigma_3 [(f^2+1)^{\frac{1}{2}} + f] = 4R_t \quad (4-44)$$

当 $\sigma_y < 0$ 时(拉应力), 裂隙不会闭合, 以上两公式将不再适用, 这时仍采用格里菲斯理论。

4.2.6 霍克(Hoek)-布朗(Brown)经验准则

霍克和布朗发现, 大多数岩石材料在三轴压缩试验破坏时的主应力之间可用下列方程描述:

$$\frac{\sigma_1}{R_c} = \frac{\sigma_3}{R_c} + \left(m \frac{\sigma_3}{R_c} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-45)$$

式中, m 与岩石类型有关, 根据对大量试验研究结果的分析, 建议 m 随着岩石类型按下列顺序增加:

- ①解理较发育的碳酸盐岩石(白云岩、石灰岩、大理岩), $m \approx 7$;
- ②岩化的泥质胶结岩(泥岩、粉砂岩、页岩、板岩), $m \approx 10$;
- ③强结晶和结晶解理不发育的砂质岩(砂岩、石英岩), $m \approx 15$;
- ④细粒的多矿物的岩浆岩(安山岩、粗玄岩、辉绿岩、流纹岩), $m \approx 17$;
- ⑤粗粒的多矿物的岩浆岩及变质岩(闪岩、辉长岩、片麻岩/花岗岩、苏长岩、石英闪长岩), $m \approx 25$ 。

以上为岩石材料(岩块)的强度准则, 对于岩体, 霍克和布朗建议如下的经验强度准则:

$$\frac{\sigma_1}{R_c} = \frac{\sigma_3}{R_c} + \left(m \frac{\sigma_3}{R_c} + s \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-46)$$

式中, R_c 为完整岩块的单轴抗压强度(MPa); m 和 s 为常数, 取决于岩石的性质以及在承受破坏应力 σ_1 和 σ_3 前岩石扰动或损伤的程度。

于是, 令式(4-46)中的 $\sigma_3 = 0$, 可得岩体的单轴抗压强度, 即

$$R_{cm} = R_c \sqrt{s} \quad (4-47)$$

令 $\sigma_1 = 0$, 可得岩体的单轴抗拉强度, 即

$$R_{tm} = \frac{1}{2} R_c (m - \sqrt{m^2 + 4s}) \quad (4-48)$$

这两个方程式定出了 s 的界限值,如果 $s=1$,则 $R_{cm}=R_c$,即为完整岩块的值;如果 $s=0$,则 $R_{cm}=R_c=0$,这就是完全破损的岩石。因此,处于完整岩石和完全破损的中间阶段, s 值必定在 1 和 0 之间。对于 $s=1$ 的情况,大理石、石灰岩及泥岩的常数 m 为 5~7,粗粒岩浆岩的常数 m 为 23~28。霍克等对某些典型岩体求得的 m 、 s 值见表 4-5,如图 4-17 所示。

表 4-5 m 和 s 取值(按霍克和布朗的资料)

岩石质量	岩体 分类	白云岩 石灰岩 大理岩		泥岩 粉砂岩 页岩 板岩		砂岩 石英岩		安山岩 粗玄岩 流纹岩		辉长岩 片麻岩 花岗岩	
		m	s	m	s	m	s	m	s	m	s
完整岩石	100	7	1	10	1	15	1	17	1	25	1
质量很好的岩体	85	3.5	0.1	5	0.1	7.5	0.1	8.5	0.1	12.5	0.1
质量好的岩体	65	0.7	0.004	1	0.004	1.5	0.004	1.7	0.004	2.5	0.004
质量一般的岩体	44	0.14	10^{-4}	0.2	10^{-4}	0.3	10^{-4}	0.34	10^{-4}	0.5	10^{-4}
质量差的岩体	23	0.04	10^{-6}	0.05	10^{-6}	0.08	10^{-6}	0.09	10^{-6}	0.13	10^{-6}
质量很差的岩体	3	0.007	0	0.01	0	0.015	0	0.017	0	0.025	0

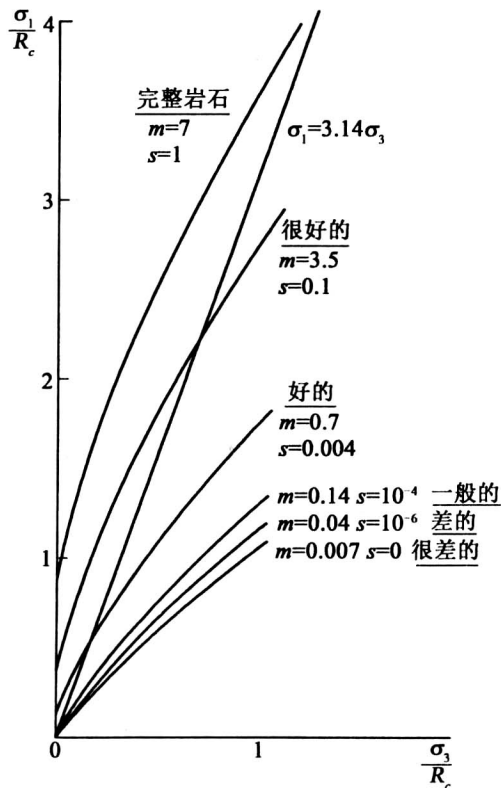


图 4-17 白云石、石灰岩和大理岩强度准则

图 4-17 中的直线 $\sigma_1 = 3.4\sigma_3$ 表示脆性破坏与延性破坏的分界线,在直线左侧的曲线属于脆性破坏,右侧的曲线属于延性破坏。可以看出,只有完整岩块和质量很好的岩石属于脆性破坏。

4.3 统一强度理论

统一强度理论要求用统一的力学模型、统一的数学表达式来表述各种不同材料的强度,这种理论曾经普遍被认为是不可可能的。经过多年的理论研究,我国学者俞茂宏终于在 1990 年提出了能够十分灵活地适用于各种材料的统一强度理论,而现有的其他各种经典强度理论均为该理论的特例或线性逼近。本节首先简要评述几个经典强度理论,然后分别介绍二参数和三参数统一强度理论。在统一强度理论中,正应力以拉为正、压为负。

4.3.1 经典强度理论简评

统一强度理论以双剪概念为基础,故也称为双剪强度理论。应力状态分析表明,主剪应力与主应力之间的关系以及主剪应力面上的法向应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \sigma_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \tau_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \tau_{23} &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \sigma_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (4-49)$$

由于 $\tau_{12} + \tau_{23} - \tau_{13} = 0$, 故只有两个主剪应力是独立的。

Tresca 准则是最大剪应力 τ_{13} 准则, M-C 准则也只考虑了 τ_{13} 和 σ_{13} 。可见,这两个破坏准则没有考虑其他主剪应力的影响,属于单剪强度理论。Mises 准则同等地对待三个主剪应力,而实际上,最大主剪应力起主要作用,次主剪应力对破坏或屈服产生一定的影响。此外, Mises 准则没有考虑主剪切面上法向应力或平均应力的影响。

4.3.2 二参数强度理论

据前所述,材料破坏与三个主剪应力中的两个有关,而且受主剪切面上的正应力影响。二参数统一强度理论认为,当作用于单元上的两个较大主剪应力以及相应的正应力影响函数达到某一极限值时,材料发生破坏。该理论的数学表达式为

$$F = \tau_{13} + b \tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{12}) = C \quad (\text{当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}) \quad (4-50a)$$

$$F' = \tau_{13} + b \tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{23}) = C \quad (\text{当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} < \tau_{23} + \beta\sigma_{23}) \quad (4-50b)$$

根据材料的单轴拉压强度,可确定其中的待定参数 β 和 C ,从而得到理论的主应力表达式为

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \quad \left(\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \quad (4-51a)$$

$$F' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t \quad \left(\text{当 } \sigma_2 > \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \quad (4-51b)$$

式中, $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$, 为材料的拉压强度比, σ_t 为抗拉强度, σ_c 为抗压强度; b 为反映中间主应力以及相应面上的正应力对材料破坏影响的系数。

在岩土力学中, 一般采用抗压强度参数, 因此上式可写成

$$F = \frac{1}{\alpha} \sigma_1 - \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \quad \left(\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \quad (4-52a)$$

$$F' = \frac{1}{\alpha(1+b)} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_c \quad \left(\text{当 } \sigma_2 > \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \right) \quad (4-52b)$$

若采用抗剪强度参数 c 和 φ , 则有

$$\alpha = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}, \quad \sigma_t = \frac{2c \cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (4-53)$$

将式(4-53)代入式(4-51)得

$$F = \sigma_1 - \frac{1 - \sin\varphi}{(1+b)(1 + \sin\varphi)} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2c \cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (4-54a)$$

$$\left(\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{\sin\varphi}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right)$$

$$F' = \frac{1}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \sigma_3 = \frac{2c \cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (4-54b)$$

$$\left(\text{当 } \sigma_2 > \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{\sin\varphi}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right)$$

二参数统一强度理论适用于拉压强度不等的材料。对于拉压强度相同的材料 ($\sigma_t = \sigma_c$), 只需用一个强度参数就可以进行复杂应力状态下的强度计算。统一理论以 b 为参数, 取不同的值, 便得到不同的强度理论。例如, 当 $b=1$ 时, 即为双剪应力强度理论; 当 $b=1$ 时, 退化成 M-C 强度理论。三轴试验结果表明, 试验点大多落在 $b = \frac{1}{4}$ 和 $b=1$ 的统一强度理论极限线之间。

4.3.3 三参数强度理论

三参数统一强度理论认为, 当作用于单元上的两个较大主剪应力以及相应的正应力函数和平均应力函数达到某一极限值时, 材料发生破坏。该理论的数学表达式为

$$F = \tau_{13} + b \tau_{12} + \beta (\sigma_{13} + b\sigma_{12}) + a\sigma_m = C \quad (\text{当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}) \quad (4-55a)$$

$$F' = \tau_{13} + b \tau_{23} + \beta (\sigma_{13} + b\sigma_{23}) + a\sigma_m = C \quad (\text{当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}) \quad (4-55b)$$

其主应力表达式为

$$F = \frac{1+b}{2} (1+\beta) \sigma_1 - \frac{1-\beta}{2} (b\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{a}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = C \quad (4-56a)$$

$$\left(\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\beta}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right)$$

$$F' = \frac{1+b}{2} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \frac{1+b}{2} (1-\beta) \sigma_3 + \frac{a}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = C \quad (4-56b)$$

$$\left(\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\beta}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right)$$

在三参数统一强度理论中有三个材料参数 β, C, α , 它们可由拉伸强度极限 σ_t 、压缩强度极限 σ_c 和双轴等压强度极限 σ_{cc} 确定。大量三轴试验表明, 混凝土的双轴等压强度 σ_{cc} 均大于单轴压缩强度 σ_c , 一般 $\sigma_{cc} = (1.15 \sim 1.35) \sigma_c$, 可得

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c \\ \sigma_1 &= 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{cc} \\ \beta &= \frac{\sigma_{cc} + 2\sigma_t\sigma_c - 3\sigma_t\sigma_{cc}}{\sigma_{cc}(\sigma_t + \sigma_c)} = \frac{\bar{\alpha} + 2\alpha - 3\bar{\alpha}\alpha}{\bar{\alpha}(1+\alpha)} \\ a &= \frac{3\sigma_t(1+b)(\sigma_{cc} - \sigma_c)}{\sigma_{cc}(\sigma_t + \sigma_c)} = \frac{3\alpha(1+b)(\bar{\alpha} - 1)}{\bar{\alpha}(1+\alpha)} \\ C &= \frac{\sigma_c\sigma_t(1+b)}{(\sigma_t + \sigma_c)} = \frac{1+b}{(1+\alpha)}\sigma_t\end{aligned}\quad (4-57)$$

式中, $\alpha = \sigma_t/\sigma_c, \bar{\alpha} = \sigma_{cc}/\sigma_c$ 。

从三参数统一强度理论中, 可以推出许多特殊的强度理论。例如, 当 $b=0$ 时, 式(4-56)简化为

$$F = F'' = \frac{1+\beta}{2}\sigma_1 - \frac{1-\beta}{2}\sigma_3 + \frac{a}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = C \quad (4-58)$$

这是一个新的强度理论。更进一步, 当 $\sigma_{cc} = \sigma_c$ 时, 不难得到

$$F = F' = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 = \sigma_t \quad (4-59)$$

此即 C-M 强度理论。

4.3.4 关于统一强度理论

很久以前, 人们就试图建立联合或统一强度理论, 并提出过多种经验拟合性质的方案。例如, 对于剪切破坏和拉伸破坏, 直线强度包络线与 σ 轴的截距为 $c \cot \varphi$, 而抗拉强度 σ_t 通常低于此值, 因此这一段强度包络线必须用曲线拟合。通常采用二次曲线, 其中以 σ_t 为截距、以抗剪强度直线为渐近线的双曲线方程较为合适(图 4-18), 可写成

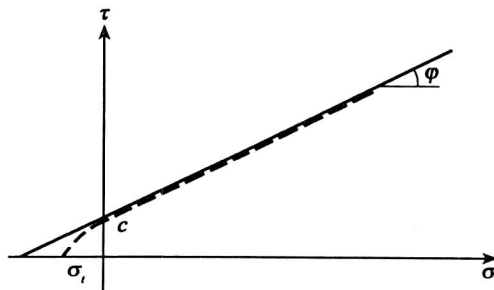


图 4-18 综合强度包络线

$$\bar{\tau}^2 = \sin^2 \varphi [(\bar{\sigma} + c \cot \varphi)^2 - (c \cot \varphi - \sigma_i)^2]$$

式中,

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

普遍认为,俞茂宏建立的统一强度理论较好地起到了统合作用,被视为显著进展。他所基于的试验资料涉及金属、岩土等很多种材料,因此理论的适用性比较广。不过,这种理论仍然是经验拟合性质的,而且子午面上的破坏包络线是线性的。

Lade 准则是非线性的,因此有人将其他线性准则与这种非线性准则简单地组合起来,形成广义非线性强度理论。很显然,这种理论仍是经验拟合性质的。孙广忠(1988)主张强度理论或破坏准则应以破坏机制为依据建立,破坏机制不同,破坏准则也就不同,这似乎意味着否定统一强度理论的可能性。应该承认,统一或联合强度理论虽然是经验拟合性质的,但复杂条件下应用起来的确比较方便。

第5章 岩土黏弹塑性理论框架

在经典岩土力学中,通常以弹性理论为基础计算地基应力与基础沉降,以理想刚塑性理论为基础进行岩土体强度计算。然而,岩土既不是理想弹性的,也不是理想塑性的,而是具有黏弹塑性的复杂介质。这种完全漠视岩土弹塑性特点的做法不可能令人满意,之所以延续了几十年,主要是因为计算技术的限制。自20世纪60年代以来,现代计算方法和计算机技术为岩土力学分析提供了强有力的工具,从而极大地推动了岩土体材料的本构理论(Constitutive Theory)研究。通常认为,Roscoe等人(1963)提出著名的弹塑性剑桥模型标志着现代岩土力学的开端。

在简单应力条件下,本构关系的数学公式容易由试验直接确定,但结构中的材料常处于复杂应力状态,能施加复杂应力的试验设备在设计、制造和使用上都很困难,因此只能通过某些简单的试验获取材料在比较简单应力状态下的本构方程,然后通过某种理论把这些试验结果推广应用到复杂应力状态上去,求取普遍形式的本构方程。到目前为止,所发展的本构理论主要有三种类型:弹性理论、弹塑性理论和流变理论。近些年来,损伤本构理论和结构性本构理论越来越受到重视。本章将重点介绍弹性理论、弹塑性理论和流变理论。

5.1 线弹性理论

弹性理论假定材料是理想弹性的,其基本特征是变形具有可逆性,应力与应变一一对应。众所周知,弹性本构方程分为线性和非线性两种。本节讨论的线性弹性(Linear Elasticity)本构理论是最简单的本构理论。在岩土力学中,常用的是横观各向同性模型和各向同性模型。

5.1.1 横观同性介质

横观各向同性(Transverse Isotropic)介质有一个对称轴。若把对称轴作为 z 轴,则与该轴垂直的 xy 平面内各个方向都将具有相同的弹性常数。假定正应力不引起剪应变,剪应力不引起正应变,一个剪应力分量仅产生一个剪应变分量,再注意到小变形假设下叠加原理成立,本构方程便可写为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_h} - \mu_{hh} \frac{\sigma_y}{E_h} - \mu_{vh} \frac{\sigma_z}{E_v}, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_h} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_h} - \mu_{hh} \frac{\sigma_x}{E_h} - \mu_{vh} \frac{\sigma_z}{E_v}, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_v} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_v} - \mu_{hv} \frac{\sigma_x}{E_h} - \mu_{hv} \frac{\sigma_y}{E_h}, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_v} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (5-1)$$

式中, E 为弹性模量 (Elastic Modulus), μ 为泊松比 (Poisson's Ratio); G 为剪切模量 (Shear Modulus)。 μ_{hh} 为水平向应力引起水平向应变的泊松比; μ_{hv} 为水平向应力引起竖向应变的泊松比; μ_{vh} 为竖向应力引起水平向应变的泊松比, 可以证明

$$G_h = \frac{E_h}{2(1+\mu_{hh})}, \quad \mu_{hv} = \frac{E_h}{E_v} \mu_{vh} \quad (5-2)$$

故横观各向同性介质的独立弹性常数有 5 个。

5.1.2 各向同性介质

5.1.2.1 E - μ 形式

当材料为各向同性 (Isotropic) 时, 线性弹性模型即为广义 Hooke 定律, 其本构方程为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (5-3)$$

从中解出应力分量, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (5-4a)$$

或

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_v \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (5-4b)$$

或

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} \quad (5-4c)$$

式中, $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_m$ 为体积应变 (Bulk Strain), ε_m 为平均应变 (Mean Strain); 弹性矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (5-6)$$

可见, 对于各向同性介质, 独立的弹性常数只有两个。此外, 式 (5-4) 表明, 剪应力不引起体积应变, 体积应力也不引起剪应变。

5.1.2.2 K - G 形式

为了将应力和应变的球张量与偏张量分开,令式(5-4)的三个正应力公式相加,可得

$$\sigma_m = \left(\lambda + \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_v = K\varepsilon_v = 3K\varepsilon_m \quad (5-7)$$

式中, K 为体积弹性模量 (Bulk Modulus), 其表达式为

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (5-8)$$

据式(5-4)计算应力偏量

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = 3\lambda \varepsilon'_m \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - 3K\varepsilon_m = 2Ge_{ij} \quad (5-9)$$

联合式(5-7)、式(5-9),有

$$\sigma_m = K\varepsilon_v = 3K\varepsilon_m \quad (5-10a)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

或

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_m \delta_{ij} + 2Ge_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5-10b)$$

其中,

$$D_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G\delta_{ik} \delta_{jl} \quad (5-11a)$$

或

$$D = \begin{bmatrix} K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (5-11b)$$

5.1.2.3 λ - G 形式的弹性本构关系

在式(5-11a)中,将前三行三列的参数进行改写,使

$$K + \frac{4}{3}G = K + \frac{6}{3}G - \frac{2}{3}G = \lambda + 2G, K - \frac{2}{3}G = \lambda$$

则(5-11a)式的弹性矩阵就变为

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

式中, λ 、 G 为 Lamé 常数。实际上, G 就是剪切弹性模量, Lamé 常数 λ 与其他弹性常数的关系如下:

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G = \frac{E\mu}{(1-\mu)(1-2\mu)} \tag{5-13}$$

以 Lamé 常数为参数的弹性本构关系的张量下标表达式为

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \tag{5-14}$$

可以看出,以 Lamé 常数表示的弹性本构关系比较简洁,因此一般多用在理论书籍中,工程计算中不常应用。

5.1.3 弹性常数的物理意义与测定

5.1.3.1 各弹性常数间的相互关系

上节所引用的五个常数量, E 、 μ 、 K 、 G 、 λ 都是材料的弹性常数,它们从不同的侧面反映了材料的弹性性质;显然,它们之间存在一定的换算关系,表 5-1 给出了它们之间的相互关系,只要知道其中的两个,就可以求得其他的三个。

表 5-1 各向同性材料各弹性常数间的关系

	E, μ	K, G	λ, G	K, E
弹性模量 E	E	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{(3\lambda+2G)G}{\lambda+G}$	E
poisson 比 μ	μ	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-E}{6K}$
剪切模量 G	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	G	G	$\frac{3KE}{9K-E}$
体积模量 K	$\frac{E}{3(1-2\mu)}$	K	$\lambda + \frac{2}{3}G$	K
Lamé 系数 λ	$\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	$K - \frac{2}{3}G$	λ	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$
压缩模量 M	$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	$K + \frac{2}{3}G$	$\lambda + 2G$	$\frac{3K(3K+E)}{9K-E}$

5.1.3.2 各弹性常数的物理意义与测定方法

弹性常数 E 、 μ 和 G 的物理意义及测定方法在材料力学和弹性力学中已有介绍,这里不再重复。以下重点介绍体积弹性模量 K 及 Lamé 系数 λ 的物理意义及测定方法。

1. 体积弹性模量 K

体积模量反映平均应力或静水压力与体积应变之间的线性关系,它代表 $\sigma_m - \varepsilon_v$ 关系直线的斜率,如图 5-1 所示。因此,体积模量 K 可以通过三向等压固结试验求得。当对试样施加 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m$ 的平均应力时,由于此时 $S_{ij} = 0$,故有

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_m}{3K} \delta_{ij}$$

对三个正应变求和,即可得体积应变

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_m}{3K} \times 3 = \frac{\sigma_m}{K}$$

故

$$K = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_v} \quad (5-15)$$

只要测得体积应变,就可按式(5-15)或图 5-1 求得体积弹性模量 K 。

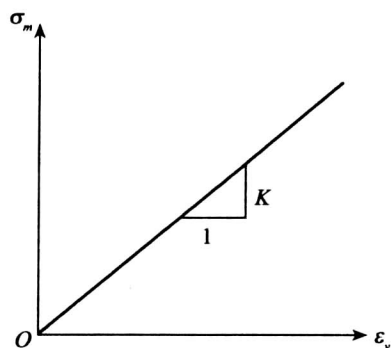


图 5-1 K 值的几何意义

2. Lamé 常数 λ

Lamé 常数有两个,即 λ 与 G , G 就是剪切模量,不再介绍;关于 λ ,从式(5-1)及式(5-12)可知:令 $\varepsilon_x = 0$,则有

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

故

$$\lambda = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_y + \varepsilon_z} \quad (5-16)$$

因此, Lamé 常数 λ 的物理意义为:在平面应变条件下,无应变方向的正应力与体应变之比值。对于弹性材料, λ 亦应为一常数。如果能测得维持平面应变条件的应力(在这里为 σ_x)和体应变 $\varepsilon_y + \varepsilon_z$,则 λ 在几何上就反映 $\sigma_x - (\varepsilon_y + \varepsilon_z)$ 关系曲线的斜率。关于 λ 的物理及几何意义如图 5-2(a)、(b)所示。一般可以利用表 5-1 由其他弹性常数推算 λ 。

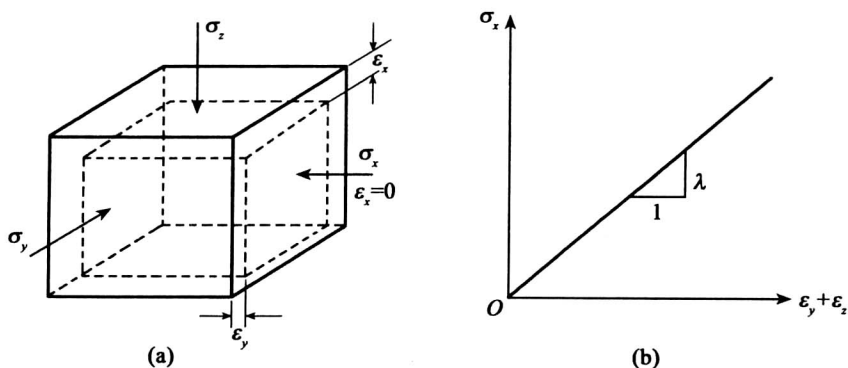


图 5-2 Lamé 常数 λ 的意义

5.2 弹塑性理论

5.2.1 全量理论与增量理论

塑性本构理论主要有增量理论与全量理论。在具体介绍增量理论之前,首先介绍全量理论与增量理论的若干基本概念。

5.2.1.1 全量塑性理论

建立全量应力 σ_{ij} 与全量应变 ε_{ij} 之间本构关系的理论称为全量理论。由于塑性本构关系与应力或应变路径有关,应力和应变之间不存在唯一的对应关系,因此,对一般的复杂加载历史和应力路径不可能建立起全量本构关系。当规定了具体的应力或应变路径之后,就可以沿应力或应变路径积分,建立相应的全量型本构关系。如果假设:

(1) 比例加载,即保证应力各分量之间按一定比例增加;

(2) 体积变化是弹性的,即 $\varepsilon_v^p = 0$;

(3) 应变偏张量 e_{ij} 与应力偏张量 s_{ij} 相似且同轴;

(4) 广义剪应力 q (即等效应力) 与广义剪应变 $\bar{\gamma}$ 之间存在确定的关系,即单一曲线。

这时就有可能建立起全量型塑性应力与应变关系。当主动加载时,塑性全量理论就相当于非线性弹性理论。

从以上的简单介绍可知,建立全量型本构关系的条件是非常苛刻的,对于岩土类材料来说是不现实的,因此,全量理论一般不适于岩土类材料。岩土类材料主要应用增量型塑性本构理论。

5.2.1.2 塑性增量本构理论

对于一般的加载条件来说,既然不可能建立全量应力与全量应变之间的塑性本构关系,那么就只有追踪应力路径建立应力增量与应变增量之间的增量本构关系,这种增量应力与增量应变之间的本构关系称为塑性增量理论。塑性增量理论主要包括以下几个方面的内容与概念:

1. 屈服准则

屈服准则是判断材料进入塑性受力阶段的标志,没有屈服就没有塑性。

2. 加卸载准则

只有知道材料处于塑性加载条件或弹性加、卸载条件下,才能分别按塑性或弹性本构关系进行应力与应变分析。判断材料处于塑性加载或弹性加卸载的条件称为加卸载条件。

3. 流动法则

对于各向同性的弹性本构关系来说,增量应变与增量应力的方向一致,而对于塑性本构关系来说,塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 与应力增量 $d\sigma_{ij}$ 的方向并不一致,而是与屈服函数或塑性势函数的梯度方向有关。这种建立塑性应变增量方向(或塑性流动方向)与屈服函数或塑性势函数梯度方向间关系的理论称为塑性流动理论或塑性位势理论。

4. 硬化规律与定律

对于应变硬化材料来说,硬化规律说明屈服面以何种运动规律产生硬化,这就要对硬化规律作出假设。硬化定律则是具体说明屈服面为什么会硬化,即规定硬化函数与硬化参数的具体内容。

除此之外,塑性增量理论还要求材料在受力过程中符合能量守恒定律或热力学第一定律,这就是关于材料稳定性的 Drucker 公设与 ильющин 塑性公设。

5.2.1.3 关于材料性质的基本假设

岩土类材料的本构特性是很复杂的,要建立完全反映这类材料的应力-应变特性的普遍的弹塑性增量的本构关系几乎是不可能的,也没有必要。只有针对岩土类材料的主要本构特性建立本构关系才是现实的和必要的。因此,在具体建立塑性增量本构关系之前,需要对材料性质作一些假设。除了小变形和弹塑性不耦合等假设之外,还需要假设:

(1) 材料初始是各向同性的;

(2) 对于应力导致的各向异性,一般假设主应力轴不发生偏转,即硬化过程中应力主轴方向不变;

(3) 应变增量可以分解为弹性与塑性两部分,即 $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$ 。

5.2.2 加载条件与加卸载准则

5.2.2.1 加载条件

塑性加载条件就是保证产生新的塑性变形条件或使应力继续保持在屈服面或相继屈服面上的条件,因此,对于理想塑性材料,加载条件就是屈服条件,即

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (5-17)$$

对于应变硬化材料,其加载条件为

$$f(\sigma_{ij}, H_\alpha) = 0, \alpha = 1, 2, 3 \quad (5-18)$$

式中, H_α 可以不止一个,是度量材料由于塑性变形引起内部微观结构变化的参量,称为应变硬化参量。 H_α 与塑性变形或加载历史有关,可以是塑性应变各种分量、塑性功或代表热力学状态的内变量的函数。在力学中,所谓内变量,就是不可直接观察与测量的量,如塑性变形、塑性功等都属于内变量;可以直接观测与测量的量称为外变量,如应力、应变、温度和时间等都属于外变量。

保证实现上述加载条件的应力变化条件或应变变化条件称为加载准则,而不满足加载条件时就称为卸载或中性变载。对于单向拉、压的简单应力状态,只需要看其应力是增大或减小就可判断是加载还是卸载,为了消除应力正负号的影响,其加卸载准则可以表示为

$$\text{理想塑性} \begin{cases} \sigma d\sigma = 0 & \text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-19)$$

$$\text{硬化塑性} \begin{cases} \sigma d\sigma > 0 & \text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-20)$$

对于复杂的应力状态,加卸载时六个应力分量有增有减,这时就不能由简单的应力增减来判断是加载还是卸载,而需要建立与复杂应力状态相对应的加卸载准则。

5.2.2.2 理想塑性材料的加卸载准则

1. 正则屈服面的加卸载准则

当屈服函数处处连续可微时,相应的屈服面就称为正则屈服面。由于理想塑性材料的屈服面在应力空间中的形状、大小与位置都不发生变化,因此,保证应力变化不脱离屈服面的条件就是加载准则,否则就是卸载准则,其数学表达式为

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= 0 \\ \begin{cases} df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \text{加载} \\ df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \text{卸载} \end{cases} \end{aligned} \quad (5-21a)$$

理想塑性材料没有硬化,屈服面不能扩大,故不可能出现 $df > 0$ 的情况。

如果将式(5-21a)的加卸载条件表示在应力空间中则更为直观。数学上, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ 代表屈服面 f 在点 σ_{ij} 的梯度矢量方向或 f 面的外法线方向,故 $df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ 就表示 $d\sigma_{ij}$ 方向与 f 的外法线方向或梯度方向 n 正交,而 $df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ 则表示 $d\sigma_{ij}$ 指向 f 屈服面以内,如图 5-3 (a) 所示。故在应力空间中,正则加载面或屈服面的加卸载条件又可表示为

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= 0 \\ \begin{cases} nd\sigma = 0 & \text{加载} \\ nd\sigma < 0 & \text{卸载} \end{cases} \end{aligned} \quad (5-21b)$$

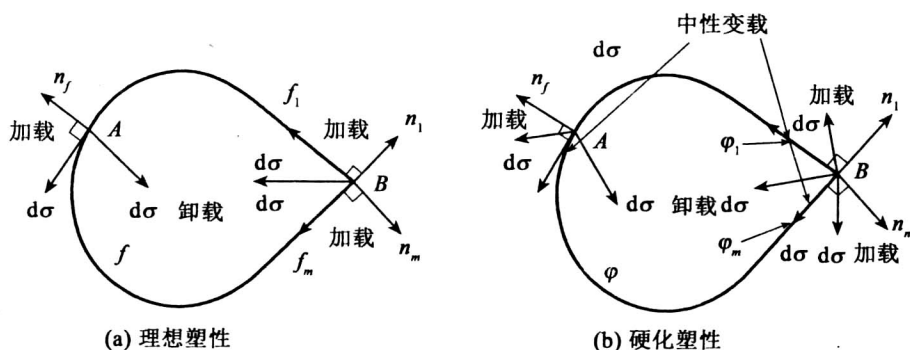


图 5-3 加卸载准则

2. 非正则屈服面的加卸载准则

当屈服函数不是处处连续可微或屈服面具有棱角或奇异点时,称为非正则屈服面。这时,在屈服面的正则点上,式(5-21b)仍然适用,但当应力点落在两个屈服面 f_i 与 f_m 的交点上时,其加卸载准则可表示为

$$\begin{aligned} f_i = f_m &= 0 \\ \begin{cases} \max(df_i, df_m) = 0 & \text{加载} \\ df_i < 0 \text{ 且 } df_m < 0 & \text{卸载} \end{cases} \end{aligned} \quad (5-21c)$$

非正则点在应力空间中的加卸载准则如图 5-3(b) 中的 B 点所示。

3. 硬化材料的加卸载准则

(1) 正则加载面的加卸载准则。硬化材料的加载条件为式(5-18), 而加载条件的全微分为

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial H_\alpha} dH_\alpha = 0 \quad (5-22)$$

这说明加载面的变化是由于应力增量 $d\sigma_{ij}$ 和硬化参数的变化 dH_α 引起的; 而 dH_α 又是由于 $d\sigma_{ij}$ (或 $d\varepsilon_{ij}^p$) 产生的, 因此, 在正则加载面上, 硬化材料的加卸载准则可以只由应力的变化是否离开加载面反映, 其数学表达式为

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 & \text{加载} \\ d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 & \text{中性变载} \\ d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-23a)$$

与理想塑性材料的加卸载准则式(5-21a)比较, 这里需要 $\varphi = 0, d\varphi > 0$ 才表示加载, 这说明加载面由于应变硬化而扩大。同时, 这里多了一个中性变载条件, 它意味着应力点在加载面上变化 ($\varphi = 0$); 但是塑性内变量 dH_α 不发生变化, 即不产生新的塑性变形, 只产生弹性变形 ($d\varphi = 0$), 但又不是卸载, 故称为中性变载。

正则加载面上的加卸载准则也可以用加载面梯度矢量方向或加载面外法线方向 n 与应力增量矢量方向 $d\sigma$ 表示为

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ nd\sigma > 0 & \text{加载} \\ nd\sigma = 0 & \text{中性变载} \\ nd\sigma < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-23b)$$

在主应力空间, 应变硬化材料在正则加载面上的加卸载准则如图 5-3(b) 中的 A 点所示。 $d\sigma_{ij}$ 方向指向加载面之外为加载, 指向加载面之内为卸载, 沿加载面切向变化时则为中性变载。

(2) 非正则(奇异)加载面的加卸载准则

若加载面由几个正则加载面构成, 则在加载面的交线或交点上, 加载面的梯度方向出现不连续, 或出现奇异线或奇异点。这时, 在各个正则面的正则点上, 式(5-22)仍然适用。而在奇异点处, 例如图 5-3(b) 所示的 φ_l 和 φ_m 加载面的交点 B 处, 其加卸载准则为

$$\begin{cases} \varphi_l = \varphi_m = 0 \\ \max\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right) > 0 & \text{加载} \\ \max\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right) = 0 & \text{中性变载} \\ \max\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right) < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-24)$$

这就说明由 φ_l 和 φ_m 加载面中最大的一个加载面增量 $\partial\varphi_l$ 或 $\partial\varphi_m$ 来决定是加载、卸载或者是中性变载。

应当说明的是,上述应变硬化材料的加卸载准则不适用于应变软化材料,因为应变软化材料加载时表现为加载面收缩,即 $\partial\varphi_l < 0$,这时与卸载准则无法区别。当使用应变空间的加载面 F 时,应变软化材料的加载面在应变空间仍在继续扩大,不会收缩,故最好将加卸载准则用应变形式表示。如果令应变空间的加载条件为

$$F(\varepsilon_{ij}, H'_\alpha) = 0 \quad (5-25)$$

式中, H'_α 为应变硬化参量,这时,应变空间的加卸载准则可以表示为

$$\begin{cases} F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0 & \text{加载} \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = 0 & \text{中性变载} \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-26)$$

式(5-22)同时适用于理想塑性、应变硬化与软化材料。当材料为理想塑性时,没有中性变载, $\partial F = 0$ 即为加载, $\partial F < 0$ 即为卸载,不会出现 $\partial F > 0$ 的情况。在应变空间中,加载和卸载的应变增量矢量均指向加载面外侧,中性加载时指向加载面切线方向。对于非正则应变屈服面,类似于式(5-23),其加卸载准则为

$$\begin{cases} F = 0 \\ \max\left(\frac{\partial F_l}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}\right) > 0 & \text{加载} \\ \max\left(\frac{\partial F_l}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}\right) = 0 & \text{中性变载} \\ \max\left(\frac{\partial F_l}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}\right) < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (5-27)$$

5.2.3 Drucker 公设和 ильющин 公设

经典塑性增量理论是建立在 Drucker 关于材料稳定性公设的基础上的。1960 年, ильющин 又提出了适用范围更广的 ильющин 塑性公设。以下介绍 Drucker 公设和 ильющин 公设以及由此而得到的重要推论。

5.2.3.1 Drucker 公设

1951 年, Drucker 提出了关于稳定性材料在弹塑性加卸载的应力循环过程中塑性功不可逆的 Drucker 公设,因此,在具体介绍 Drucker 公设前,首先定义稳定性材料与不稳定性材料。

1. 稳定性材料与不稳定性材料

如果将弹塑性材料进行简单的压缩试验,可以得到如图 5-4 所示两种类型的试验曲线。在图 5-4(a) 中,当 $\Delta\sigma \geq 0$ 时, $\Delta\varepsilon \geq 0$,这时附加应力 $\Delta\sigma$ 对附加应变 $\Delta\varepsilon$ 做功非负,即 $\Delta\sigma\Delta\varepsilon \geq 0$, Drucker 称这种材料为稳定性材料。显然,应变硬化材料属于稳定性材料之列。

对于理想塑性材料,当屈服后, $\Delta\sigma=0, \Delta\varepsilon\geq 0$,故 $\Delta\sigma\Delta\varepsilon=0$,也应属于稳定性材料之列。另一种试验曲线如图 5-4(b)所示,当应力点达 P 点以后,附加应力 $\Delta\sigma<0$,而附加应变 $\Delta\varepsilon>0$,故附加应力对附加应变做负功,即 $\Delta\sigma\Delta\varepsilon<0$,这种类型的材料称为不稳定性材料。显然,具有应变软化性质的材料在应变软化阶段就属于不稳定性材料。

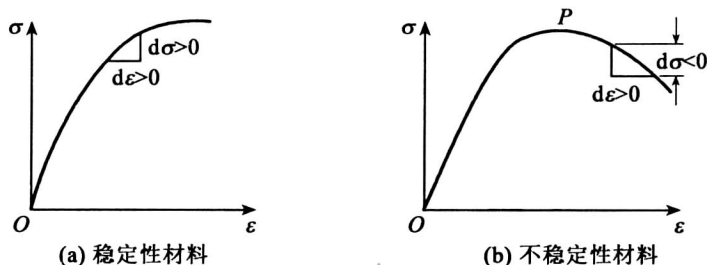


图 5-4 稳定与不稳定材料

2. Drucker 公设

将稳定材料概念推广到复杂应力状态和一个完整的弹塑性加卸载循环过程,就可以得到 Drucker 公设。Drucker 公设可以叙述为,对于稳定性材料而言,在常温和缓慢的加卸载条件下,一个完整的弹塑性加卸载循环过程有:

- (1) 在加载过程中,附加应力做功非负;
- (2) 如果加载产生塑性变形,则在整个加卸载循环过程中,附加应力做功非负;如果加载不产生塑性变形(即纯弹性应力循环),附加应力做功为零。

Drucker 公设的第一条实际上就是关于稳定性材料的定义,说明 Drucker 公设是针对稳定性材料而言的。图 5-5(a)为稳定性材料的加卸载循环过程,图 5-5(b)为主应力空间的加载面与应力循环过程。设某一材料单元在加载前处于 A 点,相应的初始应力为弹性应力状态 σ_{ij}^0 ,当加载至加载面上的 B 点时,相应的应力 σ_{ij} ,在由 A 至 B 的弹性加载过程中,只产生附加的弹性变形。然后在加载应力为 σ_{ij} 的基础上,再增加一个微小的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 至 C 点。由 B 至 C 为塑性加载,相应地将产生弹性与塑性应变增量。再由 C 点弹性卸载至原来的应

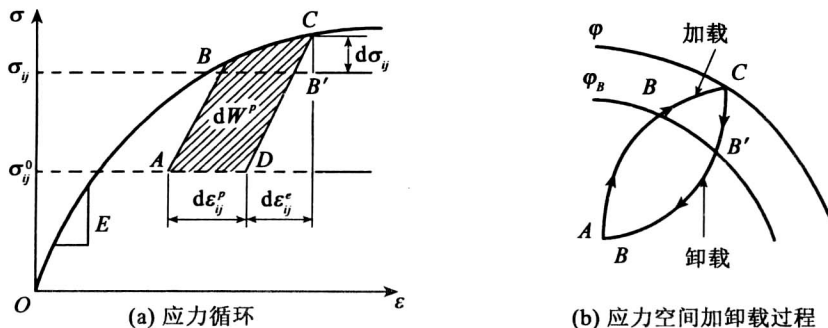


图 5-5 Drucker 公设

力状态点 A , 这样就完成了一个完整的应力循环过程。如果假设在这一应力循环中产生的弹性应变为 $d\varepsilon_{ij}^e$, 塑性应变为 $d\varepsilon_{ij}^p$, 则总的应变增量为 $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$ 。由于在应力循环过程中, 弹性功是可逆的, 故弹性功的变化为零。因此, Drucker 公设的第二条就可以数学形式表示为

$$dW^p = \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 \right) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (5-28)$$

式(5-28)几何上代表图 5-5(a) 中 $ABCD$ 的面积, 它说明在一个完整的应力循环过程中, 塑性功不可逆, 即外力所做的塑性功为材料产生的塑性变形所吸收, 不能再释放出来, 从上式可以推导出以下两个重要的不等式:

(1) 如果 σ_{ij}^0 在原来的加载面以内, 即 $\sigma_{ij}^0 < \sigma_{ij}$, 且 $d\sigma_{ij}$ 为一个任选的无限小应力增量, 与 σ_{ij} 相比可以忽略不计, 故由式(5-28)有

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (5-29)$$

式(5-29)也是 Drucker 公设第二条的数学表达式, 其中, σ_{ij} 为产生 $d\varepsilon_{ij}^p$ 时的加载应力, 如图 5-5 所示。

(2) 当 σ_{ij}^0 位于原来的加载面 B 点时, 即 $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}$ 时, 由式(5-29)有

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (5-30a)$$

上式对应变硬化材料, 大于号表示塑性加载, 等于号表示中性变载; 对于理想塑性材料, 等号表示加载, 大于号无意义。如果考虑加载过程产生的弹性变形, 则弹塑性功增量为

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (5-30b)$$

式(5-30)就是 Drucker 公设第一条关于稳定性定义的数学表达式。

对于不稳定材料, 如应变软化材料, Drucker 公设不是绝对成立, 而是有条件成立的。现以图 5-6 进行说明, 在应力应变曲线的 P 点以后, 当点 σ_{ij}^0 远离屈服曲线时, 式(5-29)仍然成立, 但式(5-30)式不成立, 这说明在一个大的应力循环中, Drucker 公设的第二条仍成立。当 σ_{ij}^0 点 A 取得非常接近屈服曲线时, 由于应变软化的作用, 完不成应力的循环过程(只有加载, 没有卸载), 从而式(5-29)及式(5-30)都不成立, 这种情况说明此时 Drucker 公设不适应于不稳定性材料, 因此, 对于应变软化材料来说, 只有在完成加卸载循环的条件下, Drucker 公设的第二条才能成立。

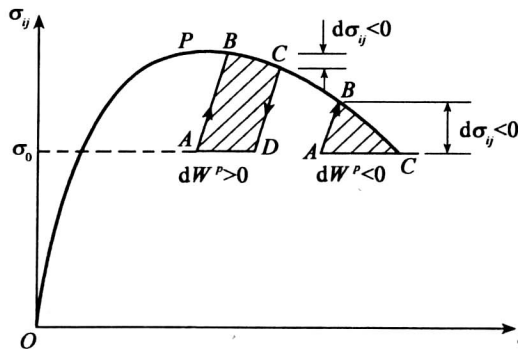


图 5-6 应变软化材料

5.2.3.2 Drucker 公设的推论

由 Drucker 公设可以推出以下几条重要的结论:

1. 屈服面或加载面处处外凸

如果将应力空间与塑性应变空间重合,并使相应 σ_{ij} 与 ε_{ij} 轴重合,如图 5-7 所示,同时, σ_{ij}^0 及 σ_{ij} 分别以矢量 OA 和 OB 表示,将 $d\sigma_{ij}$ 及 $d\varepsilon_{ij}$ 分别以矢量 $d\sigma$ 和 $d\varepsilon^p$ 表示。这时式 (5-29) 就可以矢量点积的形式表示为

$$AB \cdot d\varepsilon^p \geq 0 \quad (5-31)$$

这说明 $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$ 与 $d\varepsilon_{ij}$ 之间的夹角 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。如果过应力空间的 B 点作一个加载面的切平面 T ,由于 $d\varepsilon^p$ 永远指向加载面外侧,且沿着加载面的外法线方向,因此,要使式 (5-31) 或式 (5-29) 成立, A 点必位于与 $d\varepsilon^p$ 相反的切平面的另一侧,这只有加载面处处外凸或没有拐点的情况下才能成立;如果加载面是内凹的或具有拐点,如图 5-7(b) 所示, A 点就可能选公切平面 T 与 $d\varepsilon^p$ 同一侧,使得 AB 与 $d\varepsilon^p$ 之间的夹角 $\theta > \frac{\pi}{2}$,从而导致式 (5-29) 和 (5-31) 或 Drucker 公设不能成立。因此,只要材料满足 Drucker 公设,屈服面或加载面就处处外凸。

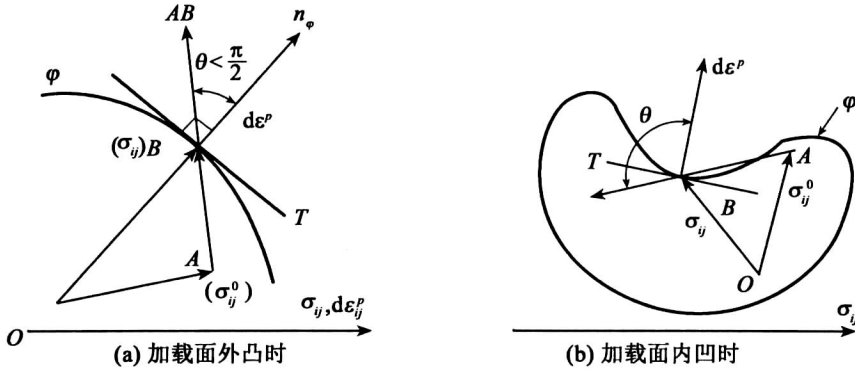


图 5-7 加载面的外凸性

2. 塑性应变增量矢量的正交性

塑性应变增量矢量的正交性指的是塑性应变增量的方向与加载面正交并指向其外法线方向。设光滑加载面 B 点的外法线方向为 n_φ ,则它必垂直于过 B 点的切平面 T ,如图 5-7(a) 所示。如果 $d\varepsilon^p$ 与 n_φ 不重合,如图 5-8 所示,则总可以找到一个 A 点使得 $\theta > \frac{\pi}{2}$,从而使式 (5-29) 或式 (5-31) 不成立。因此,只要 Drucker 公设成立,塑性应变增量的方向就一定指向加载面的外法线方向或加载面的梯度方向,故可将塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-32)$$

式中, $d\lambda$ 为非负的标量塑性因子,它反映 $d\varepsilon_{ij}^p$ 的绝对值大小,这就是下面要介绍的正交流动法则。

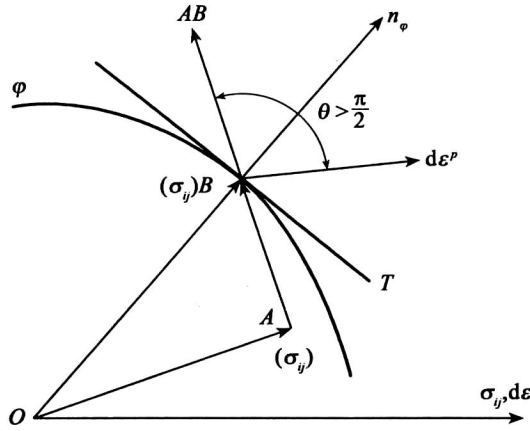


图 5-8 正交性证明

3. $d\epsilon_{ij}^p$ 与 $d\sigma_{ij}$ 的线性相关性

式(5-32)说明 $d\epsilon_{ij}^p$ 各分量之间的比值或大小与 $d\lambda$ 有关,而 $d\epsilon_{ij}^p$ 或 $d\lambda$ 的大小又是由于应力增量而产生的,故可以假设

$$d\lambda = h d\varphi = h \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (5-33)$$

将式(5-33)代入式(5-32)后得

$$d\epsilon_{ij}^p = h \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{min}} d\sigma_{min} \right) \quad (5-34)$$

式中, h 为硬化模量或硬化函数,取决于当前的 σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 与加载历史,但是 h 与 $d\sigma_{ij}$ 无关。

因此,式(5-33)及式(5-34)说明 $d\epsilon_{ij}^p$ 或 $d\lambda$ 与 $d\sigma_{ij}$ 线性相关,这样的硬化就称为线性硬化规律。

从 Drucker 公设还可以推论出加载面的连续性、边值问题解的唯一性和塑性最大功原理等重要结论。

5.2.3.3 Ильюцин 公设

由于 Drucker 公设对应变软化类型的不稳定性材料不完全适用,而且是在应力空间表述的,因此,1961 年 Ильюцин 提出了应变空间表述的、对稳定性与不稳定性材料都适用的 Ильюцин 公设。它可以表述为,在弹塑性材料的一个完整的应变循环过程中,外部作用作功是非负。如果作正功,表示产生了塑性变形;如果作功为零,则只产生弹性变形。

现结合应变软化材料的应变循环过程对 Ильюцин 公设进行说明:图 5-9(a) 为应变软化材料 $\sigma_{ij}-\epsilon_{ij}$ 的曲线及应变循环过程;图 5-9(b) 为应变空间的应变循环路径,与 Drucker 公设相类似,Ильюцин 公设的数学表达式为

$$dW_E^p = \left(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^0 \frac{1}{2} d\epsilon_{ij} \right) d\sigma_{ij}^p \geq 0 \quad (5-35)$$

式中, $d\sigma_{ij}^p$ 为使应变返回到原来的应变 ϵ_{ij}^0 所施加的外部不可恢复的塑性应力增量。在图 5-9(a) 的峰值应力 P 点前后的应变循环中, dW_E^p 分别以多边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'E'$ 表示,其

中,四边形 $ABCD$ 和三角形 $A'B'C'$ 分别表示 P 点前后在 Drucker 应力循环或加载过程中外力所作塑性功 dw_D^p 。从图中可以看出:无论在应变硬化阶段或应变软化阶段,如果从同一个应力或应变点 A 或 A' 开始加载,在完成了 Drucker 的应力循环或加载过程之后,应变较原来的应变 ε_{ij} 多了一个 $d\varepsilon_{ij}$,因此还未完成应变循环。如果要完成应变循环,尚需施加与原应力相反的塑性附加应力 $d\sigma_{ij}^p$,才能使 $d\varepsilon_{ij}$ 消失而回到原来 A 或 A' 的应变 ε_{ij}^0 。这样,应变循环需要比应力循环多作一个附加功 $d\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}^p/2$,即三角形 $\triangle ADE$ 或 $\triangle A'C'E'$ 面积。Ильющин 和 Drucker 公设的关系为

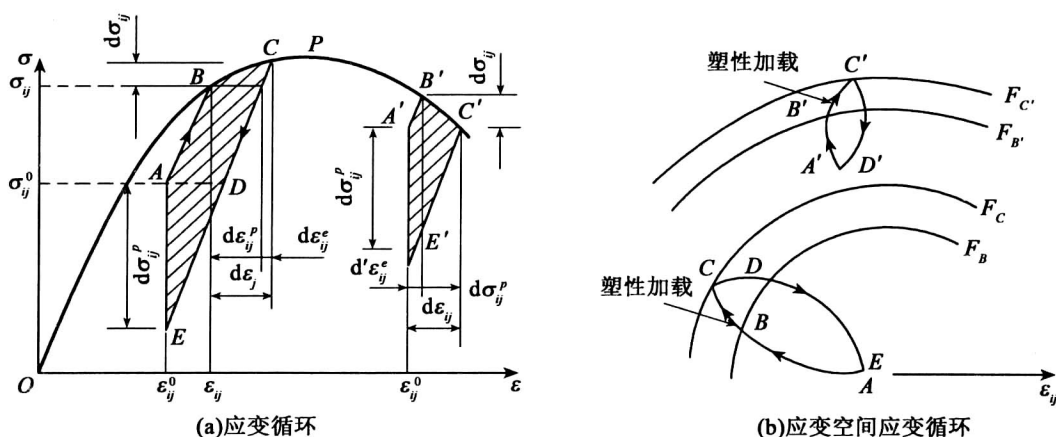


图 5-9 Ильющин 塑性公设

$$dW_E^p = dW_D^p + \frac{1}{2} d\sigma_{ij}^p d\varepsilon_{ij}$$

这说明 Ильющин 公式包括 Drucker 公设在內。由图 5-9(a) 可以看出,当应力点选取接近屈服面时,对应变软化材料或在应变软化阶段完不成应力循环,但同样可以完成应变循环。由图 5-9(b) 可以看出,应变空间中加载面无论对应变硬化或软化材料,加载面都只能扩大而不会缩小。因此,Ильющин 公设同时适用于应变硬化材料与软化材料,比 Drucker 公设适用范围更广。对于具有应变软化性质的岩土类材料来说,Ильющин 公设更具有应用价值。

与 Drucker 公设相似,Ильющин 公设同样有

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) d\sigma_{ij}^p \geq 0 \quad (5-36)$$

$$d\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}^p \geq 0 \quad (5-37)$$

式(5-36)说明应变空间的加载面具有外凸性及 $d\sigma_{ij}^p$ 的方向指向加载面的梯度方向或外法线方向,式(5-37)说明在应变空间中,应力增量矢量 $d\sigma_{ij}^p$ 与应变增量矢量 $d\varepsilon_{ij}$ 方向之间的夹角 $\theta < \frac{\pi}{2}$;式中大于号表示塑性加载,等号表示中性变载,对理想塑性材料,等号表示加载。

与 Drucker 公设一样,由式(5-36)可将塑性应力增量 $d\sigma_{ij}^p$ 表示为

$$d\sigma_{ij}^p = d\mu \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5-38)$$

式中, $d\mu$ 为非负的标量塑性因子,反映 $d\sigma_{ij}^p$ 的大小。同时可以证明 $d\mu = d\lambda$ 。

5.2.4 塑性位势流动理论

与弹性理论不同,塑性应变增量方向一般与应力增量方向无关,因此,塑性增量理论的一个重要内容就是如何确定塑性应变增量方向或塑性流动方向。由 Drucker 公设第二个推论可知, $d\varepsilon_{ij}^p$ 方向与加载面的梯度方向一致,但对于塑性流动规律来说,Drucker 公设只是充分条件,并非必要条件,这就是说,虽然按照 Drucker 公设可以确定 $d\varepsilon_{ij}^p$ 的方向,但 $d\varepsilon_{ij}^p$ 的方向不一定只是按 Drucker 公设确定,也可以按其他方法确定;而且,对于岩土类材料来说,塑性流动方向一般并非沿加载面的法线方向。早在 Drucker 公设提出以前,Mises 于 1928 年就提出了按照塑性势函数的梯度方向确定塑性流动方向的塑性位势理论。

5.2.4.1 正则加载面的塑性位势理论

在弹性理论中,由弹性势函数可以求出弹性本构关系。Mises 将弹性势概念推广到塑性理论中。假设塑性流动状态也存在着某种塑性势函数 Q ,并假设塑性势函数是应力或应力不变量的标量函数,即 $Q(\sigma_{ij})$ 或 $Q(I_1, \sqrt{J_2}, J_3)$,则塑性流动的方向与塑性势函数 $Q(\sigma_{ij})$ 的梯度或外法线方向相同,这就是 Mises 塑性位势理论。由于塑性势函数 $Q(\sigma_{ij})$ 代表材料在塑性变形过程中的某种位能或势能,故称为塑性位势流动理论。

Mises 塑性位势流动理论可以用数学公式表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-39)$$

式中, $d\lambda$ 为非负的塑性标量因子,它表示塑性应变增量的大小。在应力空间中,塑性势函数的图形就是塑性势面。式(5-39)说明 $d\varepsilon_{ij}^p$ 的方向与塑性势函数的梯度方向或塑性势面的外法线方向一致。在流体力学中,由于流体的流动速度方向总是沿着速度等势面的梯度方向,因此,类比流体流动,塑性位势理论又称为塑性流动规律。

塑性位势理论是对塑性应变方向的一种假设。为了保证满足正交流动法则,塑性势函数可以假设为各种不同的形式。对于服从 Drucker 公设的稳定性材料而言,如果假设塑性势函数等于屈服函数或加载函数,即 $Q=f$ 或 $Q=\varphi$,如图 5-10 中 A 点所示,这时,式(5-39)与

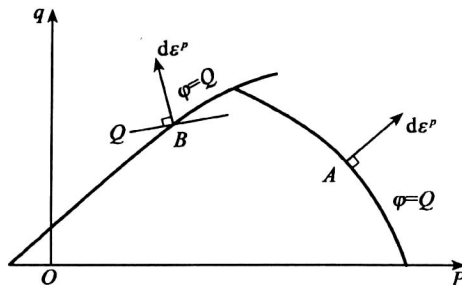


图 5-10 关联与不关联塑性流动

Drucker 公设的推论式(5-32)相同,称这种流动规律为与屈服条件或加载条件相关联的流动法则,由此而得的本构关系称为与屈服条件或加载条件相关联的本构关系。如果假设 $Q \neq f$ 或 $Q \neq \varphi$,则塑性流动方向与屈服面或加载面不正交,但仍与塑性势面正交,如图 5-10 中的 B 点所示,称这种流动为与屈服条件或加载条件不相关联的流动法则或非正交流动法则,相应的本构关系为与屈服或加载条件不相关联的本构关系。

5.2.4.2 相关流动法则

1. 与 Mises 屈服准则相关联的流动法则

对 Mises 屈服准则,相关流动时有

$$f = Q = q - k_m = 0 \quad (5-40)$$

因此有

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial P} = 0 \\ d\bar{\gamma}^p &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial q} = d\lambda \end{aligned} \quad (5-41)$$

这说明在 p - q 坐标系中, $d\bar{\gamma}^p$ 方向与 q 一致,如图 5-11(a)所示。在偏平面上方向沿屈服面的外法线即半径方向,与 θ_σ 无关。

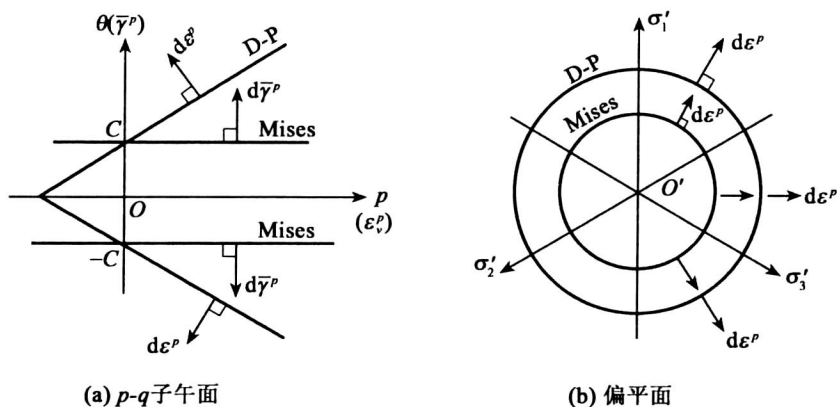


图 5-11 与 Mises 及 D-P 准则相关联的流动法则

2. 与 D-P 屈服准则相关联的流动法则

当塑性流动与 D-P 屈服准则相关联时,有

$$f = Q = \frac{1}{\sqrt{3}}q - 3\alpha p - k = 0 \quad (5-42)$$

同理可得

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= -3\alpha d\lambda \\ d\bar{\gamma}^p &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial P} = \frac{1}{\sqrt{3}}d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (5-43)$$

这说明与 D-P 准则相关联流动时,将产生塑性体应变 $-3\alpha d\lambda$,负号表示剪胀。在 p - q 平面上的塑性流动方向如图 5-11(a)所示,在偏平面上与 Mises 准则的方向一致。

3. 与 C-M 屈服准则相关联的流动法则

将 C-M 准则表示为 p 、 q 、 θ_σ 的形式,则当与 C-M 准则相关联流动时,有

$$Q = f = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos\theta_\sigma + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta_\sigma \sin\varphi \right) q - 3\alpha p - c \cdot \cos\varphi = 0 \quad (5-44a)$$

在 $\theta_\sigma = \mp \frac{\pi}{6}$ 的子午面上,式(5-44a)简化为

$$Q = f = q - \frac{6\sin\varphi}{3 \mp \sin\varphi} - \frac{6c\cos\varphi}{3 \mp \sin\varphi} \quad (5-44b)$$

因此

$$\begin{cases} d\varepsilon_v^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{6\sin\varphi}{3 \mp \sin\varphi} d\lambda \\ d\bar{\gamma}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial q} = d\lambda \end{cases} \quad (5-45)$$

在 p - q 子午面上的塑性应变增量分量 $d\varepsilon_v^p$ 、 $d\bar{\gamma}^p$ 及其合成 $d\varepsilon^p$ 如图 5-12(a)所示。由式(5-44b)可得同一静水压力 p 值时三轴压缩与三轴伸长的体积应变之比为

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_u^p} = \frac{3+\sin\varphi}{3-\sin\varphi} \quad (5-46)$$

式中, $d\varepsilon_v^p$ 为三轴压缩时的剪胀量; $d\varepsilon_u^p$ 为三轴伸长时的剪胀量。

式(5-46)说明对于拉、压强度不同的材料,其压、拉试验所得的体应变并不相同。同时,实验还证明,实测的剪胀量没有式(5-45)的第一式计算的那么大,这就需要对 C-M 准则采用不相关联的屈服准则修正。假设 $Q \neq f$,但 Q 的表示式与式(5-44a)相似,只不过将其中的 φ 角修改为剪胀角 v ,一般 $0 \leq v \leq \varphi$ 。这时,适当调整值,就可使计算的剪胀量与实测的剪胀量比较接近或一致。当 $Q \neq f$ 时,塑性势线与相应的塑性应变方向如图 5-12(a)所示。

在偏平面上,由于 θ_σ 影响 $d\bar{\gamma}^p$ 的大小和方向,故 $\theta_{a\varepsilon} \neq \theta_\sigma$,如图 5-12(b)所示。在偏平面上的奇异点,可采用奇异屈服面的流动法则将 C-M 准则在偏平面上的奇异点或角点“抹”圆,即修改为一段光滑曲线,以利于塑性应变增量的计算。

5.2.5 硬化模型与硬化定律

在加载过程中,随着加载应力及加载路径的变化,硬化材料加载面的形状、大小以及加载面中心的位置甚至加载面的主方向都可能发生变化。加载面在应力空间中的位置、大小和形状的变化规律称为硬化模型或硬化规律,确定加载面依据哪些具体的硬化参量而产生硬化的规律称为硬化定律。对于复杂的应力状态来说,目前的实验资料还不足以完整地确定加载面的变化规律,这就需要对加载面的运动与变化规律作一些假设,故硬化规律又称为硬化模型。由于岩土类材料具有应变软化性质,硬化加载面在应力空间扩大,而软化加载面在应力空间缩小,但对硬化模型来说无本质差别,故以下所述的硬化规律或模型也适用于应变软化材料。

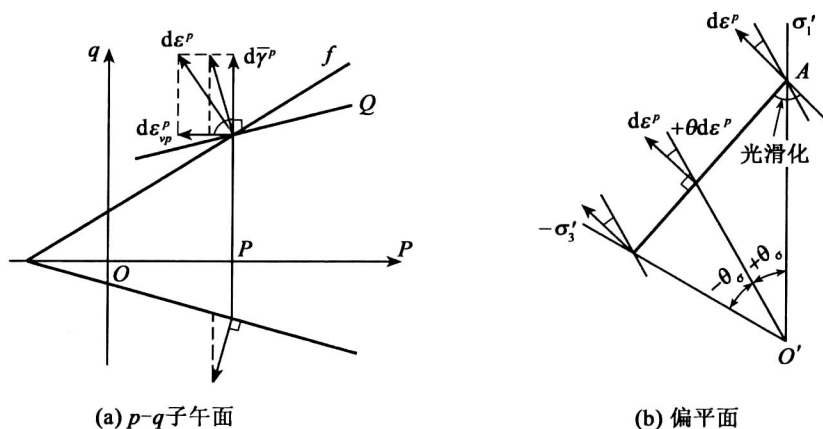


图 5-12 与 C-M 准则相关联的流动法则

一般假设加载面在主应力空间不发生转动,即主应力方向保持不变。在此基础上,如果加载面在应力空间只做形状相似的扩大(硬化)或缩小(软化),则称为各向同性硬化(等向硬化)或软化;如果加载面在应力空间做形状与大小不变的平移运动,则称为机动或运动硬化;当加载面在应力空间同时发生形状相似的大小变化与平移运动时,称为混合硬化。各种硬化模型的加载面在偏平面上的运动规律和在单向拉压时的硬化规律如图 5-13 所示。

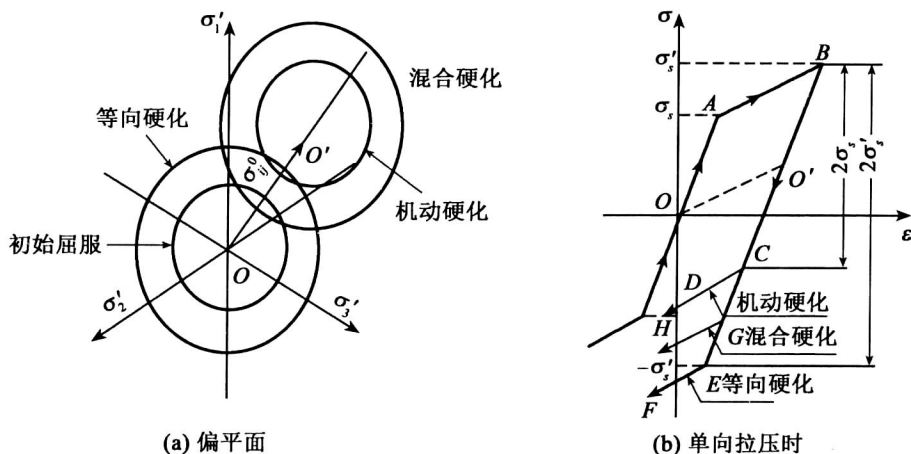


图 5-13 各种硬化模型

5.2.5.1 各向同性硬化模型

各向同性硬化的加载函数可以由硬化参量的显式表示为

$$\varphi(\sigma_{ij}, H) = \varphi(\sigma_{ij}) - H = 0 \quad (5-47)$$

式中, H 为硬化参量 H_a 的函数。

硬化参量 H_a 可以是塑性应变各分量 ε_{ij}^p 或塑性功 W^p 的函数。一般岩土类材料在静荷载作用下的塑性模型都采用各向同性硬化模型。它的优点是简单,但是它完全没有考虑 Bauschinger 效应和岩土类材料的拉压强度不同的特性以及应力导致的各向异性。

5.2.5.2 硬化模量与硬化定律

根据 Drucker 公设第三个推论知,塑性标量因子 $d\lambda$ 与硬化模量 A 和应力增量 $d\sigma_{ij}$ 有关,只要知道 A ,就可以将其代入流动法则表达式建立 $d\sigma_{ij}$ 与 $d\varepsilon_{ij}$ 的增量本构关系,因此,关键问题就是如何求得硬化模量 A 。而硬化定律归根结底就是如何建立 A 的表达式。

1. 硬化模量 A

注意到加载面 $\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, H) = 0$, 有

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial \varphi}{\partial H} dH = 0 \quad (5-48)$$

此即所谓一致性条件。将上式写成

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p - \frac{\partial \varphi}{\partial H} dH$$

由式(5-32)、式(5-33)和上式,并令 $A = 1/h$, 可得

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial \varphi}{\partial H} dH \right) \quad (5-49)$$

由于 H 与塑性应变有关,故

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$

代入式(5-49)得

$$A = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial \varphi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-50)$$

2. 各向同性硬化规律

各向同性硬化时,假设不同的 H , 就可以得出不同的硬化定律。

(1) 塑性功硬化定律。这种理论规定塑性功 W^p 是引起硬化的根本原因,因此,可以将硬化参量 H 设为

$$H = W^p(\varepsilon_{ij}^p) = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (5-51)$$

说明 H 与应变历史有关,积分应当沿应变路径进行。如果材料等向硬化即 $\varphi(\sigma_{ij}, H) = 0$, 且 $H = W^p$, 将式(5-51)代入式(5-50)后可得

$$A = -\frac{\partial \varphi}{\partial W^p} \sigma_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-52)$$

上式的矩阵式为

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial H} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (5-53)$$

因此,只要知道了 Q 以及 φ 与 W^p 的函数关系,就可以得到各向同性的硬化模量 A 。

(2) ε_{ij}^p 硬化定律。这种理论认为 ε_{ij}^p 是引起材料硬化的根本原因,因此将硬化参数 $H = \varepsilon_{ij}^p$ 代入式(5-50)后可得

$$A = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$

或

$$A = (-1) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (5-54)$$

(3) $\varepsilon_v^p, \bar{\gamma}^p$ 硬化定律。这种理论认为材料的硬化是由 ε_v^p 和 $\bar{\gamma}^p$ 的共同作用引起的,故可设

$$H = H(\varepsilon_v^p, \bar{\gamma}^p)$$

式中,

$$\varepsilon_v^p = \int d\varepsilon_v^p \quad (5-55)$$

$$\bar{\gamma}^p = \int \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5-56)$$

即 $\varepsilon_v^p, \bar{\gamma}^p$ 均需沿应变路径积分。如果假设 φ, Q, H 均与应力 Lode 参数 θ_σ 无关,则将 H 代入式(5-50)可得

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial H} \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\gamma}^p} \frac{\partial Q}{\partial q} \right)$$

当 $H = H(\varepsilon_v^p)$ 时,即 H 与 $\bar{\gamma}^p$ 无关时,上式简化为

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad (5-57a)$$

或

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_v^p} \{ \delta \}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (5-57b)$$

这就是体应变硬化定律。在岩土塑性模型中,帽子类模型的帽子硬化定律采用的都是体应变硬化定律。

当 $H = H(\bar{\gamma}^p)$ 时,即 H 与 ε_v^p 无关时,式(5-57)简化为

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\gamma}^p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (5-58a)$$

或

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\gamma}^p} \{ \delta \}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial q} \right\} \quad (5-58b)$$

这就是剪应变硬化定律。一般的金属材料及岩土类材料中纯黏土的不排水分析都是采用这种硬化定律。

5.2.6 弹塑性本构关系及其矩阵

有了屈服条件或加载条件、正交流动法则或塑性位势理论以及硬化模型及定律,就可以推导出适用于理想塑性与应变硬(软)化塑性材料普遍的弹塑性本构关系。

5.2.6.1 一般弹塑性本构关系

对于各向同性的硬化材料,已知加载函数 φ 、塑性势函数 Q 、塑性标量因子 $d\lambda$ 及硬化模量 A 分别为

$$\varphi(\sigma_{ij}, H) = 0 \quad (5-59)$$

$$Q(\sigma_{ij}, H) = 0 \quad (5-60)$$

$$d\lambda = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ld}} d\sigma_{ld} \quad (5-61)$$

$$A = (-1) \frac{\partial \varphi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-62)$$

则加载产生的总的应变增量可以分解为

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (5-63)$$

其中,弹性应变增量由广义胡克定律确定,即

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl}^e \sigma_{ld}^{-1} d\sigma_{ld} \quad (5-64)$$

而塑性应变增量由塑性势理论确定

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-65)$$

联立式(5-63)、式(5-64)和式(5-65)就可得到

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \left(d\varepsilon_{ld} - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ld}} \right) \quad (5-66)$$

式中, D_{ijkl}^e 由弹性常数决定。下面推导 $d\lambda$ 的具体表达式。对于各向同性材料,由式(5-57)可得相容条件为

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ld}} d\sigma_{ld} + \frac{\partial \varphi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ld}^p} d\varepsilon_{ld}^p \quad (5-67a)$$

将式(5-66)、式(5-65)及式(5-62)代入上式后可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{ld} - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}} - A d\lambda = 0 \quad (5-67b)$$

所以

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{ld}}{A + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}}} \quad (5-68)$$

这就是各向同性硬化时 $d\lambda$ 的一般表达式,上式的求和下标说明 $d\lambda$ 为一个标量。当 $A = 0$ 时,式(5-68)就是理想塑性材料的 $d\lambda$ 表达式。将式(5-68)的 $d\lambda$ 代回式(5-66),即可得到各向同性硬化材料普遍的弹塑性本构关系式:

$$d\sigma_{ij} = \left(D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{cd}} D_{edld}^e}{A + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}}} \right) d\varepsilon_{kl} = (D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p) d\varepsilon_{kl} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (5-69)$$

式中,

$$D_{ijkl}^p = \frac{D_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{cd}} D_{edld}^e}{A + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{pq}}} \quad (5-70)$$

称为塑性刚度张量,而

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p \quad (5-71)$$

称为弹塑性刚度张量或弹塑性刚度矩阵。

以上三式都可以改写为便于数值计算的矩阵形式,即

$$\{d\sigma\} = \left[D^e - \frac{D^e \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right\}^T D^e}{A + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right\}^T D^e \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \right] \{d\varepsilon\} \quad (5-72)$$

$$D^p = \frac{D^e \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right\}^T D^e}{A + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right\}^T D^e \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (5-73)$$

$$D^{ep} = D^e - D^p \quad (5-74)$$

式(5-72)不仅适用于各向同性硬化或软化材料,还适用于理想塑性材料($A=0$)。

分析式(5-73)和式(5-74)中的 D_{ijkl}^p 和 D_{ijkl}^{ep} 可知,它们与弹性常数 E 、 μ 或 K 、 G 、加载函数 φ 及塑性势函数 Q 、硬化模量 A 以及应力 σ_{ij} 都有关系。不仅不同的材料其 D_{ijkl}^{ep} 不同,即使是同一材料,在不同的应力水平及假设不同的 φ 、 Q 及 A 时,其 D_{ijkl}^{ep} 也不相同。因此,弹塑性本构关系理论的关键问题之一就是在选定了模型的 φ 、 Q 及 A 之后,如何具体地确定相应的弹塑性矩阵 D_{ijkl}^{ep} 。一般地,要通过试验来确定有关的常数或函数:

- (1) 通过三轴压缩与剪切试验求出材料的弹性常数 E 、 μ 或 K 、 G ,以确定 D_{ijkl}^e ;
- (2) 假定适当的加载函数 φ 及塑性势函数 Q ,并通过试验确定相应的材料常数;
- (3) 通过试验确定加工硬化定律的具体形式,进一步确定硬化模量 A 。

当确定了弹塑性矩阵 D_{ijkl}^{ep} 之后,就可以进行弹塑性应力-应变增量关系的分析与计算了。

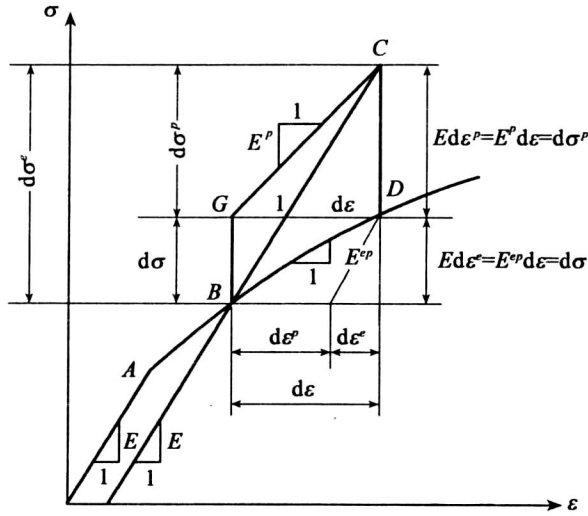
5.2.6.2 弹塑性刚度矩阵的几何意义与物理意义

复杂的 σ_{ij} - ε_{ij} 关系难以在三维空间或二维空间表示,故采用单向受压的 σ - ε 关系说明 D_{ijkl}^e 、 D_{ijkl}^p 以及 D_{ijkl}^{ep} 的几何意义与物理意义。单向应力时,它们分别简化为 D^e 、 D^p 及 D^{ep} 。

图 5-14 为单向受力时的 σ - ε 关系曲线。当材料进入塑性受力阶段后,施加应力增量 $d\sigma$ 后将产生相应的应变增量 $d\varepsilon$,利用普遍的塑性本构关系式(5-72),此时该式简化为

$$d\sigma = D^e (d\varepsilon - d\varepsilon^p) = (D^e - D^p) d\varepsilon = D^{ep} d\varepsilon \quad (5-75)$$

$$\left. \begin{aligned} D^e &= E \\ D^p &= E^p = E \frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} \\ D^{ep} &= E^{ep} = E - E^p = E - E \frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (5-76)$$


 图 5-14 D^e 、 D^p 、 D^{ep} 的几何意义与物理意义

这说明在单向受力时, D^e 简化为杨氏拉压弹性模量 E , D^p 简化为拉压塑性模量 E^p , D^{ep} 简化为弹塑性模量 E^{ep} 。几何上, D^e 就代表 σ - ϵ 关系曲线弹性阶段的斜率 E , 而 D^p 代表塑性应力增量 ($=d\sigma^e - d\sigma$) 与 $d\epsilon$ 对应的斜线 GC 的斜率 E^p ; 而 D^{ep} 代表实际的应力增量 $d\sigma$ 与应变增量 $d\epsilon$ 之比 E^{ep} 。在复杂应力状态下, D^e 、 D^p 、 D^{ep} 与 E 、 E^p 、 E^{ep} 的几何意义和物理意义相似。

5.2.6.3 弹塑性本构关系的矩阵形式

1. 加载函数的不变量导数

式(5-72)经过转化就可以得到适于数值计算的弹塑性本构关系表达式, 为此, 首先对式(5-73)中塑性刚度张量 D_{ijkl}^p 的 φ 及 Q 进行分析。一般设加载函数 φ 与塑性势函数 Q 分别为

$$\varphi(\sigma_{ij}, H) = \varphi(p, \sqrt{J_2}, J_3, H) = 0 \quad (5-77)$$

$$Q(\sigma_{ij}, H) = Q(p, \sqrt{J_2}, J_3, H) = 0 \quad (5-78)$$

将 φ 及 Q 分别对 σ_{ij} 求偏导后可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-79)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial Q}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial Q}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-80)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{\partial \sqrt{J_2}} s_{ij} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} &= t_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (5-81)$$

如果设

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial p}, B_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{1}{2\sqrt{J_2}}, B_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} \\ C_1 &= \frac{1}{3} \frac{\partial Q}{\partial p}, C_2 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial Q}{\partial \sqrt{J_2}}, C_3 = \frac{\partial Q}{\partial J_3} \end{aligned} \right\} \quad (5-82)$$

将式(5-81)及式(5-82)分别代入式(5-79)及式(5-80)可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = B_1 \delta_{ij} + B_2 s_{ij} + B_3 t_{ij} \quad (5-83)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = C_1 \delta_{ij} + C_2 s_{ij} + C_3 t_{ij} \quad (5-84)$$

在以上两式中, δ_{ij} 、 s_{ij} 、 t_{ij} 都与 φ 、 Q 无关, 只有 B_i 和 C_i 与选定的加载函数 φ 及塑性势函数 Q 有关; 如果采用相关联的正交流动法则, $Q = \varphi$, 从而 $B_i = C_i$, 式(5-83)与式(5-84)就变为同一式。如果采用不相关联的流动法则, 式(5-84)中的 C_i , 就要视具体模型规定而求得。经过推导, 对于岩土工程中常用的几种屈服或加载函数, 其 B_1 、 B_2 、 B_3 见表 5-2。现以 C-M 屈服与破坏准则为例, 说明 B_1 、 B_2 、 B_3 的推导过程。C-M 准则可以写成如下的形式:

表 5-2 不同加载函数的 B_1 、 B_2 、 B_3

加载函数		$B_1 = \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial p}$	$B_2 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sqrt{J_2}}$	$B_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial J_3}$
Mises		0	$\frac{1}{2\sqrt{J_2}}$	0
广义 Mises	外 锥 角	$\frac{-2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$	$\frac{1}{2\sqrt{J_2}}$	0
	内 锥 角	$\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$	$\frac{1}{2\sqrt{J_2}}$	0
	内 切 角	$\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{(3+\sin^2\varphi)}}$	$\frac{1}{2\sqrt{J_2}}$	0
Tresca		0	$\frac{1}{2\sqrt{J_2}} [\cos\theta_\sigma (1 + \tan\theta_\sigma \tan 3\theta_\sigma)]$	$\frac{\sqrt{3} \sin\theta_\sigma}{2J_2 \cos 3\theta_\sigma}$
C-M		$-\frac{1}{3} \sin\varphi$	$\frac{\cos\theta_\sigma}{2\sqrt{J_2}} \left[1 + \tan\theta_\sigma \tan 3\theta_\sigma + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\varphi (\tan\theta_\sigma - \tan 3\theta_\sigma) \right]$	$\frac{\cos\theta_\sigma \sin\theta_\sigma - \sqrt{3} \sin\theta_\sigma}{2J_2 \cos 3\theta_\sigma}$
L-D		$\left(\frac{1}{9} - \frac{3}{k} \right) I^2 - \frac{1}{3} J_2$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(2\sqrt{J_2} - I) S \sin\theta_\sigma - \frac{6}{\sqrt{3}} p \right] - p$	1

$$\varphi(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) = -p \sin\varphi + \sqrt{J_2} (\cos\theta_\sigma + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta_\sigma \sin\varphi) - c \cos\varphi = 0 \quad (5-85)$$

其中, θ_σ 与 $\sqrt{J_2}$ 、 J_3 的关系为

$$\sin 3\theta_\sigma = -\frac{3\sqrt{2} J_3}{2 J_2^{\frac{3}{2}}} \quad (5-86)$$

由式(5-82)有

$$B_1 = \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = -\frac{1}{3} \sin \varphi \quad (5-87)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_\sigma} \frac{\partial \theta_\sigma}{\partial \sqrt{J_2}} \right) \\ &= \frac{\cos \theta_\sigma}{2\sqrt{J_2}} \left[1 + \tan \theta_\sigma \tan 3\theta_\sigma + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi (\tan \theta_\sigma - \tan 3\theta_\sigma) \right] \end{aligned} \quad (5-88)$$

$$B_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_\sigma} \frac{\partial \theta_\sigma}{\partial J_3} \quad (5-89)$$

表 5-2 中其他各种屈服或加载准则的应力不变量导数均采用类似方法求得, 读者可自行验证。

2. 本构关系的矩阵化

在式(5-68)至式(5-70)中, 如果设

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e &= H_{kl} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e &= H'_{kl} \\ A + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} &= A + H_{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}} = \bar{H} \end{aligned} \right\} \quad (5-90)$$

则式(5-68)至式(5-70)简化为

$$d\lambda = \frac{H_{ij} d\varepsilon_{ij}}{\bar{H}} \quad (5-91)$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{H'_{ij} H_{kl}}{\bar{H}} \quad (5-92)$$

$$d\sigma_{ij} = \left[D_{ijkl}^e - \frac{H'_{ij} H_{kl}}{\bar{H}} \right] d\varepsilon_{kl} \text{ 或 } \{ d\sigma \} = \left([D^e] - \frac{[H'] [H]}{[\bar{H}]} \right) \{ d\varepsilon \} \quad (5-93)$$

式中, H_{ij} 为与加载函数 φ 及弹性常数有关的二阶张量或矩阵;

H'_{ij} 为与塑性势函数 Q 及弹性常数有关的二阶张量或矩阵;

\bar{H} 为与硬化模量 A 、势函数 Q_0 及 H_{kl} 有关的标量函数。

为了求出 H_{kl} 及 H'_{kl} 的具体表达式, 可以将弹性矩阵以 K 、 G 形式表示为

$$D_{ijkl}^e = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5-94)$$

然后将式(5-79)至式(5-84)各式代入式(5-90), 经过简化整理可得

$$\begin{cases} H_{ii} = 3KB_1\delta_{ii} + 2GB_2s_{ii} + 2GB_3t_{ii} \\ H'_{ii} = 3KC_1\delta_{ii} + 2GC_2s_{ii} + 2GC_3t_{ii} \end{cases} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \quad (5-95)$$

$$\begin{cases} H_{ij} = 2GB_2s_{ij} + 2GB_3t_{ij} \\ H'_{ij} = 2GC_2s_{ij} + 2GC_3t_{ij} \end{cases} \quad (i \neq j) \quad (5-96)$$

$$\bar{H} = 9B_1C_1K + 2B_2G(2C_2J_2 + 3C_3J_3) + 2B_3G(3C_2J_3 + C_3s_{ik}s_{ij}s_{il}s_{lj} - \frac{4}{3}C_3J_2^2) + A \quad (5-97)$$

在平面应变条件下 ($\varepsilon_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), 式(5-92)的展开式为

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K - \frac{H'_{xx}H_{xx}}{\bar{H}} & K - \frac{2}{3}G - \frac{H'_{xx}H_{yy}}{\bar{H}} & -\frac{H'_{xx}H_{xy}}{\bar{H}} \\ -\frac{H'_{yy}H_{xx}}{\bar{H}} & 3K - \frac{H'_{yy}H_{yy}}{\bar{H}} & -\frac{H'_{yy}H_{xy}}{\bar{H}} \\ K - \frac{2}{3}G - \frac{H'_{xy}H_{xx}}{\bar{H}} & -\frac{H'_{xy}H_{yy}}{\bar{H}} & G - \frac{H'_{xy}H_{xy}}{\bar{H}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (5-98)$$

式(5-93)至式(5-98)是针对不相关联的流动法则而建立的, 即 $\varphi \neq Q, H'_{ij} \neq H_{ij}$, 因此, 其中的弹塑性矩阵都不对称。

如果采用相关联流动法则, 即 $\varphi = Q, H'_{ij} = H_{ij}$, 这时式(5-95)、式(5-96)及式(5-97)简化为

$$H_{ij} = H'_{ij} = 3B_1K\delta_{ij} + 2B_2Gs_{ij} + 2GB_3t_{ij} \quad (5-99)$$

$$\bar{H} = 9B_1^2K + 4B_2^2GJ_2 + \frac{4}{3}B_2^2GJ_2^2 + 1.2B_2B_3GJ_3 + A \quad (5-100)$$

将式(5-99)展开后有

$$\begin{cases} H_{xx} = 3B_1K + 2B_2Gs_x + 2GB_3(s_x^2 + s_{xy}^2 + s_{xx}^2 - \frac{2}{3}J_2) \\ H_{yx} = 2B_2Gs_{yx} + 2B_3G(s_{xy}s_{xx} - s_{yx}s_{xx} + s_{yx}s_{xy}) \end{cases} \quad (5-101)$$

通过以上的弹塑性刚度张量 D_{ijkl}^e 的矩阵化与对称化, 就可以针对具体选定的本构模型, 求出矩阵的各个元素, 直接用于边值问题的数值计算之中。

5.3 岩土流变理论

5.3.1 岩土流变的概念

流变(Rheology)性质是指材料的应力-应变关系与时间因素有关的性质, 材料变形过程中具有时间效应的现象称为流变现象。

岩土变形不仅表现出弹性和塑性, 而且也具有流变性质, 岩土的流变包括蠕变、松弛和弹性后效。蠕变(Creep)是当应力不变时, 变形随时间增加而增长的现象。松弛(Relaxation)是当应变不变时, 应力随时间增加而减小的现象。弹性后效(Elastic Aftereffect)是加载或卸载时, 弹性应变滞后于应力的现象。

由于岩土蠕变特性对岩土工程稳定性有重要意义,我们重点分析岩土的蠕变曲线,如图 5-15 所示,图中三条蠕变曲线是在不同应力下得到的, $\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$ 。蠕变试验表明,当岩土在某一较小的恒定荷载持续作用下,其变形量虽然随时间增长有所增加,但蠕变变形的速率则随时间增长而减少,最后变形趋于一个稳定的极限值,这种蠕变称为稳定蠕变。当荷载较大时,如图 5-15 中的 $abcd$ 曲线所示,蠕变不能稳定于某一极限值,而是无限增长直到破坏。这种蠕变称为不稳定蠕变,是典型的蠕变曲线,根据应变速率不同,其蠕变过程可分为三个阶段:

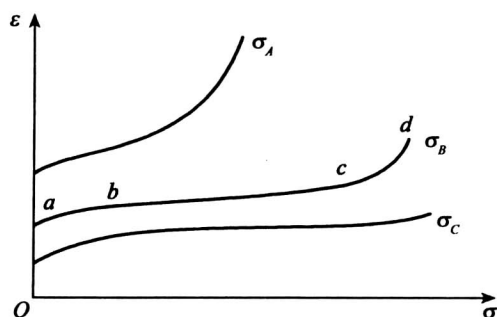


图 5-15 岩土的蠕变曲线

第一蠕变阶段:如图 5-15 曲线中 ab 段所示,应变速率随时间增加而减小,故又称为减速蠕变阶段或初始蠕变阶段。

第二蠕变阶段:如图 5-15 曲线中 bc 段所示,应变速率保持不变,故又称为等速蠕变阶段。

第三蠕变阶段:如图 5-15 曲线中 cd 段所示,应变速率迅速增加直到岩土破坏,故又称为加速蠕变阶段。

一种岩土既可发生稳定蠕变,也可发生不稳定蠕变,这取决于岩土应力的大小。超过某一临界应力时,蠕变向不稳定蠕变发展;小于此临界应力时,蠕变按稳定蠕变发展,通常称此临界应力为岩土的长期强度。

5.3.2 流变模型理论

5.3.2.1 概述

在流变学(Rheology)中,流变性主要研究材料流变过程中的应力、应变和时间的关系,用应力、应变和时间组成的流变方程表达。流变方程主要包括本构方程、蠕变方程和松弛方程。

在一系列的岩土流变试验基础上可建立反映岩土流变性质的流变方程,通常有以下三种方法:

1. 经验方程法

根据岩土蠕变试验结果(图 5-16),由数理统计学的回归拟合方法建立经验方程。

岩土蠕变经验方程的通常形式为

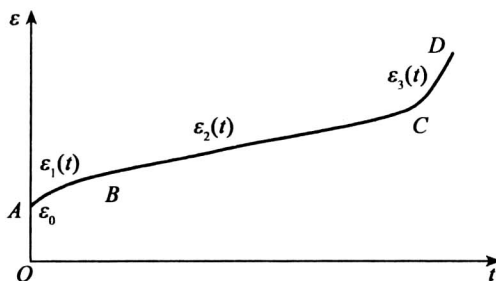


图 5-16 岩土的典型蠕变曲线

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t) \quad (5-102)$$

式中, $\varepsilon(t)$ 为 t 时间的应变; ε_0 为瞬时应变; $\varepsilon_1(t)$ 为初始段应变; $\varepsilon_2(t)$ 为等速段应变; $\varepsilon_3(t)$ 为加速段应变。

典型的岩土蠕变方程有:

(1) 幂函数方程。对大理石进行轴向和侧向蠕变试验得出如图 5-17 所示的典型的大理岩应变(ε)-时间(t , 单位为小时, 以下同)曲线, 可用幂函数方程表达:

第一、二阶段轴向蠕变方程为

$$\varepsilon = 0.4205t^{0.5044} \times 10^{-4} \quad (5-103)$$

第一、二阶段的侧向蠕变方程为

$$\varepsilon = 1.1610t^{0.5690} \times 10^{-4} \quad (5-104)$$

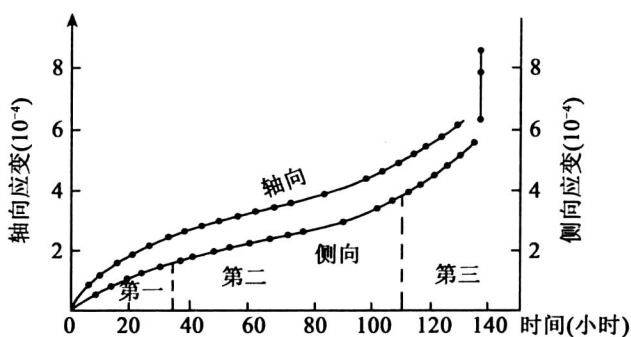


图 5-17 在 87.8MPa 恒压下大理石的轴向和侧向蠕变曲线

(2) 指数方程。对闪长玢岩试件进行弹簧式单轴压缩蠕变试验, 加载到 5 吨后产生加速蠕变, 其蠕变曲线为指数方程:

$$\varepsilon = 0.01968481 \times e^{0.2617857t} \quad (5-105)$$

(3) 幂函数、指数函数、对数函数混合方程。在室温 $20 \pm 4^\circ\text{C}$ 和大气压 $0.102 \pm 0.05\text{MPa}$ 的条件下, 在实验室对几种岩石进行单轴蠕变实验, 并用计算机进行拟合分析, 得到了如下各种岩石蠕变方程:

①干燥的钙质石灰岩:

$$\varepsilon = (2822 + 51 \lg t + 48 t^{0.651}) \times 10^{-6} \quad (5-106)$$

②干燥的白云质石灰岩:

$$\varepsilon = (648 + 56 t^{0.489} + 0.7 e^{0.49t}) \times 10^{-6} \quad (5-107)$$

③干燥的砂岩:

$$\varepsilon = (1858 + 410 t^{0.687} - 58 e^{0.01t}) \times 10^{-6} \quad (5-108)$$

2. 微分方程法(流变模型理论法)

此法在研究岩土的流变性质时,将介质理想化,归纳成各种模型,模型可用理想化的具有基本性能(包括弹性、塑性和黏性)的元件组合而成。通过这些元件不同形式的串联和并联,得到一些典型的流变模型体,相应地推导出有关微分方程,即建立模型的本构方程和有关的特性曲线。

5.3.2.2 基本元件

在流变学中,所有的流变模型均可由三个基本元件组合而成,这三个基本元件为弹性元件(Hooke)、塑性元件(St. Venant)和黏性元件(Newton)。现分述如下:

1. 弹性元件(Hooke Element)

如果材料在荷载作用下,其变形性质完全符合胡克定律,则称此种材料为胡克体,是一种理想的弹性体,其力学模型用一个弹簧元件表示(图 5-18),以符号 H 代表。

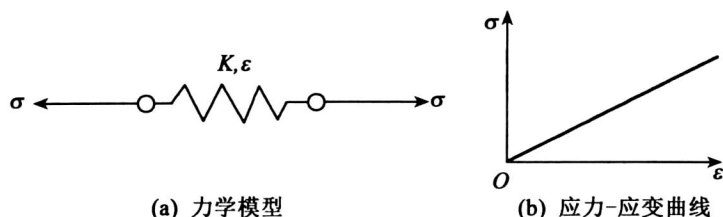


图 5-18 胡克体力学模型及其动态

胡克体的应力-应变关系是线弹性的,其本构方程为

$$\sigma = K \cdot \varepsilon \quad (5-109)$$

式中, K 为弹性系数。

分析式(5-109)可知胡克体有如下性质:

- (1) 具有瞬时弹性变形性质,无论荷载大小,只要 σ 不为零,就有相应的应变 ε ,当 σ 变为零(卸载)时, ε 也为零,说明没有弹性后效,即与时间无关;
- (2) 应变为恒定时,应力也保持不变,应力不因时间增长而减小,故无应力松弛性质;
- (3) 应力保持恒定,应变也保持不变,故无蠕变性质。

2. 塑性元件(St. Venant Element)

物体所受的应力达到屈服极限时便开始产生塑性变形,即使应力不再增加,变形仍不断增长,具有这一性质的物体为理想的塑性体,其力学模型用一个摩擦片(或滑块)表示,并以符号 Y 代表,如图 5-19 所示。理想塑性体的本构方程为

$$\text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时, } \varepsilon = 0 \quad (5-110)$$

$$\sigma \geq \sigma_s \text{ 时, } \varepsilon \rightarrow \infty$$

式中, σ_s 为材料的屈服极限。

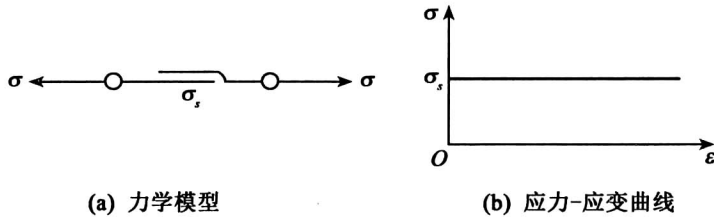


图 5-19 塑性体力学模型及其动态

3. 黏性元件(Newton Element)

牛顿流体(Newtonian Fluid)是一种理想黏性体,符合牛顿流动定义,即应力与应变速率成正比(图 5-20),图中直线通过坐标原点。牛顿流体的力学模型是用一个带孔活塞组成的阻尼器表示,简化的模型如图 5-20(a)所示,并用符号 N 表示,通常称为黏性元件。

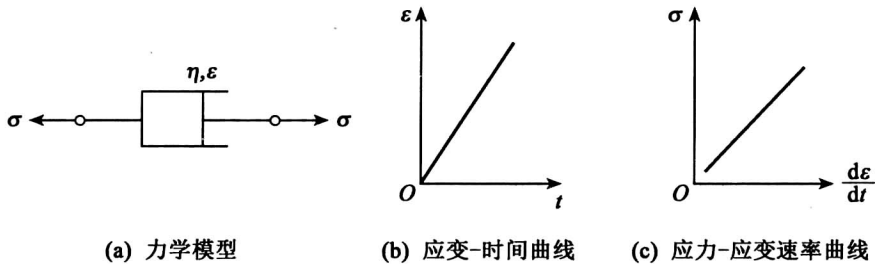


图 5-20 牛顿流体力学模型及其动态

根据定义,元件的本构关系为

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

即

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (5-111)$$

式中, η 为牛顿黏性系数。

将式(5-111)积分,得

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma t + C \quad (5-112)$$

式中, C 为积分常数,当 $t=0$ 时, $\varepsilon=0$, 则 $C=0$ 。

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma t \quad (5-113)$$

当 $t=t_1$ 时, $\sigma=\sigma_0$, 即 $\varepsilon=\frac{1}{\eta}\sigma_0 t_1$ 。

分析牛顿体的本构关系, 可以得出牛顿体具有如下性质:

(1) 当 $\varepsilon=\frac{1}{\eta}\sigma t, t=0$ 时, $\varepsilon=0$ 。当应力为 σ_0 时, 完成其相应的应变需要时间 t_1 , 如图 5-20(b) 所示, 说明应变与时间有关, 牛顿体无瞬时变形, 从元件的物理概念也可知, 当活塞受一拉力时, 活塞发生位移, 但由于黏性液体的阻力, 活塞的位移逐渐增大, 位移随时间增长;

(2) 当 $\sigma=0$ 时, $\eta\dot{\varepsilon}=0$, 积分后得 $\varepsilon=\text{常数}$, 表明去掉外力后应变为常数, 活塞的位移立即停止, 不再恢复, 只有再受到相应的压力时, 活塞才回到原位, 所以牛顿体无弹性后效, 有永久变形;

(3) 当应变 $\varepsilon=\text{常数}$ 时, $\sigma=\eta\dot{\varepsilon}=0$, 说明当应变保持某一恒定值后, 应力为零, 无应力松弛性能。

从上述可以了解牛顿体具有黏性流动的特点。此外, 塑性变形也称塑性流动, 它与黏性流动有明显的区别, 塑性流动只有当 σ 达到或超过屈服应力 σ_s 时才发生, 当 σ 小于屈服应力时, 完全塑性体表现出刚体的特点, 而黏性流动则不需要应力超过某一定值, 只要有微小的应力, 牛顿体就会发生流动。实际上, 塑性流动、黏性流动经常和弹性变形联系在一起出现。因此, 常常出现黏弹性体和黏弹塑性体, 前者研究应力小于屈服极限时的应力、应变与时间的关系, 后者研究应力大于屈服极限时应力、应变与时间的关系。

5.3.2.3 组合模型

上述基本元件的任何一种元件单独表示岩土的性质时, 只能描述弹性、塑性或黏性三种性质中的一种性质, 而客观存在的岩土性质都不是单一的, 通常都表现出复杂的特性, 为此, 必须对上述三种元件进行组合, 才能准确地描述岩土的特性。目前已经提出了几十种流变体的组合模型, 它们大多数是利用提出者的名字命名的, 组合的方式为串联、并联、串并联和串串联, 串联以符号“—”表示, 并联以“|”表示。下面讨论并联和串联的性质。

(1) 串联: 应力: 组合体总应力等于串联中任何元件的应力 ($\sigma=\sigma_1=\sigma_2$);

应变: 组合体总应变等于串联中所有元件应变之和 ($\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$)。

(2) 并联: 应力: 组合体总应力等于并联中所有元件应力之和 ($\sigma=\sigma_1+\sigma_2$);

应变: 组合体总应变等于并联中任何元件的应变 ($\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$)。

1. St. Venant 体

St. Venant 体由一个弹簧和一个摩擦片串联组成, 代表弹塑性体, 其力学模型如图 5-21 所示。

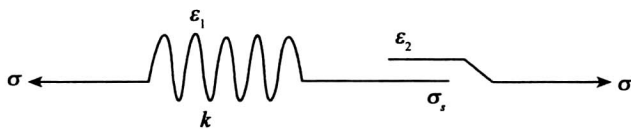


图 5-21 St. Venant 体力学模型

(1) 本构方程。当 σ 小于摩擦片的摩擦阻力时, 弹簧产生瞬时弹性变形 $\frac{\sigma}{k}$, 而摩擦片没有变形, 即 $\varepsilon_2=0$; 当 $\sigma \geq \sigma_s$ 时, 即克服了摩擦片的摩擦阻力后, 摩擦片将在 σ 作用下无限制滑动。所以, St. Venant 体的本构方程为

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_s, \varepsilon = \frac{\sigma}{k} \\ \sigma \geq \sigma_s, \varepsilon \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5-114)$$

上式用图形表示为图 5-22。

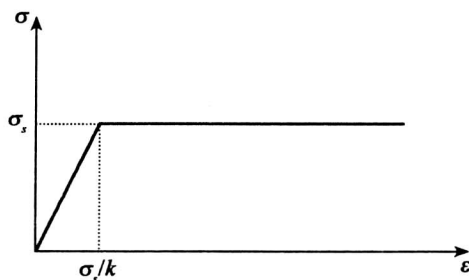


图 5-22 St. Venant 体本构关系示意图

(2) 卸载特性。如在某时刻卸载, 使 $\sigma=0$, 则弹性变形全部恢复, 塑性变形停止, 但已发生的塑性变形永久保留。

St. Venant 体代表理想弹塑性体, 无蠕变, 无松弛, 无弹性后效。

2. Maxwell 体

Maxwell 体是一种弹黏性体, 它由一个弹簧和一个阻尼器串联组成, 其力学模型如图 5-23 所示。



图 5-23 Maxwell 体力学模型

(1) 本构方程。由串联可得

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

由于

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{k} \dot{\sigma}$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\eta} \sigma$$

所以
$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{k} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (5-115)$$

式(5-115)为 Maxwell 体的本构方程。

(2) 蠕变方程。在恒定荷载 σ 条件下, $\sigma = \sigma_0$, 则 $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ 。

本构方程简化为

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma_0$$

解此微分方程, 得

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma_0 t + C$$

式中, C 为积分常数, 利用初始条件求 C 。当 $t=0$ 时, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{k}$, 由此可知, $C = \frac{\sigma_0}{k}$, 代入上式, 可得 Maxwell 体的蠕变方程为

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma_0 t + \frac{\sigma_0}{k} \quad (5-116)$$

由式(5-116)可知, 模型有瞬时应变, 并随着时间增长应变逐渐增大, 这种模型反映的是等速蠕变, 如图 5-24(a) 所示。

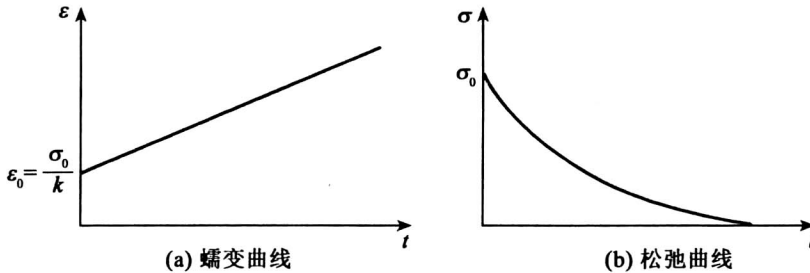


图 5-24 Maxwell 体的蠕变曲线和松弛曲线

(3) 松弛方程。保持 ε 不变, 则有 $\dot{\varepsilon} = 0$ 。本构方程式(5-115)变为

$$\frac{1}{k} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = 0$$

解此方程得

$$-\frac{k}{\eta} t = \ln \sigma + C$$

式中, C 为积分常数, 利用初始条件求 C 。当 $t=0$ 时, $\sigma = \sigma_0$ (σ_0 为瞬时应力), 得 $C = -\ln \sigma_0$, 将 C 代入上式, 得

$$-\frac{k}{\eta} t = \ln \sigma - \ln \sigma_0 = \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

所以

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{k}{\eta}t} \quad (5-117)$$

由式(5-117)可见,当 t 增加时, σ 将逐渐减少,也就是当应变恒定时,应力随时间的增长而逐渐减少,这种力学现象称为松弛,如图5-24(b)所示。

从模型的物理概念理解松弛现象,当 $t=0$ 时,黏性元件来不及变形,只有弹性元件产生变形,但是,随着时间的增长,黏性元件在弹簧的作用下逐渐变形,随着阻尼器的伸长,弹簧逐渐收缩,即弹簧中的应力逐渐减小,这就是松弛。

根据上述分析,Maxwell体具有瞬时变形、等速蠕变和松弛的性质,属于不稳定蠕变,因此,可描述具有这些性质的岩土体。

3. Kelvin 体

Kelvin体是一种黏弹性体,它由胡克体与牛顿体即一个弹簧与一个阻尼器并联而成,力学模型如图5-25所示。

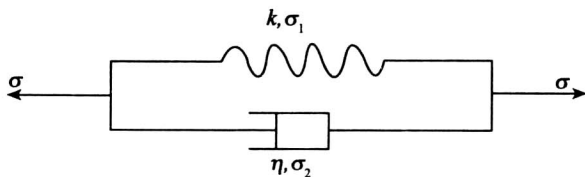


图 5-25 Kelvin 体模型

(1) 本构方程。由于二元件并联,故

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = k\varepsilon_1 = k\varepsilon$$

$$\sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2 = \eta \dot{\varepsilon}$$

由上面式子,可得

$$\sigma = k\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (5-118)$$

(5-118)式即为 Kelvin 体的本构方程。

(2) 蠕变方程。如果在 $t=0$ 时施加一个不变的应力 σ_0 ,并保持 σ_0 为恒定值,本构方程变为

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= k\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{k}{\eta} \varepsilon &= \frac{1}{\eta} \sigma_0 \end{aligned}$$

解此微分方程,得

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k} + A e^{-\frac{k}{\eta}t}$$

式中, A 为积分常数,可由初始条件求出。

当 $t=0$ 时, $\varepsilon=0$,因为施加瞬时应力 σ_0 后,由于阻尼器的惰性,阻止弹簧产生瞬时变形,整个模型在 $t=0$ 时不产生变形,应变为零,由此可求得

$$A = -\frac{\sigma_0}{k}$$

将 A 代入上式得

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{\eta}t}) \quad (5-119)$$

用式(5-119)作图,得指数曲线形式的蠕变曲线,从公式和曲线可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k}$ 趋于常数,相当于只有弹簧 H 的应变,如图 5-26 所示,所以这种模型的蠕变属于稳定蠕变。

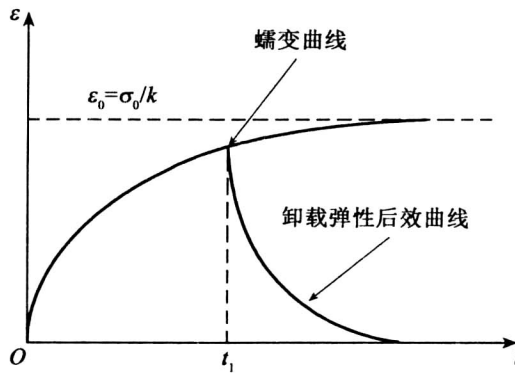


图 5-26 Kelvin 体蠕变曲线和弹性后效曲线

(3) 卸载方程。在 $t=t_1$ 时卸载, $\sigma=0$, 代入本构方程为

$$\eta \dot{\varepsilon} + k\varepsilon = 0$$

其通解为 $\ln \varepsilon = -\frac{k}{\eta}t + C$, C 为积分常数, 即

$$\varepsilon = A_1 e^{-\frac{k}{\eta}t} \quad A_1 = e^C$$

这里, 初始条件 $t=t_1, \varepsilon=\varepsilon_1$, 即

$$\varepsilon_1 = A_1 e^{-\frac{k}{\eta}t_1}$$

可得

$$A_1 = \varepsilon_1 e^{\frac{k}{\eta}t_1}$$

式中, ε_1 由式(5-118)得到, 即

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{\eta}t_1})$$

可得卸载方程为

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{\frac{k}{\eta}(t_1-t)} \quad (5-120)$$

由式(5-120)可知, 当 $t=t_1$ 时, 应力虽已减为零, 此瞬时应变 $\varepsilon=\varepsilon_1$ 。但随时间 t 的增长, 应变 ε 逐渐减小, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 应变 $\varepsilon=0$, 这表明阻尼器在弹簧收缩时, 也随之逐渐恢复变形, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 弹性元件与黏性元件完全恢复变形, 这种现象就是前面讲的弹性后效。

(4) 松弛方程。如今模型应变保持恒定,即 $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{常数}$,此时本构方程为

$$\sigma = k\varepsilon \quad (5-121)$$

式(5-121)表明,当应变保持恒定时,应力 σ 也就保持恒定,并不随时间增长而减小,即模型无应力松弛性能。

综上所述,Kelvin 体属于稳定蠕变模型,有弹性后效,没有松弛。

4. Modified Kelvin 体

Modified Kelvin 体由一个开尔文元件和一个弹簧串联组成,其力学模型如图 5-27 所示。

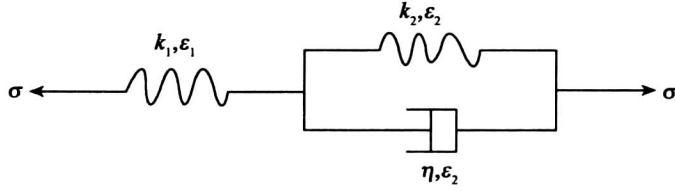


图 5-27 Modified Kelvin 体力学模型

(1) 本构方程。由于串联

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon, \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}$$

对于弹簧

$$\sigma = k_1 \varepsilon_1, \dot{\sigma} = k_1 \dot{\varepsilon}_1$$

对于 Kelvin 体

$$\sigma = k_2 \varepsilon_2 + \eta \dot{\varepsilon}_2$$

所以

$$\sigma = k_2(\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1) = k_2\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{k_1}\right) + \eta\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{k_1}\right)$$

将上式整理后可得

$$\frac{\eta}{k_1} \dot{\sigma} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \sigma = \eta \dot{\varepsilon} + k_2 \varepsilon \quad (5-122)$$

式(5-122)即为 Modified Kelvin 体的本构方程。

(2) 蠕变方程。在恒定荷载 σ_0 作用下,由于 Modified Kelvin 体由弹簧和 Kelvin 体两部分组成,其蠕变变形也由这两部分组成。对于弹簧,只有瞬时变形 $\frac{\sigma_0}{k_1}$,对于 Kelvin 体,其蠕变方程为 $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_2}{\eta} t}\right)$,所以 Modified Kelvin 体在恒定应力 σ_0 作用下所产生的应变总值为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k_1} + \frac{\sigma_0}{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_2}{\eta} t}\right) \quad (5-123)$$

式(5-123)即为 Modified Kelvin 体的蠕变方程,其蠕变曲线如图 5-28 所示。

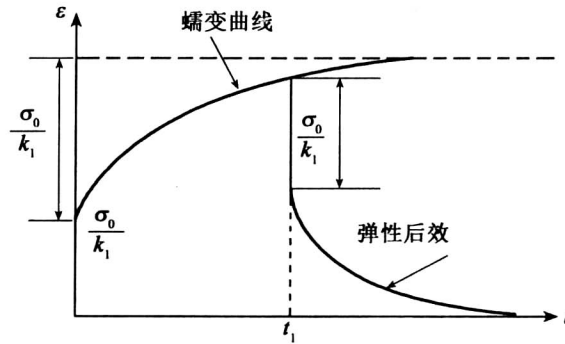


图 5-28 Modified Kelvin 体蠕变曲线

(3) 弹性后效(卸载效应)。如在 t_1 时刻卸载, 弹簧产生的弹性变形 $\frac{\sigma_0}{k_1}$ 立即恢复, Kelvin 体的变形则需经过很长时间才能恢复到零, 恢复曲线如图 5-26 所示, 与 Kelvin 体完全类似。

5. Poyting-Thomson 体

Poyting-Thomson 体由一个 Maxwell 体和一个弹簧并联组成, 其力学模型如图 5-29 所示。

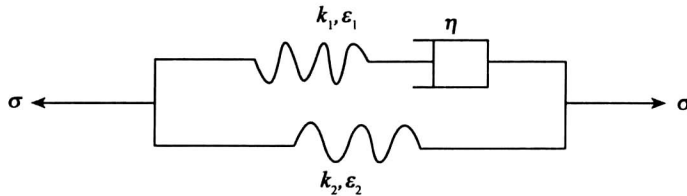


图 5-29 Poyting-Thomson 体力学模型

(1) 本构方程。由于 Poyting-Thomson 体由 Maxwell 体和弹簧并联而成, 所以

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2$$

由 Maxwell 体可得

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{k_1} + \frac{\sigma_1}{\eta}$$

所以

$$\sigma_1 = \eta \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{k_1} \dot{\sigma}_1$$

由胡克体可得

$$\sigma_2 = k_2 \varepsilon, \dot{\sigma}_2 = k_2 \dot{\varepsilon}$$

两部分并联并整理得

$$\dot{\sigma} + \frac{k_1}{\eta} \sigma = (k_1 + k_2) \dot{\varepsilon} + \frac{k_1 k_2}{\eta} \varepsilon \quad (5-124)$$

式(5-124)就是 Poyting-Thomson 体的本构方程,形式与 Modified kelvin 体类似。

(2)蠕变方程。在恒定应力 σ_0 作用下, $\dot{\sigma} = 0$, 此时, 式(5-124)变为

$$(k_1 + k_2) \dot{\varepsilon} + \frac{k_1 k_2}{\eta} \varepsilon = \frac{k_1}{\eta} \sigma_0$$

解得

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k_2} \left(1 - \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{\frac{-k_1 k_2}{(k_1 + k_2) \eta} t} \right) \quad (5-125)$$

当 $t=0$ 时, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{k_1 + k_2}$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon \rightarrow \frac{\sigma_0}{k_2}$ 。

由式(5-125)所表述的蠕变曲线如图 5-30 所示。

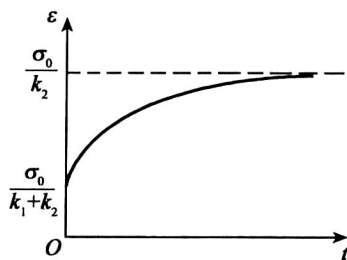


图 5-30 Poyting-Thomson 体蠕变曲线

(3)弹性后效(卸载效应)。若在 $t=t_1$ 时突然卸载,此时已产生的蠕变应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{k_2} \left(1 - \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{\frac{-k_1 k_2}{(k_1 + k_2) \eta} t_1} \right)$$

若将此时刻重新定义为零时刻($t'=0$), 并有 $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, 因而由式(5-125)有

$$(k_1 + k_2) \dot{\varepsilon} + \frac{k_1 + k_2}{\eta} \varepsilon = 0$$

解此方程可得

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{\frac{-k_1 k_2}{(k_1 + k_2) \eta} t'} \quad (5-126)$$

$$t'=0 \text{ 时, } \varepsilon = \varepsilon_1; \quad t' \rightarrow \infty \text{ 时, } \varepsilon = 0$$

因而式(5-125)描述的就是一种弹性后效。

Poyting-Thomson 体属于稳定蠕变模型,有弹性后效。

6. 理想黏塑性体

理想黏塑性模型是由一副摩擦片和一个阻尼器并联而成,其力学模型如图 5-31 所示。

(1)本构方程。根据并联性质

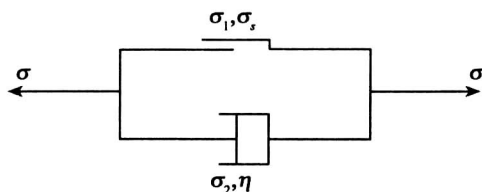


图 5-31 理想黏塑性体力学模型

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

又知各元件本构关系为

$$\begin{cases} \sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon} \\ \text{当 } \sigma_1 < \sigma_s \text{ 时, } \varepsilon = 0 \\ \text{当 } \sigma_1 = \sigma_s \text{ 时, } \varepsilon \rightarrow \infty \end{cases}$$

由此可知,当 $\sigma < \sigma_s$, $\varepsilon = 0$, 这时模型为刚体。

当 $\sigma \geq \sigma_s$ 时, $\sigma = \sigma_s + \eta \dot{\varepsilon}$ 或 $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta}$, 因此,理想黏塑性体的本构方程为

$$\begin{cases} \text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时, } \varepsilon = 0 \\ \text{当 } \sigma \geq \sigma_s \text{ 时, } \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta} \end{cases} \quad (5-127)$$

以 $\sigma, \dot{\varepsilon}$ 为坐标轴作图,得应变速率曲线为斜直线,如图 5-32 所示。

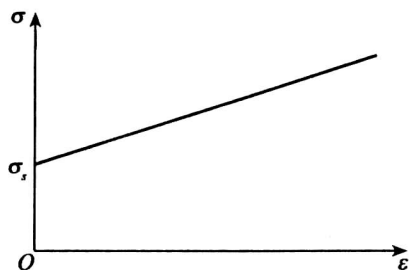


图 5-32 理想黏塑性体应力-应变速率关系曲线

(2) 蠕变方程。只研究 $\sigma \geq \sigma_s$ 的情况,将恒载 $\sigma = \sigma_0 \geq \sigma_s$ 代入式(5-127),即

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta} t + A \end{aligned}$$

由初始条件决定 A , 当 $t=0$ 时, $\varepsilon=0$, 代入上式, $A=0$, 因此,蠕变方程为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta} t \quad (5-128)$$

可见,蠕变曲线为斜直线(图 5-33)。

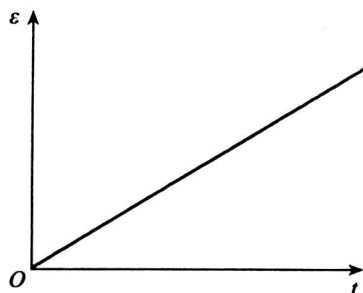


图 5-33 理想黏塑性体蠕变曲线

(3) 卸载方程。在 $t=t_1$ 时卸载, 根据模型各元件的特性, 卸载后模型停留在当时位置上, 即已发生应变值为 $\varepsilon = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\eta} t_1$, 全部变形将永久保留, 不能恢复。

这种模型没有弹性和弹性后效, 属不稳定蠕变。

7. Burgers 体

Burgers 体是一种弹黏性体, 它由 Maxwell 体与 Kelvin 体串联而成, 其力学模型如图 5-34 所示。

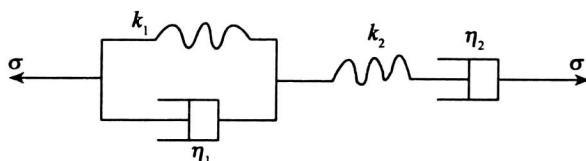


图 5-34 Burgers 体力学模型

(1) 本构方程。建立此体本构方程的方法是将 Kelvin 体的应力 σ_1 、应变 ε_1 与 Maxwell 体的应力 σ_2 、应变 ε_2 分别作为一个元件的应力、应变, 然后按串联的原则, 即可求出整个模型的本构方程。

对于 Kelvin 体, 有

$$\sigma = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 + k_1 \varepsilon_1$$

对于 Maxwell 体, 有

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{k_2} \dot{\sigma}_2 + \frac{1}{\eta_2} \sigma_2$$

因串联, 故

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 + k_1 \varepsilon_1$$

故可得

$$\sigma = \eta_1 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2) + k_1 (\varepsilon - \varepsilon_2)$$

将 $\dot{\varepsilon}_2$ 表达式代入,得

$$\sigma = \eta_1 \dot{\varepsilon} - \eta_1 \left(\frac{1}{k_2} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta_2} \sigma \right) + k_1 (\varepsilon - \varepsilon_2)$$

等式两边各微分一次,得

$$\dot{\sigma} = \eta_1 \ddot{\varepsilon} - \eta_1 \left(\frac{\ddot{\sigma}}{k_2} + \frac{\ddot{\sigma}}{\eta_2} \right) + k_1 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2)$$

再次将 $\dot{\varepsilon}_2$ 表达式代入,化简得

$$\ddot{\sigma} + \left(\frac{k_2}{\eta_1} + \frac{k_2}{\eta_2} + \frac{k_1}{\eta_1} \right) \dot{\sigma} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} \sigma = k_2 \ddot{\varepsilon} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1} \dot{\varepsilon} \quad (5-129)$$

式(5-129)即为 Burgers 体的本构方程。

(2) 蠕变方程。利用同一瞬时叠加原理,可把两体的蠕变方程相叠加成为该体的蠕变方程。

对 Kelvin 体,有

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{k_1} (1 - e^{-\frac{k_1}{\eta_1} t})$$

对 Maxwell 体,有

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_0}{k_2} + \frac{\sigma_0}{\eta_2} t$$

因为

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

所以有

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k_2} + \frac{\sigma_0}{\eta_2} t + \frac{\sigma_0}{k_1} (1 - e^{-\frac{k_1}{\eta_1} t}) \quad (5-130)$$

由分析得出,当 $t=0$ 时, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{k_2}$ 。

可见,此模型有瞬时弹性变形。当 $t=0$ 时,只有弹簧 2 有变形,其他元件无变形,随着时间的增长,应变逐渐加大,黏性元件按等速流动,如图 5-35 所示。

(3) 卸载方程。如在某一时刻 t_1 突然卸载,其卸载曲线如图 5-35 所示。由图 5-35 可知,卸载时有一瞬时回弹,回弹变形为 $\frac{\sigma_0}{k_2}$,即弹簧 2 在 $t=0$ 时的瞬时应变值;随时间增长,变形继续恢复,直到弹簧 1 的变形全部恢复为止,其变形值为 $\frac{\sigma_0}{k_1} (1 - e^{-\frac{k_1}{\eta_1} t})$ 。若 t_1 足够大,则可

将该段恢复的变形视为 $\frac{\sigma_0}{k_1}$,这一段就是弹性后效。最后仍保留一残余变形,变形值为 $\frac{\sigma_0}{\eta_2} t_1$ 。

所以,这种模型有瞬时弹性变形、减速蠕变、等速蠕变的性质,这种模型对软岩(如泥质岩)较适用。

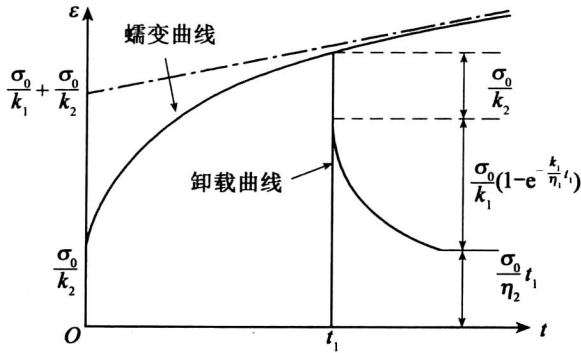


图 5-35 Burgers 体蠕变和卸载曲线

8. Price 体

Price 体由弹簧、Kelvin 体和理想黏塑性体串联而成,能最全面反映岩土弹-黏弹-黏塑特性,其力学模型如图 5-36 所示。

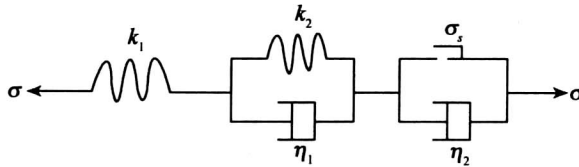


图 5-36 Price 体力学模型

当 $\sigma < \sigma_s$ 时,摩擦片为刚体,因此模型与 Modified Kelvin 体完全相同,其流变特性具有蠕变和松弛性能。

在 $\sigma \geq \sigma_s$ 条件下,其性能类似 Burgers 模型,所不同的仅是模型中的应力中应扣去克服摩擦片阻力 σ_s 的部分。因此,不必详细推导,可直接由 Burgers 体的流变方程式(5-129)中用 $\sigma - \sigma_s$ 取代 σ 而得到 Price 体的流变方程。

(1) 本构方程

$$\text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时,} \quad \frac{\eta_1}{k_1} \dot{\sigma} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \sigma = \eta_1 \dot{\varepsilon} + k_2 \varepsilon$$

$$\text{当 } \sigma \geq \sigma_s \text{ 时,} \quad \ddot{\sigma} + \left(\frac{k_2}{\eta_1} + \frac{k_2}{\eta_2} + \frac{k_1}{\eta_1}\right) \dot{\sigma} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} (\sigma - \sigma_s) = k_2 \ddot{\varepsilon} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1} \dot{\varepsilon} \quad (5-131)$$

(2) 蠕变方程。

$$\text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时,} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{k_1} + \frac{\sigma_0}{k_2} (1 - e^{-\frac{k_2}{\eta_1} t}) \quad (5-132)$$

$$\text{当 } \sigma \geq \sigma_s \text{ 时,} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{k_1} + \frac{\sigma_0}{k_2} (1 - e^{-\frac{k_2}{\eta_1} t}) + \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta_2} t \quad (5-133)$$

Price 体模型反映当应力水平较低时,开始变形较快,一段时间后逐渐趋于稳定成为稳

定蠕变,当应力水平等于和超过岩土某一临界应力值(如 σ_s)后,逐渐转化为不稳定蠕变,它能反映许多岩土蠕变的这两种状态,故此模型在岩土流变学中应用广泛,它特别适用于反映软岩、黏土的流变特征。

9. Bingham 体

Bingham 体由一个弹簧和一个理想黏塑性体串联而成,其力学模型如图 5-37 所示。

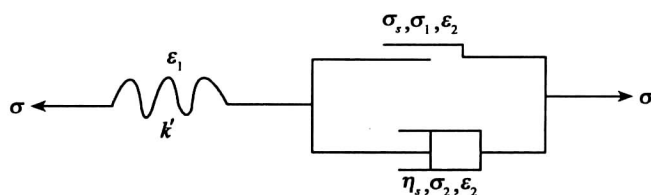


图 5-37 Bingham 体力学模型

(1) 本构方程。对于弹簧,有

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{k}, \quad \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}}{k}$$

对于理想黏塑性体,有

$$\text{当 } \sigma_1 \leq \sigma_s \text{ 时,} \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 = 0$$

$$\text{当 } \sigma_1 > \sigma_s \text{ 时,} \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta}$$

因此, Bingham 体的本构方程为

$$\begin{cases} \text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时, } \varepsilon = \frac{\sigma}{k}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} \\ \text{当 } \sigma \geq \sigma_s \text{ 时, } \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta} \end{cases} \quad (5-134)$$

(2) 蠕变方程。在恒定应力 σ_0 作用下, $\dot{\sigma} = 0$ 。

若 $\sigma_0 < \sigma_s$, 则理想黏塑性体没有变形, 只有弹簧有变形, 但没有蠕变。

当 $\sigma_0 \geq \sigma_s$ 时, 才有蠕变发生, 此时, 式(5-134)第二式变为

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta}$$

解此微分方程, 得

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta} t + C$$

当 $t=0$ 时, $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{k}$, 故 $C = \frac{\sigma_0}{k}$, 因此, 在 $\sigma_0 > \sigma_s$ 的条件下, Bingham 体的蠕变方程为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{k} \quad (5-135)$$

由式(5-135)表示的蠕变曲线如图 5-38 所示。

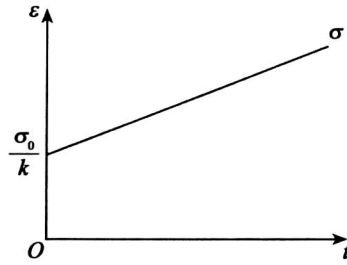


图 5-38 Bingham 体蠕变曲线

(3) 松弛方程。若保持应变值 ε_0 恒定, 则有 $\dot{\varepsilon} = 0$ 。若此时的应力值 $\sigma < \sigma_s$, 则理想黏塑性体仍为刚体, 没有变形。此时的 Bingham 体相当于一个弹簧, 没有松弛。

在 $\sigma \geq \sigma_s$ 的条件下, 式(5-134)变为

$$\frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta} = 0$$

解此微分方程, 可得

$$\sigma = \sigma_s + C_1 e^{-\frac{k}{\eta} t}$$

当 $t=0$ 时, $\sigma = \sigma_0$, 所以 $C_1 = \sigma_0 - \sigma_s$ 。

因此, 在 $\sigma \geq \sigma_s$ 条件下, Bingham 体的松弛方程为

$$\sigma = \sigma_s + (\sigma_0 - \sigma_s) e^{-\frac{k}{\eta} t} \quad (5-136)$$

当 $t=0$ 时, $\sigma = \sigma_0$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\sigma = \sigma_s$ 。

由此可见, Bingham 体保持应变恒定条件下发生的应力松弛, 不像 Maxwell 体那样应力降至零, 而是降至 σ_s , 如图 5-39 所示。

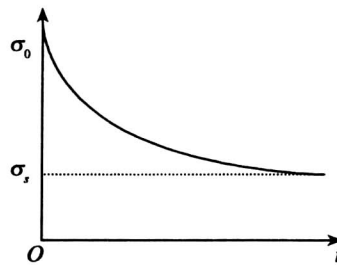


图 5-39 Bingham 体松弛曲线

5.3.3 长期强度

一般情况下, 当荷载达到岩土瞬时强度(通常指岩土单轴抗压强度)时, 岩土发生破坏。在岩土承受荷载低于其瞬时强度的情况下, 如持续作用较长时间, 由于流变作用, 岩土也可能发生破坏。因此, 岩土的强度是随外载作用时间的延长而降低, 通常把作用时间 $t \rightarrow \infty$ 的

强度(最低值) s_{∞} 称为岩土长期强度。

长期强度的确定方法有以下两种:

(1) 长期强度曲线即强度随时间降低的曲线, 可以通过各种应力水平长期恒载试验得出。设在荷载 $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$ 试验的基础上, 绘得非衰减蠕变的曲线簇, 并确定每条曲线加速蠕变达到破坏前的应力及荷载作用所经历时间, 如图 5-40(a) 所示。以纵坐标表示应力 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, 横坐标表示破坏应力和破坏前经历的时间 t_1, t_2, t_3, \dots , 作破坏应力和破坏前经历时间的关系曲线, 称为长期强度曲线, 如图 5-40(b) 所示, 所得曲线的水平渐近线在纵轴上的截距, 即为所求长期强度极限 s_{∞} 。

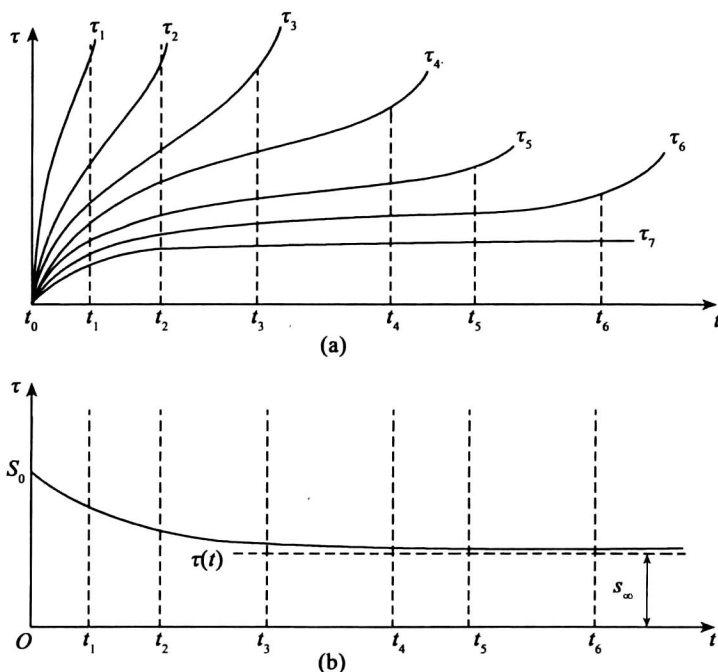


图 5-40 岩土蠕变曲线和长期强度曲线

(2) 通过不同应力水平恒载蠕变试验, 得一簇蠕变曲线 (τ 为恒量下 r - t 曲线) 图, 在图上作 $t_0 (t=0), t_1, t_2, \dots, t_{\infty}$ 时与纵轴平行的直线, 且与各蠕变曲线相交, 各交点包含 τ, r, t 三个参数, 如图 5-41(a) 所示, 应用此三个参数, 作等时的 τ - r 曲线簇, 得到相对应的等时 τ - r 曲线, 对应于 t_{∞} 的等时 τ - r 曲线的水平渐近线在纵轴上的截距, 即为所求长期强度 τ_{∞} 或 s_{∞} , 如图 5-41(b) 所示。

长期强度曲线如图 5-42 所示, 可用指数型经验方程表示为

$$\sigma_t = A + B e^{-\alpha t} \quad (5-137)$$

由 $t=0$ 时, $\sigma_t = s_0$, 得 $s_0 = A + B$; $t \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_t \rightarrow s_{\infty}$, 得 $s_{\infty} = A$; 故有 $B = s_0 - A = s_0 - s_{\infty}$, 由此, 方程(5-137)可写为

$$\sigma_t = s_{\infty} + (s_0 - s_{\infty}) e^{-\alpha t} \quad (5-138)$$

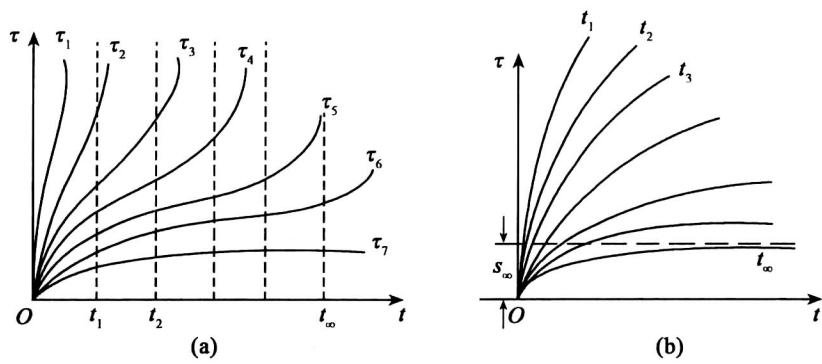


图 5-41 应用蠕变试验曲线确定长期强度

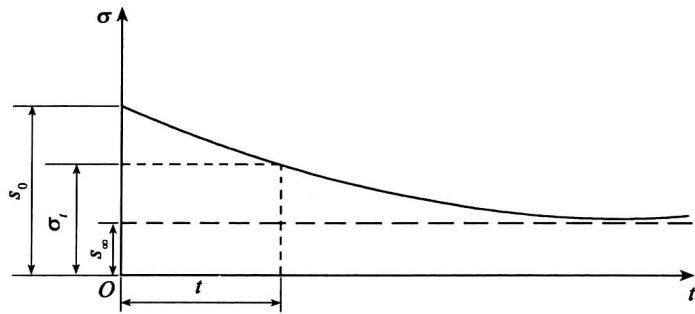


图 5-42 长期恒载破坏试验确定岩石长期强度

式中, α 为由试验确定的另一经验常数。由方程(5-137)可确定任意时间 t 时的强度 σ_t 。岩石长期强度是一种极有意义的时间效应指标。当衡量永久性及使用期长的岩石工程的稳定性时, 不应以瞬时强度而应以长期强度作为岩石强度的计算指标, 可惜至今国内外在这方面所做的工作还很有限。

在恒定荷载长期作用下, 岩石会在比瞬时强度小得多的情况下破坏, 根据目前试验资料, 对于大多数岩石, 长期强度/瞬时强度 (s_∞/s_0) 为 0.4 ~ 0.8, 软的和中等坚固岩石为 0.4 ~ 0.6, 坚固岩石为 0.7 ~ 0.8, 表 5-3 列出了几种岩石长期强度与瞬时强度的比值。

表 5-3 几种岩石长期强度与瞬时强度比值						
岩石名称	黏土	石灰岩	盐岩	砂岩	白垩	黏质页岩
s_∞/s_0	0.74	0.73	0.70	0.65	0.62	0.50

5.4 滑移线场理论

所谓滑移线, 就是剪切滑动面的迹线。滑移线场理论就是关于滑移线性质的理论,

这种理论是 Kotter(1903) 首先提出的, 后经 Sokolovskii(1954, 1965) 发展并用于求解各种岩土力学强度问题。它作为求解极限荷载的严密方法, 满足定解问题的所有控制方程和边界条件。

5.4.1 基本方程

滑移线场理论假定岩土体为理想刚塑性体, 且分为塑性区和刚性区。极限荷载应满足下述条件: 平衡微分方程和应力边界条件; 几何方程及位移或速度边界条件; 在塑性区域内还需满足本构方程及屈服条件。必须指出, 通常所说的极限状态是开始产生塑性流动的瞬间状态, 此时仍符合小变形假设。以下给出塑性平面应变问题的基本方程。

5.4.1.1 平衡方程

对于平面应变问题, 平衡微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X = 0 \quad (5-139a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y = 0 \quad (5-139b)$$

式中, X, Y 为体积力分量。当体积力仅有自重 γ 时(图 5-43), 有 $X = \gamma \sin \varepsilon, Y = \gamma \cos \varepsilon$ 。

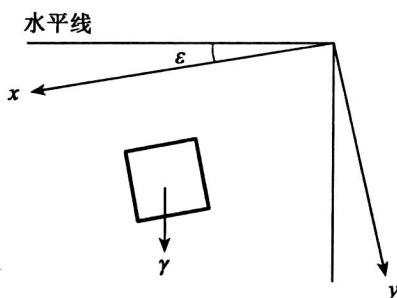


图 5-43 微分体与体积力

5.4.1.2 流动法则

对于理想刚塑性材料, 当处于塑性极限状态时, 应力与应变之间不再具有直接关系, 本构方程为流动法则, 即应力与塑性应变速率之间的关系。采用相关联的流动法则, 有

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-140)$$

式中, f 为屈服函数。在平面应变条件下, 式(5-139)的应变率形式为

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = 2 \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad (5-141)$$

5.4.1.3 几何方程

将平面问题的几何方程对 t 求导, 且速度表示为

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}, v_y = \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}$$

则

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= -\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = -\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= -\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5-142)$$

5.4.1.4 屈服条件

在塑性区或破坏区内,假定应力满足 Mohr-Coulomb 屈服条件,即

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \varphi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi \quad (5-143a)$$

在平面应变条件下, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, σ_z 为一主应力,其他两个主应力为

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

代入式(5-143a)得

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2c \cot \varphi)^2 \sin^2 \varphi \quad (5-143b)$$

综上所述,对于塑性平面应变问题,有 9 个控制方程,即式(5-139)、式(5-141)、式(5-142)和式(5-143b),含有 9 个未知数 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \lambda, v_x$ 和 v_y 所以给定边界条件后便是可解的。注意到平衡方程式(5-138)和屈服条件式(5-142)中不含速度,因此,若只有应力边界条件,则可从中求解 3 个应力分量。这类不需要本构方程和几何方程就可以求出应力分布的问题称为静定问题。得到应力分量以后,不难计算速度。当部分边界上给定位移或速度条件时,塑性平面应变问题便成为超静定的了。

5.4.2 滑移线场

5.4.2.1 剪切滑移线

塑性区内任意一点 P 的应力状态如图 5-44 所示,大主应力 σ_1 及其方向如图 5-45 所示, θ 为 σ_1 与 x 轴之间的夹角,约定逆时针旋转为正。剪破面与大主应力作用线呈 $\pm\mu$ ($\mu = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$) 角。当 P 点的位置连续变化时,则与 P 点剪破面相切的线元连成相交的两条曲线 α 和 β 称为剪切滑移线。显然,滑移线上各点的切线方向就是相应点的滑移面方向。由图 5-45 不难确定滑移线方程为

$$\left. \begin{aligned} \alpha \text{ 线:} & \quad \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \\ \beta \text{ 线:} & \quad \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \end{aligned} \right\} \quad (5-144)$$

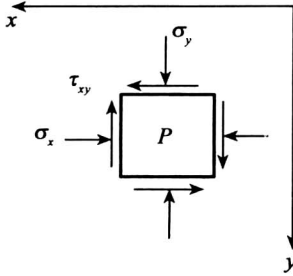


图 5-44 平面应力状态

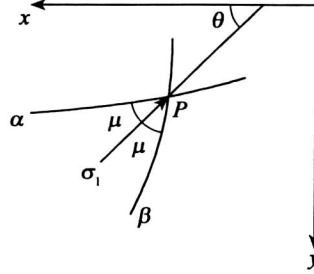


图 5-45 剪切滑移线

5.4.2.2 未知量变换

通过应力分析可知,大主应力方向角 θ 与直角坐标应力分量之间具有如下关系:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5-145a)$$

将屈服条件式(5-142)写成

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\sigma^2 \sin^2 \varphi \quad (5-145b)$$

其中,

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) + c \cot \varphi = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cot \varphi \quad (5-146)$$

根据式(5-145a)和式(5-145b),塑性区内的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 不难用新变量 σ 和 θ 表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \\ \sigma_y &= \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (5-147)$$

5.4.2.3 滑移线方程

式(5-147)中的应力分量已满足屈服条件,还需满足平衡方程式(5-139),将其代入并简化可得

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \gamma \sin \varepsilon \\ (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= \gamma \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (5-148)$$

上式为一组拟线性双曲线型偏微分方程,它具有两组特征线,可用特征线法求解。所谓特征线,就是方程式(5-148)的积分曲面 $\sigma = \sigma(x, y)$ 或 $\theta = \theta(x, y)$ 的交线,而且可以有无穷多个积分曲面交于同一条特征线,也就是说,沿特征线上每一点不能唯一地确定导数 $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$,

$\frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$, 这也就是特征线的定义,而且正是根据这一性质寻找特征线方程。设存在某一曲线 $y = f(x)$, 其上的 σ, θ 正好满足式(5-148)。沿该曲线取 σ, θ 的全微分,可得

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad (5-149)$$

可以把式(5-148)和式(5-149)看做是以 $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ 为未知量的线性方程组,消去其中 $\frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$,可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \gamma \frac{\sin(\varepsilon \mp \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{\lambda \sin(\theta \mp \mu)}{\sin(\theta \mp \mu) dx - \cos(\theta \mp \mu) dy} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \gamma \frac{\cos(\varepsilon \mp \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{\lambda \cos(\theta \mp \mu)}{\sin(\theta \mp \mu) dx - \cos(\theta \mp \mu) dy} \end{aligned} \right\}$$

其中,

$$\lambda = d\sigma \mp 2\sigma \tan \varphi d\theta - \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\varepsilon \mp \varphi) dx + \cos(\varepsilon \mp \varphi) dy]$$

考虑到导数的不确定性,上述方程组中两个公式等号右边必为不定式。令等号右边的分子分母同时为零,可得两组不同的特征线方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta - \mu) \\ d\sigma - 2\sigma \tan \varphi d\theta &= \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\varepsilon - \varphi) dx + \cos(\varepsilon - \varphi) dy] \\ \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta + \mu) \\ d\sigma + 2\sigma \tan \varphi d\theta &= \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\varepsilon + \varphi) dx + \cos(\varepsilon + \varphi) dy] \end{aligned} \right\} \quad (5-150)$$

通常 $\varepsilon=0$,即 x 轴为水平线,此时,上式成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta - \mu) \\ d\sigma - 2\sigma \tan \varphi &= \gamma(dy - \tan \varphi dx) \\ \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta + \mu) \\ d\sigma + 2\sigma \tan \varphi &= \gamma(dy + \tan \varphi dx) \end{aligned} \right\} \quad (5-151)$$

将上式与式(5-144)对比,可知特征线就是滑移线。

5.4.3 边值问题

5.4.3.1 问题类型

将特征线方程式(5-150)或式(5-151)与边界条件相结合构成所谓边值问题,剩下的问题就是求解。根据边界条件的不同,边值问题可以分为三种类型。第一类边值问题是初值问题,也称为 Cauchy 问题:在 xy 平面内的一条光滑线段 AB 上给定 x, y 和 θ 值,该线段处处不与滑移线相切且与每条滑移线只一次相交(图 5-46(a))。对于这种问题,在线段 AB 的一侧可建立曲线三角形 ABC 范围内的唯一滑移线场。

第二类边值问题称为 Goursat 问题,边界为两条相交的滑移线 AB 和 AD ,每一条线上的 x, y, σ 和 θ 值已知(图 5-46(b))。此种情况下,可以建立 $ABCD$ 范围内的唯一滑移线场。

第三类边值问题为混合问题,边界由一条滑移线 AB 和另一条曲线 AC 组成,滑移线上

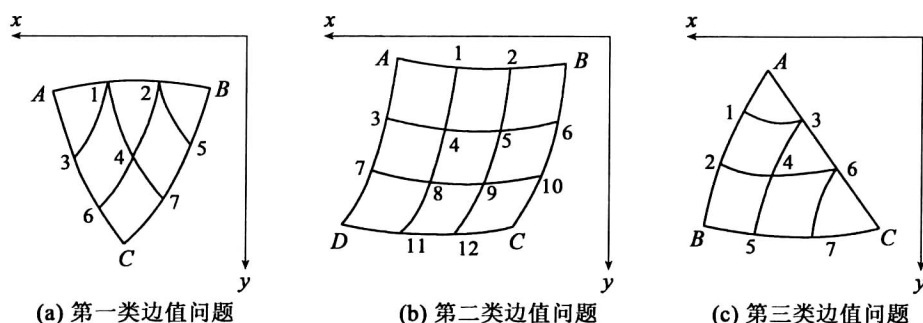


图 5-46 边值问题

x, y, σ 和 θ 值已知, 另一条线上只知道 σ 和 θ 之一, 或者知道两者之间的关系 (图 5-46 (c))。此时, 可在 AB 和 AC 之间建立曲线三角形 ABC 范围内的唯一滑移线场。

通常滑动土体可以分成几个塑性区, 而每个区域相当于上述的一个边值问题。

5.4.3.2 边界条件

在滑移线场理论中, 基本方程以 σ, θ 为未知量, 故应力边界条件也应 σ, θ 表示。在 Γ_σ 上一点处取微元体, 其外法线方向 n 与 x 轴成 ψ 角 (图 5-47)。如果已知该处的法向应力 σ_n 剪应力 τ_n , 则边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi + \tau_{xy} \sin 2\psi \\ \tau_n &= \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (5-152)$$

考虑到土处于塑性状态, 将式(5-146)代入上式得 σ, θ 与 σ_n, τ_n 之间的关系。

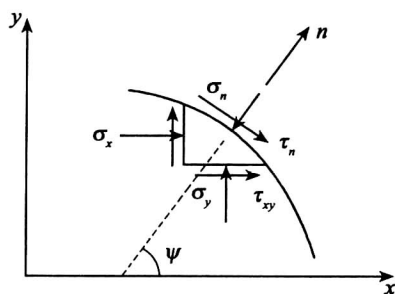


图 5-47 面力边界

5.4.4 解析解答

5.4.4.1 无重量介质

在某些简单条件下, 可以得到滑移线方程(5-150)的解析解。例如, 当土的重度 $\gamma = 0$ 时, 式(5-151)成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta - \mu) \\ d\sigma - 2\sigma \tan\varphi d\theta &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta + \mu) \\ d\sigma + 2\sigma \tan\varphi d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-153)$$

上式积分得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta - \mu) \\ \ln\sigma - 2\theta \tan\varphi &= \xi = \text{const} \\ \frac{dy}{dx} &= \tan(\theta + \mu) \\ \ln\sigma + 2\theta \tan\varphi &= \eta = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (5-154)$$

5.4.4.2 滑移线性质

在 $\gamma=0$ 的假设下,式(5-154)所示的滑移线具有一系列性质,这里只简要说明其主要性质。第一,如果某滑移线为直线,即其上的 θ 为常数,则由式(5-154)可知, σ 也是常数。根据式(5-147),直线滑移线上的 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 也为常数,进而可知,如果某区域内两族滑移线都是直线,则该区域内的 σ, θ 均为常数,即应力均匀分布。第二,如果已知滑移线网(即已知各节点的位置和角度 θ)及任一点处的 σ ,则可以求得全场各处的 σ 。第三,如果沿 α 族滑移线中的任一条移动,从滑移线 β_1 转到 β_2 ,则所转过的角度的变化保持常数(图 5-48)。显然,若 α_1 线沿任意 β 线转到 α_2 线,则将得出同样的结果。于是,有 Henchy 第一定理:在任何两根同族滑移线间, θ 沿另一族滑移线的变化都是常数,即 $\varphi_1 = \varphi_2$ 。

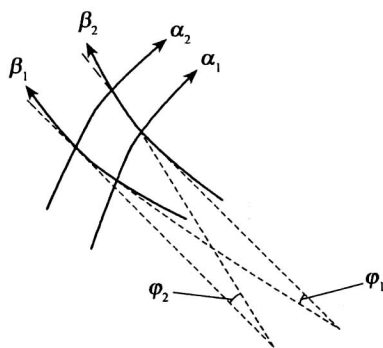


图 5-48 Henchy 第一定理

根据 Henchy 第一定理不难得出如下推论:如果一族滑移线中有一根是直线,则同族的其他滑移线均为直线。

5.4.4.3 地基极限承载力

现以地基极限承载力问题为例,说明滑移线的解析解法。利用滑移线理论求解具体问题,

通常是先根据边界条件和滑移线的性质构造滑移线场。考虑 Prandtl (1920) 课题, 图 5-49 是其构造的滑移线场, 分为 Rankine 主动区 AOC 、径向剪切区 ACD 和 Rankine 被动区 ADE 。

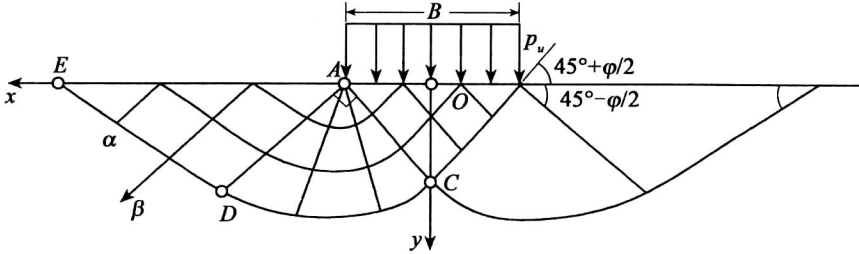


图 5-49 Prandtl 滑移线场

首先考虑 ADE 区域, 在该区内 α 线、 β 线均为直线, 故为均匀应力区。很显然, AE 边界为主平面, $\sigma_3 = \sigma_n, \tau_n = 0$ 。由于大主应力方向水平, 故边界上 $\theta = 0$ 。考虑到边界上的点位于塑性区, 其应力圆与抗剪强度线相切 (图 5-50), 不难得出:

$$\sigma = \frac{c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (5-155a)$$

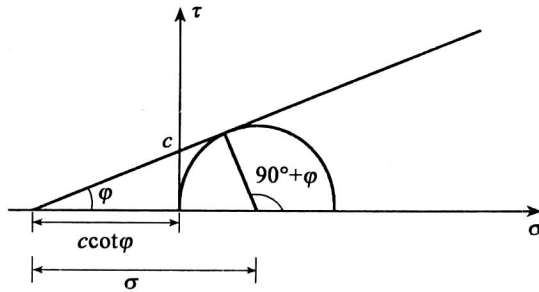


图 5-50 AE 边界极限应力圆

由于 D 点在均匀应力区内, 故

$$\sigma_D = \frac{c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi}, \theta_D = 0 \quad (5-155b)$$

在 ACD 区, 由于直线 AD 是一条 β 线, 故该区所有 β 线都是直线。根据式 (5-153), 沿 DC 这一条 α 线, 有

$$\ln \sigma - 2\theta \tan \varphi = \ln \sigma_D - 2\theta_D \tan \varphi$$

将式 (5-155b) 代入上式, 得

$$\sigma = \frac{c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(2\theta \tan \varphi)$$

在 C 点, $\theta_C = \frac{\pi}{2}$, 代入上式, 得

$$\sigma_c = \frac{ccot\varphi}{1-\sin\varphi} \exp(\pi\tan\varphi) \quad (5-155c)$$

考虑到 AOC 是均匀应力区, 有 $\sigma_c = \sigma_D$ 。在 AO 边界上, $\sigma_1 = \sigma_n = p_u$, $\tau_n = 0$ 。根据图 5-51 所示的极限应力圆, 可得

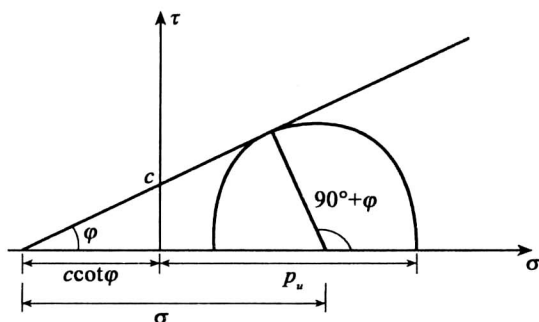


图 5-51 AO 边界极限应力圆

$$p_u = ccot\varphi \left[\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \exp(\pi\tan\varphi) - 1 \right] \quad (5-156)$$

当基础两侧有均布超载 q 作用时, 类似前面的分析可得 Reissner 公式。

5.4.5 数值解答

通常难于获得特征线方程式(5-150)或式(5-151)的解析解, 故多用差分法求得近似解。数值计算从已知边界处开始, 逐步计算到某一未知边界为止。现以第一类边值问题为例, 说明用数值方法求解方程式(5-151)的步骤。

在图 5-46(a) 中, 光滑线段 AB 上节点 $A, 1, 2, B$ 的 x, y, σ, θ 值均为已知(在实际计算中各点间距相等), 每一节点都可引出两条滑移线, 其夹角均为 2μ 。现不失一般性, 根据 1, 2 两节点的值计算节点 4。将式(5-151)写成差分形式

$$\left. \begin{aligned} y_4 - y_1 &= (x_4 - x_1) \tan(\theta_1 - \mu) \\ y_4 - y_2 &= (x_4 - x_2) \tan(\theta_2 + \mu) \end{aligned} \right\} \quad (5-157a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_4 - \sigma_1 - 2\sigma_1(\theta_4 - \theta_1) \tan\varphi &= \gamma[(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1) \tan\varphi] \\ \sigma_4 - \sigma_2 + 2\sigma_2(\theta_4 - \theta_2) \tan\varphi &= \gamma[(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2) \tan\varphi] \end{aligned} \right\} \quad (5-157b)$$

联立解上式, 可得节点 4 的 $x_4, y_4, \sigma_4, \theta_4$ 值。

由于上述差分算法的误差是积累的, 因此除非滑移线网格间距很小, 否则仅一次计算是不够的。为此, 可把第一次解作为近似值 $x'_1, y'_1, \sigma'_1, \theta'_1$ 分别用 $\frac{\theta_1 + \theta'_1}{2}, \frac{\theta_2 + \theta'_2}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma'_1}{2}, \frac{\sigma_2 + \sigma'_2}{2}$ 代替上式中的 $\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2$, 可解得第二次近似值, 通常其精度可满足要求。

5.5 极限分析理论

通常情况下,采用滑移线场理论求解塑性极限荷载是行不通的,为此,需要发展近似解法,Drucker 和 Prager(1952)提出并经 Shield 等(1953)、沈珠江(1962)、Chen(1975)及陈祖煜(1988,1994,1997)等人发展的塑性极限分析(Plastic Limit Analysis)就是这样一种求解方法。该法基于上、下限定理,采取放松极限荷载的某些约束条件,寻求极限荷载的上限值或下限值。

5.5.1 静力许可应力场

在域 Ω 上设定一组应力场 σ_{ij}^* , 如果它:

(1) 满足平衡微分方程:

$$\sigma_{ij,j}^* - f_i = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (5-158)$$

(2) 边界面力与其对应, 即

$$p_i^* = -n_j \sigma_{ij}^* \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \quad (5-159a)$$

且

$$\overline{p_i^*} = \overline{p_i} \quad (\text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上}) \quad (5-159b)$$

(3) 不违背屈服条件或破坏准则, 即

$$f(\sigma_{ij}^*) \leq 0 \quad (5-160)$$

则 σ_{ij}^* 称为静力许可应力场, 简称静力场。

在上述方程中, 体力和面力是真实的。显然, 真实应力场必定是静力场; 但由于上述条件没有对变形协调加以限制, 因此静力场不一定是真实的应力场, 由其按本构方程确定的应变率场不一定是协调的。

5.5.2 运动许可速度场

在域 Ω 上设定一组速度场 $v_i^* = u_i^*$, 如果它满足

(1) 几何方程:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^* = -\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (5-161)$$

即应变率场可由速度场导出。

(2) 速度边界条件:

$$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (5-162)$$

(3) 外力功率为正, 即

$$\int_{\Gamma_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma > 0 \quad (5-163)$$

则 $v_i^*(u_i^*)$ 称为运动许可速度场, 简称机动场。

在上述方程中, Γ_u 上的速度和 Γ_σ 上的面力是真实的。显然, 真实速度场一定是机动场, 而机动场不一定是真实的速度场, 因为它仅从速度边界条件和几何方程考虑, 没有对平衡条件加以限制。

5.5.3 虚功率原理

假定应力场和速度场都是连续场, 则虚功率原理表述为: 对于任一组静力许可应力场 σ_{ij}^* 和任一组运动许可速度场 u_i^* , 外虚功率等于内虚功率, 即

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (5-164)$$

其中, $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u$ 。一般只考虑边界 Γ_u 上速度为零的情况, 给定位移与时间无关时便属于此类问题。 Γ_σ 上的面力是待求的未知量即极限荷载。于是, 式(5-164)可写成

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (5-165)$$

在极限分析中常遇到应力或速度间断场。例如, 在梁的塑性铰处, 截面上的正应力在中性轴处有间断; 在柱扭转问题中, 截面屈服时剪应力有间断; 地基或边坡达到塑性极限状态时, 在土体中将出现速度间断面, 即滑动面。在连续介质中, 速度间断面实际上是一个薄层区域, 在此区域中状态变量的变化过程要比薄层之外的变化剧烈复杂得多。但鉴于该区域很窄, 做宏观处理时不考虑薄层内部的情况, 只考虑穿过薄层后变量总的变化多少, 而把这个薄层视为变量发生间断的一个曲面。

在应力间断面处, 两侧总是作用大小相等、方向相反的力, 而两侧的速度则相等, 故内功率总是相抵消, 这表明应力间断面对虚功率原理的基本等式没有影响, 但速度间断时沿间断面有附加内功率, 即土体在塑性流动中的能量消耗, 所以, 必须在虚功率方程的内功率一侧列入附加项, 式(5-165)成为

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \Gamma_D \quad (5-166)$$

式中, Γ_D 为速度间断面。

在岩土力学问题中, 速度间断表现为滑动或塑性流动, 此时式(5-166)将成为

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_D} c v_s^* d\Gamma \quad (5-167)$$

式中, v_s^* 为速度在 Γ_D 上的切向间断值, 即滑动速度的切向分量; c 为间断面上的黏聚力。下面对虚功率方程式(5-167)加以证明。对于一个速度间断面 Γ_D , 设其薄层的厚度为 h , 则间断区域内的虚功率即 Γ_D 上附加的内功率为

$$\int_{\Gamma_D} (\tau \dot{\gamma}^{*p} + \sigma_n \dot{\varepsilon}_n^{*p} h) d\Gamma \quad (5-168)$$

式中 $\dot{\gamma}^{*p}$ 为虚塑性切向应变率; $\dot{\varepsilon}_n^{*p}$ 为虚塑性法向应变率; τ 为剪应力; σ_n 为法向应力。

在速度间断面上材料发生屈服, 采用 M-C 屈服准则, 其屈服条件为

$$f = \tau - c - \sigma_n \tan \varphi = 0 \quad (5-169)$$

采用相关联的流动法则, 即

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

可得

$$\dot{\gamma}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \dot{\lambda}, \quad \dot{\varepsilon}_n^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} = -\dot{\lambda} \tan \varphi$$

从上式中消去 $\dot{\lambda}$ 得

$$\dot{\varepsilon}_n^p = -\dot{\gamma}^p \tan \varphi \quad (5-170)$$

将式(5-170)代入式(5-169),并注意到 $\dot{\gamma}^p h$ 等于滑体切向速度 v_s^* , 有

$$\int_{\Gamma_D} (\tau - \sigma_n \tan \varphi) \dot{\gamma}^p h d\Gamma = \int_{\Gamma_D} c v_s^* d\Gamma$$

式(5-167)得证。

根据岩土力学中应变的定义,剪切应变速率无正负的区别,法向应变速率的正值表示压缩,负值表示膨胀。可见,式(5-170)表明岩土体在塑性流动过程中将伴随有体积的膨胀。在式(5-170)的两边同乘 h ,注意到 $\varepsilon_n^p h = v_n^*$ 为速度 v^* 的法向分量

$$v_n^* = -v_s^* \tan \varphi \quad (1-171)$$

该式表明,岩土体处于塑性流动或剪切滑动状态时,剪切滑动面上任一点处的速度 v_n^* 与该点处的滑动面成 φ 角(图 5-52),从而有

$$v_s^* = v^* \cos \varphi \quad (5-172)$$

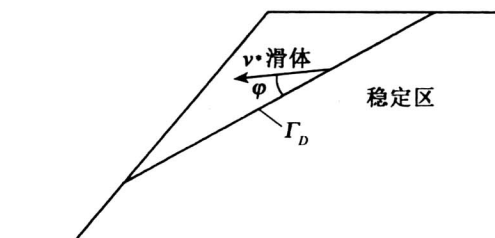


图 5-52 速度间断面

5.5.4 极限分析定理

将式(5-172)代入式(5-167)得

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} p_i^* \dot{i}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_D} c v^* \cos \varphi d\Gamma \quad (5-173)$$

由于真实应力场 σ_{ij} 必定是静力许可应力场,真实速度场 u_i^* 一定是运动许可速度场,故有

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i^* \dot{i}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_D} c v^* \cos \varphi d\Gamma \quad (5-174)$$

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} p_i^* \dot{i}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_D} c v \cos \varphi d\Gamma \quad (5-175)$$

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_D} cv \cos \varphi d\Gamma \quad (5-176)$$

根据式(5-173)至式(5-176)及 Drucker 公设,可证明上、下限定理。例如,式(5-173)减去式(5-174)得

$$\int_{\Gamma_D} (p_i^* - \bar{p}_i) \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (5-177a)$$

根据 Drucker 公设,有

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega \geq 0$$

于是式(5-177a)成为

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} (p_i^* - \bar{p}) \dot{u}_i^* d\Gamma \geq 0 \quad (5-177b)$$

注意到式(5-163),有

$$p_+ = p_i^* \geq \bar{p}_i = p_i$$

这样,上限定理(Theorem of Upperlimit)可表述为:运动许可速度场对应的荷载是极限荷载的上限 p_+ ,即 $p_+ \geq p_s$, p_s 为真实极限荷载。下限定理(Theorem of Lowerlimit)可表述为:静力许可应力场对应的荷载是极限荷载的下限 p_- ,即 $p_- \leq p_s$ 。在土力学的平面应变问题中,速度只能在 xy 坐标面内发生,此时,沿 z 方向取单位厚度来考虑,速度间断面便可看做间断线。此外,估算极限荷载的上限时,常用速度间断线将物体划分为若干个刚性块,此时,内功率便只有间断线的贡献,例如,式(5-173)成为

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma_D} cv^* \cos \varphi d\Gamma \quad (5-178)$$

对于在给定荷载作用下稳定的土坡,上述极限平衡式并不满足,可以通过降低黏聚力 c ,即用 $\frac{c}{F_s}$ 代替 c (F_s 为安全系数),使土坡达到极限平衡状态,这样,上式成为

$$F_s = \frac{\int_{\Gamma_D} cv^* \cos \varphi d\Gamma}{\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma} \quad (5-179)$$

上述极限分析定理采用了相关联的流动法则。Palmer(1966)建立了非关联流动法则的极值原理,此时,式(5-169)成为

$$\nu_n^* = -\nu_s^* \tan \psi$$

式中, ψ 为岩土破坏时的剪胀角。

5.5.5 近似解法举例

5.5.5.1 下限法和上限法

利用下限定理计算极限荷载 p_- 的方法称为下限法或静力法。根据与真实体力和面力平衡且不违背屈服条件的要求,设定一个静力场,确定其对应的应力边界值,此值即为极限荷载的近似值。根据下限定理,真实的极限荷载不小于该近似值。采用下限法时,需选取一系列静力场进行计算,以最大荷载为最佳近似解。通常是构造为应力间断线所分割的不连

续应力场,使每一塑性区具有尽可能简单的应力状态,例如,用应力间断线把土体分成 Rankine 主动区和被动区。

利用上限定理计算极限荷载 P_+ 的方法称为上限法或机动法, 此时, 需设定一个机动场, 与其对应的荷载满足虚功率方程式 (5-174), 由此可得极限荷载的上限 $p_+ = p^*$ 。采用机动法时, 需选取一系列机动场进行计算, 以最小荷载为最佳近似解。通常是假定滑动面, 将岩土体分成若干刚性块体并构造协调的速度场, 然后用虚功率原理求解极限荷载。假定的滑动面越接近于真实滑动面, 所得结果越接近真实的极限荷载。应该指出, 若所求荷载在机动场上所做的功率为负, 则其最大值为真实极限荷载的最佳近似解。在极限分析中, 如果下限解等于上限解, 即 $P_- = P_+$, 则所得到的解答称为完全解, 它是真实解。采用塑性力学上、下限定理求解经典问题, 就是从上限和下限两个方向逼近真实解。

5.5.5.2 挡墙上的土压力

假定挡土墙离开填土移动,填土为黏性土,滑动土楔为刚体。利用极限分析法求极限荷载,即主动土压力 E_a 的近似解。设滑动面 BC 的倾角为 α ,滑动土体 ABC 在 BC 面上的速度为 v^* ,其方向如图 5-53 所示。墙与填土之间的黏聚力为 k ,墙作用于滑体上的黏聚力合力 $K = k \overline{AB} = kH/\cos\epsilon_0$ 。

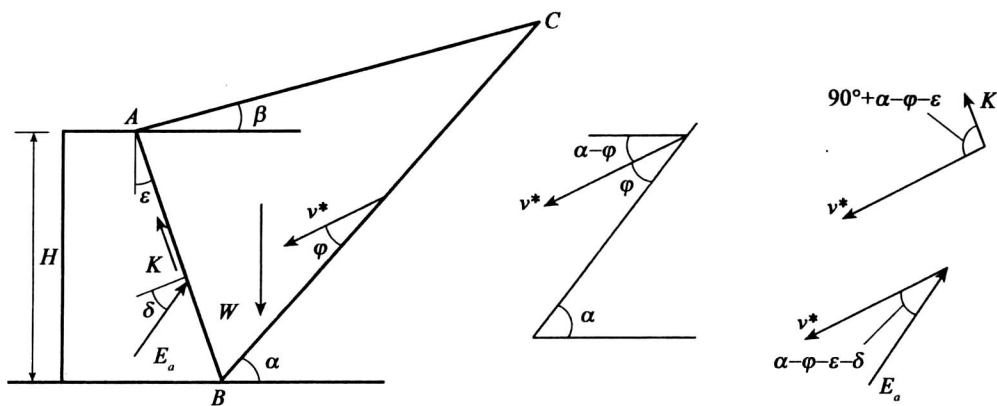


图 5-53 主动土压力

重力 W 、土压力 E 和 K 在虚速度场上所做的虚功率分别为

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* \, d\Omega = Wv^* \sin(\alpha - \varphi) = \frac{1}{2} v^* \gamma H^2 \frac{\cos(\varepsilon - \beta) \cos(\alpha - \varepsilon) \sin(\alpha - \varphi)}{\cos^2 \varepsilon \sin(\alpha - \beta)}$$

$$\int_{F^-} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma = -E_a v^* \cos(\alpha - \varphi - \varepsilon - \delta) - kH\nu^* \sin(\alpha - \varphi - \varepsilon)/\cos\varepsilon$$

滑动面 BC 上的虚功率, 即耗散功率为

$$\int_{\Gamma_n} cv^* \cos \varphi d\Gamma = cv^* \cos \varphi \cdot \overline{BC} = cv^* \cos \varphi \cdot \frac{H \cos(\varepsilon - \beta)}{\cos \varepsilon \sin(\alpha - \beta)}$$

将上述三项代入式(5-178),经整理得

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (5-180)$$

式中,

$$K_a = \frac{\cos(\varepsilon - \beta) \cos(\alpha - \varepsilon) \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi - \varepsilon - \delta) \cos^2 \varepsilon \sin(\alpha - \beta)} - \frac{[2c \cos \varphi \cos(\varepsilon - \beta) + 2k \sin(\alpha - \varphi - \varepsilon) \sin(\alpha - \beta)] / (\gamma H)}{\cos(\alpha - \varphi - \varepsilon - \delta) \cos \varepsilon \sin(\alpha - \beta)} \quad (5-181)$$

假定破坏角 α , 即可根据上述两式计算主动土压力的近似值。当填土为无黏性土时, $c=0$ 和 $k=0$, 上式成为

$$K_a = \frac{\cos(\varepsilon - \beta) \cos(\alpha - \varepsilon) \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi - \varepsilon - \delta) \cos^2 \varepsilon \sin(\alpha - \beta)}$$

机动法的解答为上限解, 其最小值更接近真实的极限荷载。由于作为荷载的 E_a 所做功率为负, 故 E_a 或 K_a 应该取极大值。对上式求极大值所得 K_a 与 Coulomb 主动土压力系数完全相同。同理可得, 无黏性填土时被动土压力 E_p 为极小值, K_p 为被动土压力系数, 可见, Coulomb 土压力为上限解。

5.5.5.3 地基极限承载力

设地基土无重量 ($\gamma=0$), 采用下限法求解地基极限承载力。用应力间断线将处于极限平衡状态的土体简单地划分成 Rankine 主动区 I 和 Rankine 被动区 II (图 5-54)。

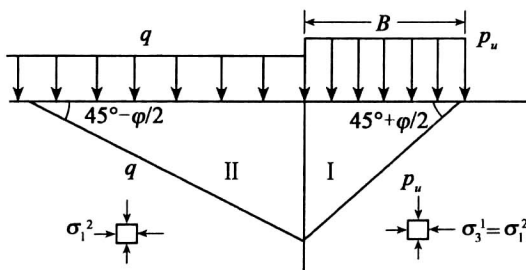


图 5-54 静力场 1

根据极限平衡条件, 被动区 II 的大主应力 σ_1^2 为

$$\sigma_1^2 = qm^2 + 2cm$$

式中, $m = \tan(45^\circ + \varphi/2)$ 。在主动区 I, 小主应力为 σ_1^2 , 而大主应力即为

$$p_u = \sigma_1^2 m^2 + 2cm = qm^4 + 2cm^3 + 2cm \quad (5-182)$$

也可用应力间断线将土体划分成三个区, 即 Rankine 主动区 I、Rankine 被动区 II 和径向剪切区 (图 5-55), 此即 Prandtl 滑移线场, 相应的静力场前面已经确定, 即极限荷载的下限解。现假定地基为无黏性土, 内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 。由式 (5-182) 算得 $p_u = 9.0q$, 而由地基极限承载力计算公式 (见第 8 章) 得 $p_u = 18.4q$ 。可见, 式 (5-182) 过于保守, 而地基极限承载力计算公式是较好的下限解。

5.5.5.4 土坡的临界高度

为求垂直土坡 (图 5-56) 临界高度的上限解, 现构造一个机动场: AB 为拉裂缝, BC 为剪

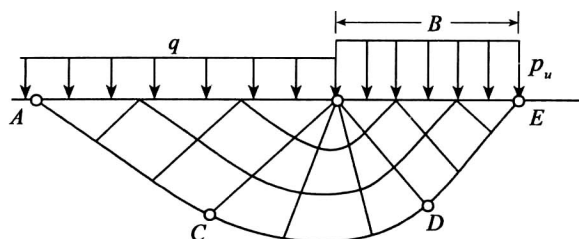


图 5-55 静力场 2

切面,宽度为 Δ 的刚性土条向下移动。根据前面的分析, v^* 与剪切面呈 φ 角。显然,刚性土条向下移动的速度 $v_1 = v^* \cos(45^\circ + \varphi/2)$ 。由于拉裂缝处没有能量耗散,故总功率等于剪切面上的内功率,即

$$\int_{\Gamma_D} cv^* \cos\varphi d\Gamma = cv^* \cos\varphi \cdot \frac{\Delta}{\cos(45^\circ + \varphi/2)} \quad (5-183a)$$

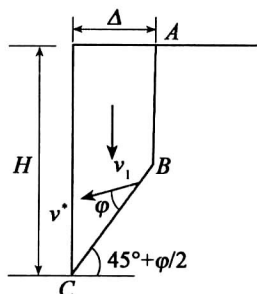


图 5-56 机动场

而重力的功率为

$$\int f_i u_i d\Omega = \left[\gamma H \Delta - \gamma \frac{\Delta^2}{2} \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \right] v^* \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (5-183b)$$

将式(5-183a)、式(5-183b)代入式(5-176)得

$$H_{cr}^* = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\Delta}{2} \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (5-184)$$

为求临界高度的下限解,建立如图 5-57 所示的应力场,其中,虚线为应力间断线,它们把全区分为三个应力区。

I 区为单向压缩区: $\sigma_x = 0, \sigma_y = \gamma y$;

II 区为双向压缩区: $\sigma_x = \gamma(y-H), \sigma_y = \gamma y$;

III 区为双向等压力区: $\sigma_x = \sigma_y = \gamma(y-H)$ 。

在 I 区的底部,土单元应满足屈服条件,即

$$\frac{1}{2} \gamma H = \frac{1}{2} \gamma H \sin\varphi + c \cos\varphi$$

从而有

$$H_{cr} = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (5-185)$$

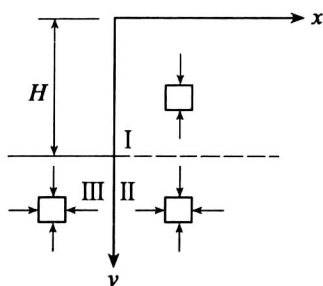


图 5-57 静力场

5.5.5.5 土坡的安全系数

利用上限法求均质土坡的安全系数。对于具有摩擦性的土体来说,发生刚体滑动时,速度间断面必须是对数螺旋线或直线。设滑体为单一刚体,滑动面为螺旋线(图 5-58),其方程为

$$R = R_0 \exp[(\theta - \theta_0) \tan \varphi] \quad (5-186)$$

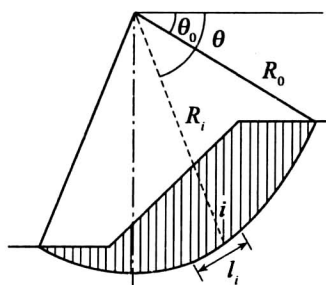


图 5-58 对数螺旋滑动

式中, R_0 和 θ_0 分别为滑面在坡顶起始处的半径和角度。当滑体绕螺旋线中心瞬时旋转角速度 $\omega=1$ 时,土条 i 底面上的速度为 $v_i = R_i \omega = R_i$,与底面夹角为土的摩擦角 φ ,于是,外力功率和耗散功率分别为

$$\begin{aligned} \int f_i u_i^* d\Omega &= \sum_{i=1}^n W_i v_i \sin \varphi = \sum_{i=1}^n W_i R_i \sin \varphi \\ \int_{\Gamma_D} c v^* \cos \varphi d\Gamma &= \sum_{i=1}^n c l_i v_i \cos \varphi = \sum_{i=1}^n c l_i R_i \cos \varphi \end{aligned}$$

根据式(5-179),得安全系数

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n c l_i R_i \cos \varphi}{\sum_{i=1}^n W_i R_i \sin \varphi} \quad (5-187)$$

第6章 岩土体变形计算

采用强度设计的结构通常对变形没有严格要求,而且根据经验适当选取的安全系数也会在一定程度上限制变形。但是,利用安全系数控制变形仅仅是经验方法,并不总是意味着安全。事实上,在岩土体结构系统中,岩土体的局部变形和整体位移都有可能限制结构功能的正常发挥乃至完全失效,如建筑物损坏很多是由基础沉降不均匀造成的。可见,仅仅进行强度分析与设计是不够的。

进入20世纪,随着高层建筑、重型厂房及高坝的大量涌现,岩土体变形问题突显出来并越来越受到重视。不过,岩土体变形分析通常很复杂,特别是需要大量的岩土特性资料,而这些资料并不都是能够得到的。在没有深入了解岩土体的变形特性以及没有条件进行复杂计算以前,人们不得不将变形问题做一定程度的简化,以得到解答。例如,在20世纪60年代之前,人们只能用单向固结仪去测定土的压缩系数和压缩模量,用弹性理论求解岩土体中的应力分布,作为估算地基沉降的依据。之所以采取这种简单做法,主要是由于计算技术的限制。随着计算机技术的发展和数值计算方法成熟,岩土数值计算方法出现质的飞跃,这不仅极大地推动了本构理论研究,而且使人们相当容易地将复杂结构和本构模型纳入到变形计算当中。

6.1 岩土变形分析方法

施加外部荷载必然导致岩土中应力状态的改变,从而引起岩土体变形,如建筑物修建在地基上使地基岩土发生变形。如果地基变形或基础沉降的特征量(沉降量、沉降差、倾斜、局部倾斜等)过大,就会影响建筑物的正常使用,因此,估算岩土体变形成为岩土力学的重要课题之一。

6.1.1 岩土变形机制

计算岩土变形要求弄清岩土体的变形机制,以选择合适的分析模型与方法。例如,地基在大面积荷载作用下,变形主要表现为侧限压缩或体积变形,而剪切变形可忽略,此时,可进行侧限压缩试验来研究岩土体的压缩性,即荷载作用下体积减小的特性;采用分层总和法计算地基最终变形。研究表明(Scott, 1963),在通常遇到的压力范围内,土颗粒的压缩性远比孔隙水的小,可以忽略不计;对于饱和土来说,孔隙水的压缩量与土骨架的压缩量相比很小,通常也可忽略;与黏土骨架的压缩量相比,砂土骨架的压缩量要小得多。因此,对于黏土与砂土相间的地基,黏土层的变形是沉降的主要来源。

对于饱和土体来说,外部荷载引起的附加应力起初由孔隙水承担,这种孔隙水压力称为

超孔隙水压力(Excess)。相对而言,水自重引起的水压力称为静孔隙水压力(Static)。在允许排水的条件下,孔隙水将不断地排出土体,超孔隙水压力 u 则随时间而逐渐消散直至为零,附加应力将全部由土骨架承担。根据 Terzaghi 有效应力原理,孔隙水压力 u 消散的过程就是有效应力 σ' 逐渐增大的过程,这一过程称为渗透固结,研究土体固结过程的理论称为固结理论(Consolidation Theory)。

土体固结变形速率与土的渗透系数密切相关,例如,黏性土、特别是软黏土所构成的地基完成固结所需要的时间很长,可能是几年甚至几十年;而透水性大的无黏性土(砂土、碎石土等)地基,其排水固结过程很快完成,因此一般不考虑固结问题。图 6-1 所示为基础沉降与时间的关系的示意图。

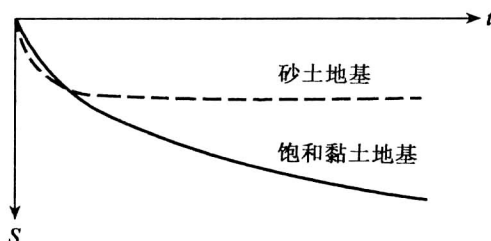


图 6-1 基础沉降与时间的关系

土体固结稳定后的变形称为最终变形,实际意义最大、最受重视的是基础沉降(Settlement)。通常认为,黏性土地基上基础的最终沉降量 S 包括三部分,即

$$S = S_d + S_c + S_s \quad (6-1)$$

式中, S_d 为初始沉降(Initial Settlement)或瞬时沉降,是体积不变而形状改变即形变引起的沉降,与地基土的侧向变形密切相关; S_c 为(主)固结沉降(Primary),是孔隙水渗透排出土体引起的沉降; S_s 为次固结沉降或次压缩(Secondary Compression),是土骨架在不变有效应力作用下蠕变引起的沉降。实际上,在次固结阶段仍存在微小超孔隙水压力,使水极缓慢流动,但水流速度极小,超孔隙水压力小到无法测量。

次压缩沉降占总沉降的比例一般小于 10%,但软黏土的次压缩沉降通常不可忽略。必须指出,软黏土地基完成固结所需时间达几年甚至几十年。在如此长的时间内,次压缩早就发生了。因此很难将固结沉降与次压缩沉降精确分开,将基础沉降划分为三部分,主要是从变形机理角度考虑。

在实际工程中,人们既关心岩土体的最终变形,也关心岩土体变形的过程。例如,对于黏土地基上的建筑,往往需要研究沉降和孔隙水压力的消散速率,使施工速度与地基土层强度指标增长速率相适应,以维持施工期稳定,并使大量沉降在施工期完成;有时基底各点的最终沉降量虽然差异不大,但沉降速率很不相同,故可造成沉降过程中较大的沉降差;此外,对于堆载预压处理的地基,也需要确定沉降与时间的关系。

6.1.2 变形分析方法

与强度计算或稳定分析类似,土体变形分析也分总应力法和有效应力法。若需考虑土

体变形过程,则采用有效应力法,即以土骨架或孔隙水为分析对象,建立问题的控制微分方程并求解之。土体固结计算就是有效应力法的典型。饱和土体的变形虽然经历排水固结过程,但如果只关心最终变形,则可以将土体视为单相固体(如弹性体或弹塑性体),从而可以采用弹性力学或弹塑性力学进行分析。这就是总应力分析法,这种分析与一般固体力学没有什么不同。事实上,最终变形计算中不考虑固结变形过程,总应力就是有效应力。

无论有效应力法还是总应力法,都需要在特定的边界条件或初始条件下求解控制微分方程组。能够采用解析方法求解的土体变形问题是非常有限的,因此数值方法特别是有限单元法得到广泛应用。数值方法的优越性在于,可采用各种类型的本构模型处理各种各样的边界问题,并模拟分期加荷与施工过程。

6.2 弹性力学公式

经典土力学的基本组成部分之一是地基变形或基础沉降计算,它以弹性理论的应力与位移解答为依据。在这种分析中,假定地基岩土为半无限弹性体,而且通常认为是均质各向同性的。本节简要介绍三个经典弹性力学问题的解答。

6.2.1 Boussinesq 公式

6.2.1.1 竖向集中力

布辛奈斯克(J. Boussinesq, 1885)问题可表述如下:在半无限弹性体边界平面上受竖向集中力作用,不计体力,求弹性体内的应力和位移(图 6-2)。

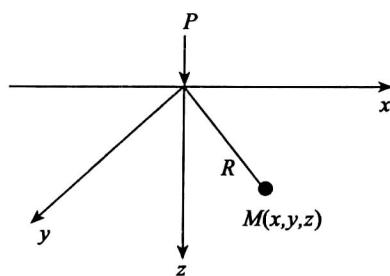


图 6-2 Boussinesq 课题

取集中力 P 的作用点为坐标原点, z 轴沿力的作用方向并指向半无限弹性体内部。问题的柱坐标解答为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi E_0 R} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right] \\ w &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi E_0 R} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{3zr^2}{R^3} - \frac{(1-2\nu)R}{R+z} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left[\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right] \\ \sigma_z &= \frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \\ \tau_{rz} &= \frac{3Pz^2 r}{2\pi R^5} \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

式中, E_0 为土的变形模量; ν 为泊松比; R 为计算点到坐标原点或集中力作用点的距离, 即

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 \quad (6-4)$$

在分布荷载作用下, 半无限弹性体中的应力可采用叠加原理积分求得。

6.2.1.2 条形分布荷载

条形分布荷载问题属于平面应变问题。若荷载均匀分布(图 6-3), 则半无限弹性体中任一点 $M(x, z)$ 处的竖向应力为

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x + \frac{B}{2}}{z} - \tan^{-1} \frac{x - \frac{B}{2}}{z} + \frac{z \left(x + \frac{B}{2} \right)}{z^2 + \left(x + \frac{B}{2} \right)^2} - \frac{z \left(x - \frac{B}{2} \right)}{z^2 + \left(x - \frac{B}{2} \right)^2} \right] \quad (6-5)$$

若条形荷载三角形分布, 最大强度为 p 时(图 6-4), 有

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \left[\frac{x}{B} \left(\tan^{-1} \frac{x}{z} - \tan^{-1} \frac{x-B}{z} \right) - \frac{z(x-B)}{z^2 + (x-B)^2} \right] \quad (6-6)$$

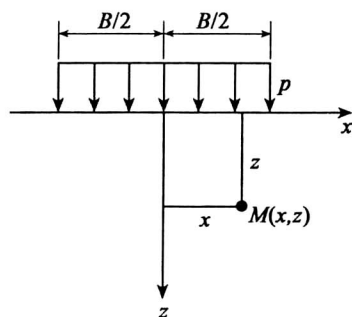


图 6-3 均布荷载

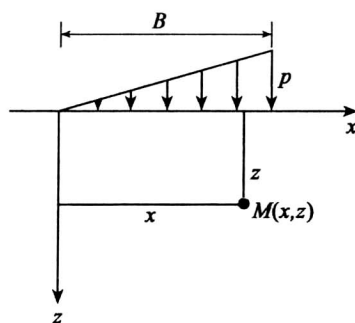


图 6-4 三角形荷载

6.2.1.3 矩形分布荷载

矩形分布荷载问题属于空间问题。若荷载 p 均匀分布(图 6-5), 则角点下深度 z 处的竖向应力为

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi} \left[\frac{B \cdot L \cdot z (B^2 + L^2 + 2z^2)}{(B^2 + z^2)(L^2 + z^2)\sqrt{B^2 + L^2 + z^2}} + \arctan \frac{B \cdot L}{z\sqrt{B^2 + L^2 + z^2}} \right] \quad (6-7)$$

若矩形荷载三角形分布, 最大强度为 p 时(图 6-6), 有

$$\sigma_z = \frac{p \cdot L}{2\pi B} \left[\frac{z}{\sqrt{4L^2 + z^2}} - \frac{z^3}{(4B^2 + z^2)\sqrt{4B^2 + L^2 + z^2}} \right] \quad (6-8)$$

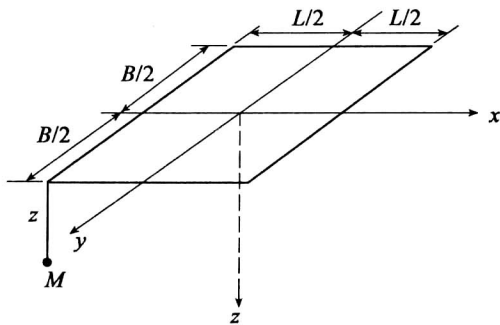


图 6-5 均布矩形荷载

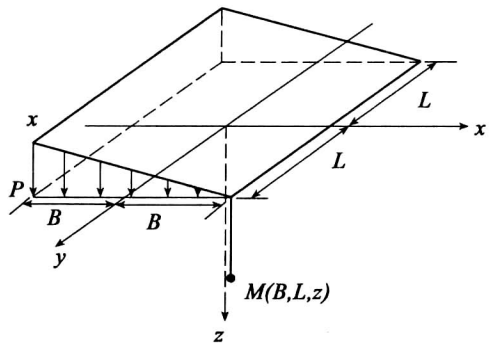


图 6-6 三角矩形荷载

6.2.1.4 圆形均布荷载

在圆形均布荷载 p 作用下(图 6-7), 圆心以下深度 z 处的竖向应力为

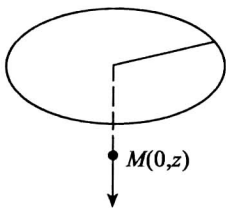


图 6-7 圆形荷载

$$\sigma_z = p \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{R^2}{Z^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (6-9)$$

其中 R 为圆形荷载面积的半径。

6.2.1.5 沉降计算公式

集中荷载作用下地基中任意点的竖向位移 w 为式(6-2)的第二式, 而地基表面沉降公式为

$$S = w|_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi r E_0} \quad (6-10)$$

对于柔性基础、作用分布荷载, 可以通过积分求得地基表面上任何一点的沉降。计算和实践表明, 沉降后的地面呈碟形(图 6-8)。一般基础都具有一定的抗弯刚度, 因而沉降随刚度增大而趋于均匀(图 6-9), 所以中心荷载作用下的基础沉降可以近似按柔性荷载下基底平均沉降计算。显然, 基础沉降量与基础刚度、计算点位置、基底形状等因素有关。计算公式可统一表示为

$$S = \frac{p_0 b (1-\nu^2)}{E_0} \omega \quad (6-11)$$

式中, b 为圆形基础的直径或矩形基础的短边; ω 为沉降影响系数。

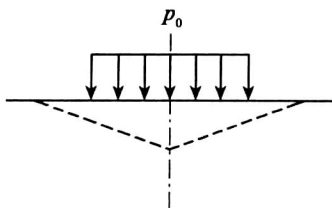


图 6-8 柔性基础

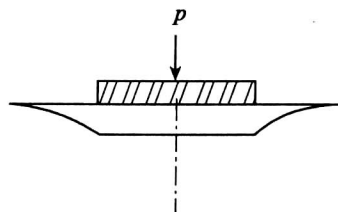


图 6-9 刚性基础

6.2.2 Cerutti 公式

6.2.2.1 水平集中荷载

对于均质各向同性半无限弹性体边界面上作用水平集中力的课题, V. Cerutti (1882) 给出任意点处应力和位移的计算公式。取集中力 Q 的作用点为坐标原点, z 轴指向半无限弹性体内部, x 轴与水平力同向(图 6-10)。问题的解答为

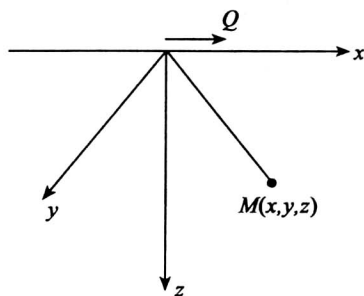


图 6-10 Cerutti 课题

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(r^2 - y^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[\frac{3y^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(3r^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_z &= \frac{3Qxz^2}{2\pi R^5} \end{aligned} \right\} \quad (6-12a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{Qy}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(R^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] \\ \tau_{yz} &= \frac{3Qxyz}{2\pi R^5} \\ \tau_{zx} &= \frac{3Qx^2z}{2\pi R^5} \end{aligned} \right\} \quad (6-12b)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(1+\nu)Q}{2\pi E_0 R} \left[1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{1-2\nu}{R+z} \left(R - \frac{x^2}{R+z} \right) \right] \\ v &= \frac{(1+\nu)Q}{2\pi E_0 R} \left[\frac{xy}{R^2} - \frac{(1-2\nu)xy}{(R+z)^2} \right] \\ w &= \frac{(1+\nu)Q}{2\pi E_0 R} \left[\frac{xz}{R^2} + \frac{(1-2\nu)x}{R+z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

6.2.2.2 矩形均布荷载

矩形均布水平荷载 p 作用时(图 6-11), 角点下深度 z 处(1,2 两点)的竖向应力为

$$\sigma_{x_1, x_2} = \mp \frac{pm}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} - \frac{n^2}{(1+n^2)\sqrt{1+m^2+n^2}} \right] \quad (6-14)$$

式中, $m=L/B$, $n=z/B$ 。

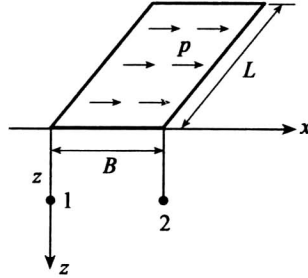


图 6-11 矩形均布水平荷载

6.2.3 Mindlin 公式

设均质各向同性半无限弹性体内某一深度 $z=c$ 处作用: 竖向集中力(图 6-12)以及水平向集中力(图 6-13), R. Mindlin(1936)分别给出了任意点应力和位移的计算公式, 这里只给出竖向的应力和位移。

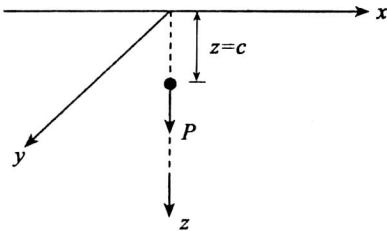


图 6-12 Mindlin 课题(1)

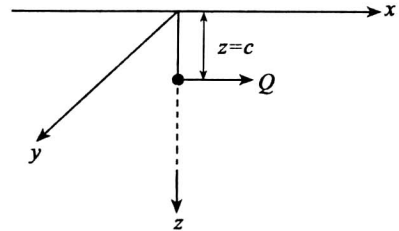


图 6-13 Mindlin 课题(2)

6.2.3.1 竖向集中力作用

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-4\nu)z(z+c)^2 - 3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right] \\ w &= \frac{p}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-15)$$

6.2.3.2 水平集中力作用

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{Qx}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} + \frac{1-2\nu}{R_2^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-4\nu)(z+c)^2}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left[c + (1-2\nu)(z+c) + \frac{5z(z+c)^2}{R_2^2} \right] \right\} \\ w &= \frac{Qx}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+x)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-16)$$

式中,

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}, R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2} \quad (6-17)$$

6.3 基础最终沉降计算

通常不用弹性力学位移公式计算基础沉降,这是因为位移分量与岩土体的变形模量 E_0 和泊松比 ν 有关,而 E_0 的确定存在困难。但是,人们常用弹性力学计算地基应力,并采用侧限压缩指标计算沉降,即所谓分层总和法(Layerwise Summation Method),这种方法的合理性在于:①竖向附加应力 σ_z, τ_x 与土性无关,其他应力分量也只包含 ν ,而 ν 可相对容易地确定;②地基变形比较符合侧限变形条件,而此时计算沉降只需 σ_z 。但必须指出,虽然地基中竖向应力与应力-应变关系无关,水平应力却对非线性性质很敏感。

6.3.1 地基应力计算

6.3.1.1 自重应力

地基岩土中的应力包括自重应力(Geostatic Stress)和附加应力(Additional Stress)。自重应力是由土体自重引起的有效应力。如果地基为半无限弹性体,竖向自重应力为

$$\sigma_z = \int_0^H \gamma dz = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \quad (6-18)$$

式中, γ_i 为第 i 层土的重度。地下水位以下,采用有效重度 γ' 。水平向自重应力为

$$\sigma_{cx} = \sigma_{cy} = K\sigma_z \quad (6-19)$$

式中, K_0 为静止侧压力系数(Coefficient of Lateral Pressure)。

为了计算地基的自重应力,学者们针对不同情况提出若干静止侧压力系数经验公式。例如,对于正常固结土:

$$K_0 = 1 - \sin\varphi' \quad (\text{砂土}) \quad (6-20a)$$

$$K_0 = 0.95 - \sin\varphi' \quad (\text{黏性土}) \quad (6-20b)$$

对于超固结土

$$K_0 = K_0^n (\text{OCR})^b \quad (6-21)$$

式中, K_0^n 为正常固结状态下的静止侧压力系数; $b = 0.39 \sim 0.58$, 相应于从黏土到砂土。

必须指出,土体中初始应力的构成可能很复杂,除自重引起外,还与构造运动和应力历史有关。准确地确定初始应力并不容易,对于具有斜坡的非水平地层难度就更大。但确定初始应力是一个很重要的课题,因为土的力学性质以及土体变形和强度计算的结果均与其密切相关。

6.3.1.2 附加应力

外部荷载通过基础传给地基并引起附加应力,通常它是使岩土变形的主要原因。建筑物作用于地基上的压力称为基底压力(Contact Pressure of Foundation Base),而地基反作用于基础底面上的压力称为基底反力。基底压力或基底反力是基础设计和地基计算所必需的,可以实测或计算而得。在常规设计中,假定基底压力呈线性分布。

引起地基变形的并非全部基底压力 p ,而是基底附加压力 p_0 。若基础埋深为 d ,基础两侧埋深范围内土的平均重度为 γ_0 ,则

$$p_0 = p - \gamma_0 d \quad (6-22)$$

上式假定基坑开挖后,地基表面不回弹。此时,从基底压力中扣除的部分即 $\gamma_0 d$,意味着恢复地基原来的自重应力状态。必须指出,当基坑的平面尺寸和深度较大时,坑底回弹是明显的,且基坑中点的回弹大于边缘点。为了适当考虑回弹和再压缩所增加的沉降,可取

$$p_0 = p - \alpha \gamma_0 d \quad (6-23)$$

式中, α 为取值 0~1 的系数。

基底附加压力 p_0 引起的附加应力可根据经典弹性力学公式积分求得。前面已经列出了一些基本公式。一般取基础中心点下的竖向应力计算沉降。

6.3.2 普通分层总和法

在地基变形计算中,通常采用侧限压缩模型,即地基土层只发生竖向变形而无侧向变形。在侧限压缩条件下, $\varepsilon_z = \varepsilon$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$,故竖向应变等于体积应变,即 $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon$ 。设试样原始高度为 H ,截面积为 A ,压力增量 Δp 作用下的压缩量为 S ,则

$$\varepsilon = \frac{S}{H} = \frac{SA}{HA} = \frac{V_s(1+e_1) - V_s(1+e)}{V_s(1+e_1)} = \frac{e_1 - e}{1+e_1} \quad (6-24)$$

可见,应变 ε 可用孔隙比 e 表示。由于应力可用压力 p 表示为

$$\sigma_z = p, \sigma_x = \sigma_y = K_0 \sigma_z = K_0 p \quad (6-25)$$

所以 $e-p$ 曲线即为侧限压缩条件下的本构关系,可表示为

$$\Delta e = -a \Delta p \quad \text{或} \quad de = -a dp \quad (6-26)$$

式中, a 为压缩系数。

设厚度为 H 的土柱在均布压力 p_1 (相应于现场土层的平均自重应力)作用下已经稳定,则压力增量 Δp (相应于现场土层的平均附加应力)作用下的侧限压缩量为

$$S = \varepsilon H = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1} H = \frac{\Delta e}{1 + e_1} H = \frac{\Delta p}{E_s} H$$

式中, e_1 和 e_2 分别为初始孔隙比和压缩稳定后的最终孔隙比,对应于 p_1 和 $p_2 = p_1 + \Delta p$; E_s 为土

的压缩模量。

根据侧限条件下的本构模型式(6-26),有

$$S = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1} H = \frac{-\Delta e}{1 + e_1} H = \frac{\Delta p}{E_s} H = \frac{a \Delta p}{1 + e_1} H$$

令 $m_v = \frac{a}{1 + e_1}$, 则上式成为

$$S = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1} H = \frac{\Delta p}{E_s} H = \frac{a \Delta p}{1 + e_1} H = m_v \Delta p H \quad (6-27)$$

式中, m_v 称为体积压缩系数 (Coefficient of Bulk Compression)。由于侧限压缩时 $\varepsilon_v = S/H$, 可知 m_v 是侧限条件下单位压力增量引起的体积应变。

在基础沉降计算中, 利用弹性理论计算附加应力; 通过侧限压缩试验确定压缩参数, 因此计算方法包含两个基本假定, 即地基为弹性体; 地基变形为侧限压缩。所谓分层总和法, 就是将地基压缩层范围内的土层分成若干层, 分别计算各层的压缩量, 然后求和得到总沉降量, 即

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{e_{1i} - e_{2i}}{1 + e_{1i}} H_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta p_i}{E_{si}} H_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \Delta p_i}{1 + e_{1i}} H_i = \sum_{i=1}^n m_{vi} \Delta p_i H_i \quad (6-28)$$

式中, $e_{1i}, e_{2i}, a_i, E_{si}, m_{vi}, H_i$ 和 Δp_i 分别为第 i 层的初始孔隙比, 最终孔隙比, 压缩系数, 压缩模量, 体积压缩系数, 厚度和平均附加应力。

采用上述分层总和法计算基础沉降时, 压缩层厚度 z_n 由附加应力与自重应力之比 σ_z/σ_α 确定。对于一般黏性土地基, 深度 z_n 处的 $\sigma_z/\sigma_\alpha \leq 0.2$; 对于软黏土地基, $\sigma_z/\sigma_\alpha \leq 0.1$ 。

6.3.3 修正分层总和法

我国《建筑地基基础设计规范》(CB50007—2011) 推荐的方法是修正的分层总和法, 称为应力面积法。这是一种简化的分层总和法, 假设每层土的压缩模量 E_{si} 不变, 而不再划分为若干薄层 (图 6-14)。对于第 i 层土, 有

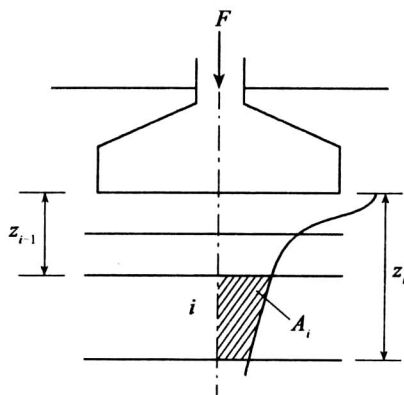


图 6-14 应力面积

$$\begin{aligned}
\Delta S'_i &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} \varepsilon_z dz = \frac{1}{E_{si}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_z dz \\
&= \frac{1}{E_{si}} \left(\int_0^{z_i} \sigma_z dz - \int_0^{z_{i-1}} \sigma_z dz \right) \\
&= \frac{1}{E_{si}} (z_i \bar{\sigma}_{z_i} - z_{i-1} \bar{\sigma}_{z_{i-1}})
\end{aligned} \quad (6-29)$$

为了计算方便,引进深度 z_i (基底到第 i 层底面) 的距离范围内的平均附加应力系数 $\bar{\alpha}_i$, 即 $\bar{\alpha}_i = \bar{\sigma}_{zi}/p_0$, 其中, p_0 为引起地基变形的基底附加压力, 也是基底处的附加应力。于是, 上式成为

$$\Delta S'_i = \frac{p_0}{E_{si}} (\bar{\alpha}_i z_i - \bar{\alpha}_{i-1} z_{i-1})$$

整个地基的压缩量计算值为

$$S' = \sum_{i=1}^n \Delta S'_i = \sum_{i=1}^n \frac{p_0}{E_{si}} (\bar{\alpha}_i z_i - \bar{\alpha}_{i-1} z_{i-1})$$

关于计算深度 z_n 的确定, 可参见规范或相关教科书。

为了提高计算精度, 可根据经验对计算值进行修正, 即乘以沉降计算经验系数 ψ_s , 即

$$S = \psi_s S' = \sum_{i=1}^n \frac{p_0}{E_{si}} (\bar{\alpha}_i z_i - \bar{\alpha}_{i-1} z_{i-1}) \quad (6-30)$$

修正系数 ψ_s 需根据大量地基沉降计算资料与实测资料进行统计分析, 并加以确定。我国许多沉降观测资料分析表明, 按现行修正分层总和法计算值与实测值相比一般偏大, 误差在 30% 以内。可见, 沉降经验修正系数值得深入研究。

6.3.4 应力历史法

6.3.4.1 土层的固结状态

实际土体都有其受力变形的历史。土层中某点在历史上所受过的最大垂直有效压力称为先期固结压力 p_c (Preconsolidation), p_c 与该点现在所受的覆盖压力即竖向自重压力 p_0 之比称为超固结比 (Over Consolidation Ratio), 即

$$\text{OCR} = \frac{p_c}{p_0} \quad (6-31)$$

根据 OCR 值的大小, 可以判断土层当前的固结状态: OCR=1 时为正常固结土; OCR>1 时为超固结土; OCR<1 时为欠固结土。引起土层超固结的因素有多种, 如沉积稳定的上覆土层被水流冲刷掉、地震滑坡使上覆土层移动、冰川曾覆盖土层而后再移去、地下水位变动等。欠固结土乃新近沉积而成, 在当前上覆压力作用下还没有充分固结。

6.3.4.2 先期固结压力

将原状试样的侧限压缩试验结果绘成 $e-\lg p$ 曲线 (图 6-15), 则在实际的附加压力范围内基本上成直线, 其斜率为

$$C_c = \frac{e_1 - e_2}{\lg p_2 - \lg p_1} \quad (6-32)$$

式中, C_c 称为压缩指数 (Compression Index)。

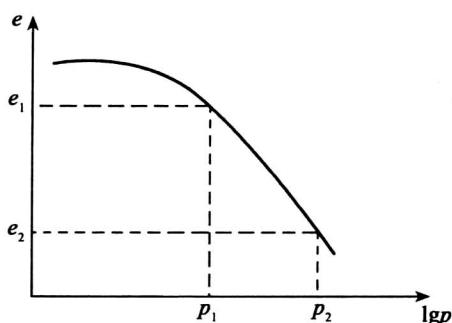


图 6-15 压缩指数

A. Casagrande 发现,在压缩试验中进行若干次加荷—卸荷—加荷循环后,所有再压缩曲线的斜率几乎都与开始部分的加荷曲线斜率基本一致。考虑到取样时必定卸荷,所以 e - $\lg p$ 曲线的初始平缓段是原位应力恢复阶段;受力超过其 p_c 后将发生较明显的变形。根据土的压缩变形特点,人们提出过几种根据 e - $\lg p$ 曲线确定 p_c 的方法,其中最简单的方法是由 Casagrande 提出的,具体做法如下(图 6-16):①在 e - $\lg p$ 曲线上找出曲率半径最小的点 A ,过 A 点作水平线 $A1$ 和切线 $A2$;②作 $\angle 1A2$ 的平分线 AB ,与 e - $\lg p$ 曲线之直线段的延长线交于 C 点。 C 点对应的压力即为 p_c 。

必须指出,确定 p_c 应尽可能用质量高的原状试样做压缩试验;否则,任何求 p_c 的方法也无法得出可靠的结果。

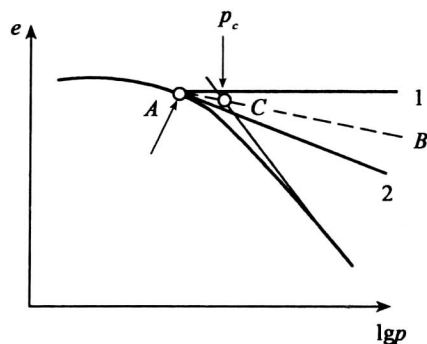


图 6-16 先期固结压力

6.3.4.3 现场压缩曲线

受扰动影响,室内压缩试验得到的压缩曲线并非现场的压缩曲线,故需修正。对于正常固结土,土的扰动程度越大,压缩曲线越平缓,因此现场压缩曲线较室内压缩曲线陡。Schmertman(1955)指出,对于同一种土,无论土样的扰动程度如何,室内压缩曲线都将在 $0.42e_0$ (统计确定的经验值)处交于 D 点(图 6-17)。假设试样的初始孔隙比 e_0 就是现场土的初始孔隙比,再根据先期固结压力 p_c 和现有固结压力 p_0 ,便可确定土的现场压缩曲线。

对于正常固结土(图 6-17),根据 $p_c = p_0$ 和 e_0 确定 B 点,与 D 点相连, BD 即为现场压缩

曲线,其斜率为压缩指数 C_c 。对于超固结土(图 6-18),根据 p_0 和 e_0 确定 B 点,再通过 B 点作直线,与室内回弹再压缩曲线的平均线平行。根据 p_c 确定 C 点并连接 BC , BC 即为现场再压缩曲线,其斜率 C_c 称为膨胀指数或回弹指数。最后连接 CD 得现场压缩曲线,其斜率为压缩指数 C_c 。

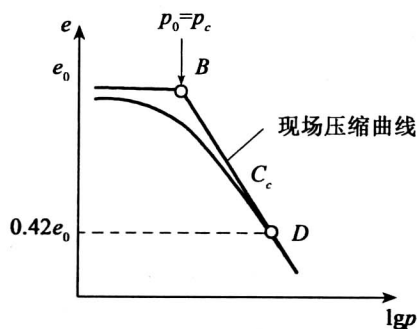


图 6-17 正常固结土

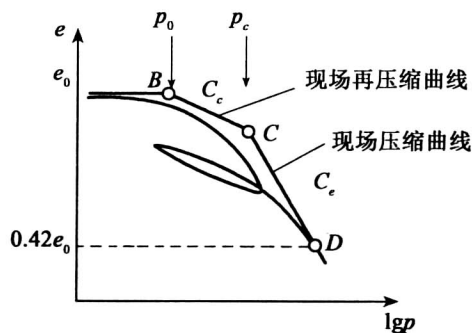


图 6-18 超固结土

6.3.4.4 沉降计算公式

根据上述分析,土层的固结状态不同,其压缩性指标不同,沉降计算也不相同。考虑应力历史的沉降计算方法称为应力历史法(Stress History Method),采用分层总和法,将地基分成若干层计算其压缩变形。对于正常固结土(图 6-19),根据单层压缩量公式,第 i 层的压缩量为

$$\Delta S_i = -\frac{H_i \Delta e_i}{1+e_{0i}} = \frac{H_i C_{ci}}{1+e_{0i}} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \quad (6-33)$$

对于超固结土(图 6-20),当 $p \leq p_c$ 时,第 i 层的压缩量为

$$\Delta S_i = -\frac{H_i \Delta e_i}{1+e_{0i}} = \frac{H_i C_{ci}}{1+e_{0i}} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \quad (6-34)$$

当 $p > p_c$ 时,有

$$\Delta S_i = -\frac{H_i (\Delta e'_i + \Delta e''_i)}{1+e_{0i}} = \frac{H_i}{1+e_{0i}} (C_{ci} \lg \frac{p_{ci}}{p_{0i}} + C_{ci} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{ci}}) \quad (6-35)$$

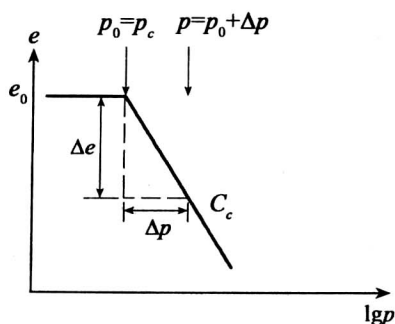


图 6-19 正常固结土

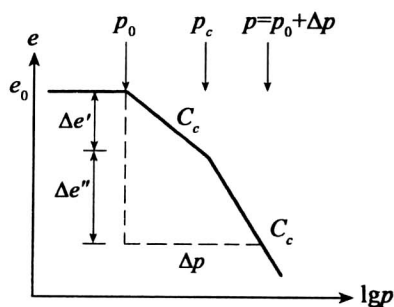


图 6-20 超固结土

6.3.5 Skempton-Bjerrum 法

前述各种分层总和法均未考虑侧向变形对沉降的影响,这样做一般情况下是可行的。但当软土层厚度相对基底尺寸较大时,侧向变形的影响不可忽略。A. W. Skempton 和 L. Bjerrum (1955) 针对黏性土地基,提出了一种考虑侧向变形计算固结沉降量 S_c 的方法。此外,初始沉降 S_d 和次固结沉降 S_i 有时不可忽视。

6.3.5.1 初始沉降计算

黏性土地基上基础的初始沉降占总沉降量的比例可能相当可观,应该加以考虑,且可采用弹性力学公式(6-11)进行估算,其中,模量应采用弹性模量 E ,即再加荷模量 E_w 。此外,饱和黏性土在加荷瞬时,其体积是不可压缩的,故取 $\nu=0.5$ 。

6.3.5.2 固结沉降计算

当地基中黏性土层的厚度超过基底尺寸时,侧向变形对固结沉降的影响不可忽略。设饱和土体中某单元的初始有效主应力为 σ_{1c} 和 σ_{3c} 。施加附加应力增量 $\Delta\sigma_1$ 和 $\Delta\sigma_3$, t 时刻的有效主应力为

$$\sigma'_1 = \sigma_{1c} + \Delta\sigma_1 - \Delta u$$

$$\sigma'_3 = \sigma_{3c} + \Delta\sigma_3 - \Delta u$$

固结稳定后,孔隙水压力 $\Delta u=0$ 。加荷瞬时或不排水条件下的 Δu 可表示为

$$\Delta u = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \quad (6-36a)$$

式中, A, B 为孔隙压力系数。对于饱和土, $B=1$ 。此时,上式成为

$$\Delta u = \Delta\sigma_1 \left[A + \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1}(1-A) \right] \quad (6-36b)$$

一方面,施加 $\Delta\sigma_1$ 和 $\Delta\sigma_3$ 引起的固结变形就是 Δu 消散的结果,故要按下式近似计算:

$$S_c = \int_0^H m_v \Delta u dz = \int_0^H m_v \Delta\sigma_1 \left[A + \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1}(1-A) \right] dz$$

另一方面,按侧限压缩计算的固结变形为

$$S'_c = \int_0^H m_v \Delta\sigma_1 dz$$

两变形之比考虑侧向变形影响的固结沉降修正系数 C_ρ , 即

$$C_\rho = \frac{S_c}{S'_c} = \frac{\int_0^H m_v \Delta\sigma_1 \left[A + \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1}(1-A) \right] dz}{\int_0^H m_v \Delta\sigma_1 dz} = A + \alpha(1-A) \quad (6-37)$$

式中,

$$\alpha = \frac{S_c}{S'_c} = \frac{\int_0^H \Delta\sigma_3 dz}{\int_0^H \Delta\sigma_1 dz} = A + \alpha(1-A) \quad (6-38)$$

研究表明, α 与荷载面的形状、尺寸 B 及压缩层厚度 H 有关,当 H 与 B 之比很小时, α 接近于 1, 此时 C_ρ 约等于 1。此外,当 A 接近于 1 时, C_ρ 也约等于 1。可见,只有当 H 与 B 相

比很小,或 A 接近于 1 时,利用侧限压缩量公式计算的结果才比较符合实际;否则,固结沉降量应为

$$S_c = C_p S'_c \quad (6-39)$$

6.3.5.3 次固结沉降计算

通常将 $e-\lg t$ 曲线分成主固结阶段和次固结阶段,并认为次固结发生在主固结完成之后(图 6-21)。大量室内试验和现场试验都表明,次压缩量与时间的对数之间近似呈直线关系,故次压缩阶段的孔隙比变化可表示为

$$\Delta e = C_\alpha \lg \frac{t}{t_1} \quad (6-40)$$

式中, t_1 为主固结完成(固结度达到 100%)的时间,可根据 $e-\lg t$ 曲线外推而得到; C_α 为次固结直线段斜率,称为次压缩系数。于是,采用分层总和法时, t 时刻的次压缩沉降量为

$$S_s = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta e_i}{1 + e_{0i}} H_i = \sum_{i=1}^n \frac{H_i C_{\alpha i}}{1 + e_{0i}} \lg \frac{t}{t_1} \quad (6-41)$$

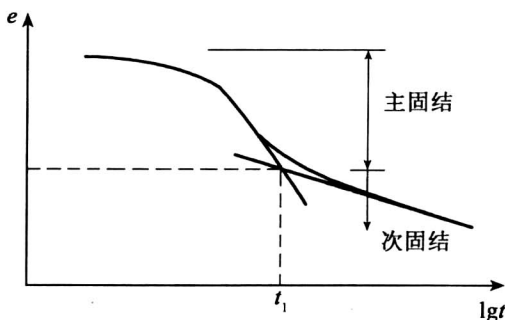


图 6-21 次固结

6.3.6 有关问题讨论

6.3.6.1 应力路径

我们知道,土体中一点的应力状态在施工过程中及竣工后将不断地发生变化,变化的轨迹可由应力路径表示。应力路径对土的应变、孔隙水压力和强度均有重要影响,而前述各种方法未能考虑这种影响。研究表明,应力路径法能比较可靠地计算基础沉降,该法仍采用分层总和法,并考虑具体的应力路径,其步骤如下(Lambe, 1967):

- (1) 估计现场荷载作用下地基中代表性土单元(如各分层的中点)的有效应力路径;
- (2) 在室内试验中复制现场有效应力路径,并量取试验各阶段的垂直应变;
- (3) 将各阶段的垂直应变与土层厚度相乘,得该土层的压缩变形量,将各分层的变形量求和可得总沉降量。

6.3.6.2 基础规模

采用弹性力学公式计算地基沉降的方法将问题过分简单化,很难通过经验修正得到实际可用的公式。而分层总法则能够适当考虑不同土层的影响,再引入经验系数进行修正,

可获得较好的相关性。不过,分层总和法虽简单易行,但理论上并不严谨,且主要适用于小型基础。现在的建筑规模巨大,最大柱荷载可达 3000t,基础埋深也越来越大。在地下空间开发利用的情况下,多层地下空间框筏结构已代替了箱形基础。此外,建筑上要求裙房与主楼之间不设沉降缝。这就要求在基础宽度近百米、面积超过万平方米的厚筏上建筑多个建筑物。有时人们采用有限元法计算沉降,但影响地基变形的因素很多,不容易得到符合实际的结果。例如,陈祥福(2005)采用有限元法计算了青岛中银大厦箱基沉降,计算值为 3 ~ 5mm,而实际沉降值为计算值的十多倍。普遍认为,提高变形计算精度始终是个难题。

6.3.6.3 超填修正

当软土地基上的荷载是填土时,施工期间的地表沉降由后继填土所补填,从而使实际填土荷载大于原设计荷载。但当地下水位很高时,沉至地下水位以下的填土会受到浮力作用,导致基底附加压力减小(图 6-22)。这两种因素对沉降量的影响具有互补性,所以在沉降分析中应综合考虑。

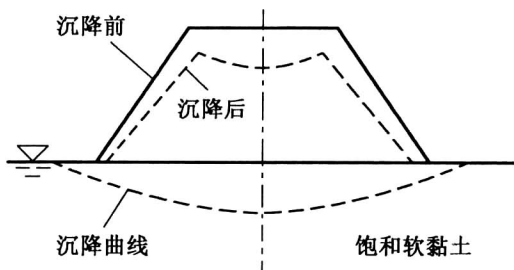


图 6-22 路基超填

6.3.6.4 蠕变沉降

根据对长期观测资料的分析,浙江沿海地区饱和软黏土地基的蠕变沉降约占总沉降的 10%。有些软土路基经砂井堆载预压处理后,次压缩沉降仍可达 14% 以上(邵俊江等, 2002)。到目前为止,蠕变沉降问题也没有得到很好地解决。

6.4 一维固结计算

针对饱和土地基的固结变形问题, Terzaghi (1923) 首先提出了一维或单向固结理论, 是经典土力学的基本内容之一。本节在较复杂条件下推导一维固结方程, 并简要列出一维固结度计算的基本公式。

6.4.1 一维固结方程

假定: ①土均质、各向同性、完全饱和; ②土粒和水不可压缩; ③排水和固结变形均沿同一个方向(如 z 方向)进行, 侧向没有变形; ④渗流服从 Darcy 定律; ⑤在整个固结过程中, 土的渗透系数 k 、压缩系数 a 均为常数; ⑥地面上作用大面积均布荷载 p 且一次施加。在上述假定下, 可推导出孔隙水压力 u 满足的一维固结 (One-dimensional Consolidation) 微分方程

(Terzaghi, 1943), 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6-42)$$

式中,

$$C_v = \frac{k}{\gamma_w m_v} = \frac{(1+e_1)k}{\gamma_w a} \quad (6-43)$$

其中, C_v 称为固结系数 (Coefficient of Consolidation); e_1 为土的初始孔隙比。

早就有人指出, 由于在固结过程中土的压缩性和渗透性, a 均随有效应力的增大而减小, 对于 C_v 来说, 这两种变化的影响能在一定程度上互相抵消, 因此 C_v 的变化不大, 由于 a 减小更多, 故 C_v 随有效应力的增大而增大。应该指出, 按照上式计算 C_v 难以得到满意的结果, 所以常用试验方法 (常规压缩试验或连续加荷压缩试验) 测定。

这里考虑较多的因素, 建立更具普遍性的一维固结微分方程。设地基在 p 的作用下产生应力 $\Delta\sigma$ 并发生一维固结 (图 6-23)。

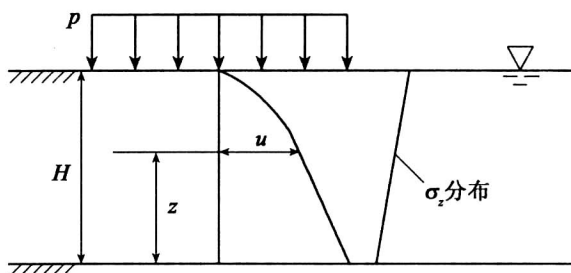


图 6-23 一维固结

根据体积压缩系数的定义, 单位时间内的体积应变为

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (6-44)$$

于是, 根据

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_w} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (6-45)$$

有

$$m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (6-46)$$

设 $k_z = k(z)$, 并注意到

$$\sigma' = \sigma_z - u = \Delta\sigma + \gamma'(H-z) - u \quad (6-47)$$

可由式 (6-46) 得到普遍形式的固结方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m_v \gamma_w}{k} \left(\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{k} \frac{dk}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (6-48)$$

上述方程可以考虑 p 或 $\Delta\sigma$ 和土层厚度 H 随时间变化, 以及渗透系数 k 随深度而变化的情况。如果这三个量都是常数, 则该式简化为 Terzaghi 方程式 (6-42)。

6.4.2 一维固结计算

一维固结问题归结为在一定的边界条件和初始条件下,求解式(6-42)。关于初始条件,在 $t=0$ 即加荷瞬时,超孔隙水压力 u_0 等于固结应力(附加应力),故 u_0 的分布总是与 σ_z 的分布相同。

6.4.2.1 单面排水 σ_z 均匀分布

假设土层厚度为 H ,顶面透水而底面不透水,地表受大面积均布荷载 p_0 作用,此时,固结应力 σ_z 沿深度均匀分布,即 $\sigma_z=p_0$ (图6-24)。这就是 Terzaghi 问题,其初始条件和边界条件分别为

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0 = \sigma_0 = p_0 \\ u|_{z=0} &= 0, \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0 \\ u|_{t=\infty} &= 0 \end{aligned}$$

采用分离变量法,不难求得上述条件下式(6-42)的解答(图6-25),即

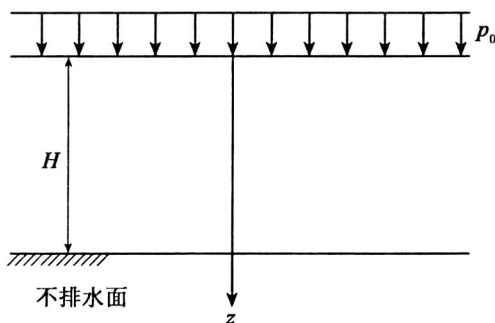


图 6-24 Terzaghi 课题

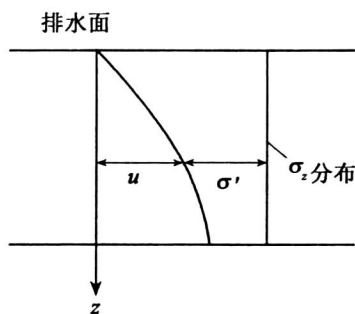


图 6-25 t 时刻的孔压分布

$$u = f(T_v) = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \exp(-M^2 T_v) \quad (6-49)$$

式中, $T_v = \frac{C_v t}{H^2}$ 为无量纲的时间因数(Time Factor); $M = \pi(2m-1)/2, m=1, 2, 3, \dots$ 。

土体固结完成的程度称为固结度(Degree of Consolidation)。深度为 z 处的固结度 U_z 可定义为 t 时刻 z 处的有效应力与该处的固结应力之比,即

$$U_z = \frac{\sigma_z - u}{\sigma_z}$$

然而,更有实际的意义的是整个固结土层的平均固结度 U ,定义为 t 时刻有效应力面积和固结应力面积之比较,即

$$U = \frac{\int_0^H (\sigma_z - u) dz}{\int_0^H \sigma_z dz} = 1 - \frac{\int_0^H u dz}{\int_0^H u_0 dz} = 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} \quad (6-50)$$

根据定义,当土层的压缩模量为常数时,不难做出下列推演:

$$U = \frac{\int_0^H (\sigma_z - u) dz}{\int_0^H \sigma_z dz} = \frac{\int_0^H \sigma'_z dz}{\int_0^H \sigma_z dz} = \frac{\int_0^H \frac{\sigma'_z}{E_s} dz}{\int_0^H \frac{\sigma_z}{E_s} dz} = \frac{S_a}{S_c} \quad (6-51)$$

这表明 t 时刻的固结度等于该时刻的沉降量与最终沉降量之比。将式(6-49)代入上式,可得 Terzaghi 课题的平均固结度

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \quad (6-52)$$

当固结度大于 30% 时,可按下式近似计算:

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \exp(-\frac{\pi^2}{4} T_v) \quad (6-53)$$

6.4.2.2 单面排水 σ_z 非均匀分布

如果土层单面排水如图 6-26 所示,排水面的固结压力为 σ'_z ;不排水面的固结压力为 σ''_z ,则平均固结度为

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2(\sigma'_z + \sigma''_z)} \left[\sigma'_z - (-1)^m \frac{\sigma''_z - \sigma'_z}{M} \right] \exp(-M^2 T_v) \quad (6-54a)$$

实用中取首项为

$$U = 1 - \frac{16}{\pi^2(\sigma'_z + \sigma''_z)} \left[\sigma'_z + \frac{2}{\pi}(\sigma''_z - \sigma'_z) \right] \exp(-\pi^2 T_v) \quad (6-54b)$$

式中, H 为土层最大排水距离,单面排水时即为土层厚度。

6.4.2.3 双面排水 σ_z 任意分布

如果土层双面排水(图 6-27),则任何固结应力分布条件下的固结度均与单面排水 σ_z 均匀分布时的固结度 U 相同,但其中的 H (最大排水距离)为土层厚度 H_s 的一半,即 $H = H_s/2$ 。

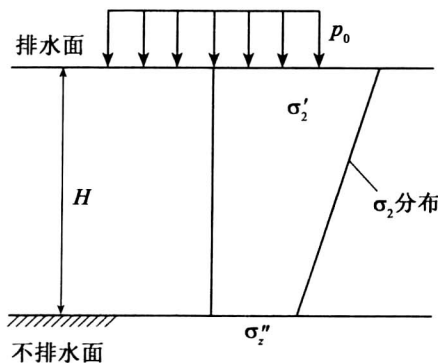


图 6-26 单面排水

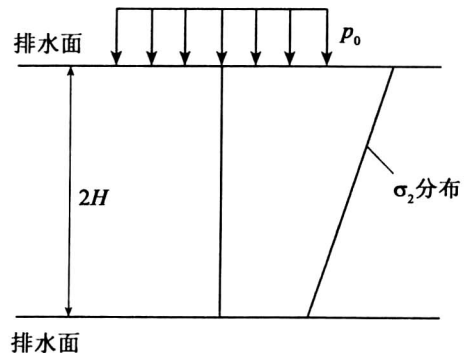


图 6-27 双面排水

6.4.3 有关问题讨论

由于 Terzaghi 固结理论简单实用,所以在工程中获得极为广泛的应用。严格讲,一维固

结条件在实际中并不存在,但当土层厚度均匀且相对于外荷载作用面尺寸较小时,可近似地视为一维固结。多年来,在多维固结理论研究不断取得进展的同时,一维固结理论也获得较大改进,研究方向侧重于对 Terzaghi 理论的修正,例如,考虑土性指标在固结过程中的变化、压缩土层厚度随时间而变、荷载为时间的函数等,这些修正使得计算模型能更加准确。

6.5 准多维固结计算

Rendulic 和 Terzaghi (1935) 将 Terzaghi 一维固结理论推广到多维情况,建立了准多维固结理论。这种理论假设总体积应力或平均应力与时间无关,从而使得位移与孔压非耦合化。R. A. Barron (1948) 基于 Terzaghi 理论提出了轴对称情况下砂井固结计算方法,并得到广泛应用。曾国熙 (1997) 也对砂井固结理论做出了重要贡献。

6.5.1 体积应变与应力

针对线弹性土骨架,根据广义 Hooke 定律,体积应变 ε_v 与平均有效应力 σ'_m 具有如下关系:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{3K}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = \frac{1}{K}\sigma'_m$$

式中, K 为体积弹性模量,其表达式为

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

根据有效应力原理

$$\sigma'_x = \sigma_x - u, \sigma'_y = \sigma_y - u, \sigma'_z = \sigma_z - u$$

$$\text{有} \quad \varepsilon_v = \frac{1}{3K}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3u) = \frac{3(1-2\nu)}{E}(\sigma_m - u) \quad (6-55)$$

6.5.2 非耦合固结方程

假定附加应力一次性施加在土体上,且体积应力 $\Theta = 3\sigma_m$ 与时间无关,则根据式 (6-55) 有

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{\partial u}{\partial t}$$

如果渗流介质均匀,即渗透系数与坐标无关,则将上式代入 (6-45) 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{E}{3(1-2\nu)\gamma_w} \left(k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6-56)$$

如果骨架变形为平面应力问题,则容易得出

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{2(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6-57)$$

代入式 (6-45) 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{E}{2(1-2\nu)(1+\nu)\gamma_w} \left(k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6-58)$$

如果假定土骨架只在竖向发生压缩变形而水流是多维的,竖向压力 P 与时间无关,则体积应变为

$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= m_v(p-u) \\ \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} &= -m_v \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}\quad (6-59)$$

考虑到式(6-45),不难推出三维和二维渗流时固结微分方程分别为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_w m_v} \left(k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6-60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_w m_v} \left(k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6-61)$$

比较式(6-56)和式(6-60),可知两种条件下的方程在形式上完全相同,只是固结系数不一样。上述理论称为 Tezaghi-Rendulic 固结理论。如果排水和压缩变形均沿同一个方向进行,则容易得到 Terzaghi 一维固结微分方程式(6-42)。

6.5.3 假设的合理性

在上述固结理论中,认为土体各点的 $\Theta = 3\sigma_m$ 不随时间而变。这个假设并不符合实际。对于三维固结问题,体积力是由孔隙水压力引起的。根据弹性力学中的协调方程,不难得到有效体积应力与孔隙水压力的关系为

$$\nabla^2 \Theta' = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 u \quad (6-62)$$

当 $k_x = k_y = k_z =$ 常数时,式(6-45)成为

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u \quad (6-63)$$

因为

$$\Theta = \Theta' + 3u \quad (6-64)$$

将式(6-63)、式(6-64)代入式(6-62)得

$$\nabla^2 \Theta = + \frac{2(1-2\nu)\gamma_w}{(1-\nu)k} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (6-65)$$

由式(6-65)可知,只有当 $\partial \varepsilon_v / \partial t$ 不随时间变化,即体积应变 ε_v 是时间 t 的线性函数时,体积应力 Θ 才不随时间而变。 ε_v 随时间 t 而线性变化,意味着压缩越来越快且一直保持下去,这是不可能的。事实上, $\partial \varepsilon_v / \partial t$ 总是初期较大,后期越来越缓,并趋近于零。可见,在固结过程中,土体中各点的 Θ 并非常量。

由于 Tezaghi-Rendulic 理论假定体积应力 Θ 与时间无关,故虽考虑了多维渗流或多维固结变形,但理论上仍是不严格的,所以这种固结理论被称为准多维固结理论。

6.5.4 砂井固结计算

6.5.4.1 轴对称问题

对于轴对称(例如砂井固结)问题,如果土体水平渗透系数 k_h 和竖向渗透系数 k_v 不同,

则固结方程式(6-56)或式(6-60)成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + C_{vv} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

考虑到轴对称时直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) Laplace 算子间的关系, 上式成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + C_{vv} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6-66)$$

式中, C_{vh} 和 C_{vv} 分别为水平向固结系数和竖向固结系数。考虑多维变形时, 有

$$C_{hv} = \frac{k_h E}{3(1-2\nu)\gamma_w}, C_{vv} = \frac{k_v E}{3(1-2\nu)\gamma_w} \quad (6-67a)$$

若仅发生竖向压缩变形, 则

$$C_{hv} = \frac{k_h}{\gamma_w m_v}, C_{vv} = \frac{k_v}{\gamma_w m_v} \quad (6-67b)$$

当渗流为各向同性时, 上述两式分别成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6-68)$$

$$C_v = \frac{kE}{3(1-2\nu)\gamma_w} \text{ 或 } C_v = \frac{k}{\gamma_w m_v} \quad (6-69)$$

问题归结为在一定边界条件和初始条件下, 求解方程式(6-66)或式(6-68)。

6.5.4.2 Barron 解答

在大面积荷载 p_0 作用下, 砂井地基固结属于轴对称问题。通常假定每个砂井的影响范围在平面上为一个圆, 而且每个砂井的受力排水状态相同, 故只需研究一个砂井及其影响范围即可 (图 6-28)。砂井固结计算以 Terzaghi 理论为基础, 即假设地基只发生竖向压缩。设地基顶面排水, 底面为不透水面, 此时边界条件是齐次的。若假设均布荷载 p_0 突然一次性施加在砂井地基上, 则采用分离变量法可将上述固结问题分解为水平向固结问题和竖向固结问题。为此, 将孔隙水压力写成如下形式 (Carrillo, 1952):

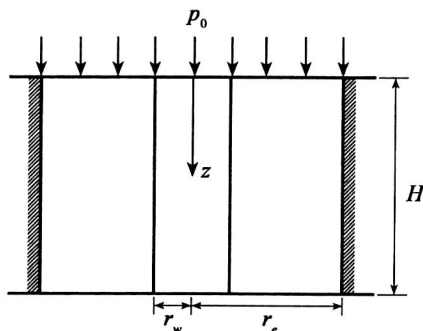


图 6-28 砂井固结

$$C_v = \frac{u(r, z, t)}{u_0} = \frac{u_r(r, t)}{u_0} \cdot \frac{u_z(z, t)}{u_0} \quad (6-70)$$

式中, u_r 和 u_z 分别为径向和竖向孔隙水压力。整个砂井影响范围内土柱体内的平均孔隙水压力亦应有同样的关系, 即

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} = \frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_0} \cdot \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_0} \quad (6-71)$$

将式(6-70)代入式(6-66)和定解条件, 不难证明 u_r 、 u_z 分别满足下列方程、初始条件和边界条件:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = C_{vh} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \quad (6-72a)$$

$$u_z|_{t=0} = u_0 = p_0 \quad (6-72b)$$

$$u_r|_{r=r_w} = 0, \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (6-72c)$$

及

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = C_{vv} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (6-73a)$$

$$u_z|_{t=0} = u_0 = p_0 \quad (6-73b)$$

$$u_z|_{z=0} = 0, \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (6-73c)$$

式中, r_w 、 r_e 分别为砂井半径、单井影响范围的等效半径; H 为土层竖向排水距离, 单面排水时为土层厚度 H_s , 双面排水时为 $H_s/2$ 。

竖向固结问题式(6-73)已有解答, 即 Terzaghi 解答。针对水平方向的固结问题式(6-73), Barron(1948)给出了两种条件下的解析解: ①自由应变假设, 即假设在砂井影响范围内圆柱土体各点的竖向变形时自由的, 且均布荷载不因地面出现差异沉降而重新分布; ②等应变假设, 即假定在砂井影响范围内圆柱体同一水平面各点的竖向变形相等。已有研究表明, 当井径比 ($n = d_e/d_w$) 大于 5 时, 两种条件下得到的固结度很接近。这里只给出等应变条件下的解答:

$$u_r = \frac{4 \bar{u}_r}{d_e^2 F(n)} \left[r_e^2 \ln \left(\frac{r}{r_w} \right) - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right] \quad (6-74)$$

式中,

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \ln(n) - \frac{3n^2}{4n^2 - 1} \quad (6-75)$$

\bar{u}_r 为 t 时刻(单个砂井影响范围内)孔隙水压力的平均值, 可表示为

$$\bar{u}_r = \bar{u}_0 e^\lambda \quad (6-76)$$

\bar{u}_0 为初始超孔隙水压力的平均值, λ 为

$$\lambda = -\frac{8T_h}{F(n)}, T_h = -\frac{C_{vh} t}{d_e^2} \quad (6-77)$$

根据固结的定义, 可得径向平均固结度 U_r 为

$$U_r = 1 - \frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_0} = 1 - \exp \left[\frac{-8T_h}{F(n)} \right] \quad (6-78)$$

考虑到式(6-71)及固结度的定义

$$U = 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0}, U_r = 1 - \frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_0}, U_z = 1 - \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_0} \quad (6-79)$$

有

$$1 - U = (1 - U_r)(1 - U_z) \quad (6-80)$$

6.5.4.3 井阻和涂抹

在砂井地基固结过程中,水流向砂井并通过砂井流向垫层而排出。砂井对渗流具有一定的阻力,从而影响地基的固结速率,这种作用称为井阻(Well Resistance)。此外,在设置砂井的过程中,井周黏土薄层经受涂抹作用(Smear Action)而形成涂抹区。涂抹区的渗流性小,其存在也将延滞径向和固结过程。前面的解答没有考虑这两种作用,而当砂井长细比较大时,它们的影响是不可忽略的。考虑井阻和涂抹作用的径向固结方程为(曾国熙, 1997)

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = \begin{cases} C_{vh} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \frac{k_s}{k_h}, & r_w \leq r \leq r_s \\ C_{vh} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right), & r_s \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (6-81)$$

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = - \frac{2k_s}{\gamma_w k_w} \frac{\partial u_r}{\partial r} \bigg|_{r=r_w} \quad (6-82)$$

边界条件和初始条件分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= 0, r = r_e \\ u_r &= r_w, r = r_w \\ u_w &= 0, z = 0 \\ \frac{\partial u_w}{\partial z} &= 0, z = H \end{aligned} \right\} \quad (6-83)$$

$$\bar{u}_r = u_0 = p_0, t = 0 \quad (6-84)$$

在等应变假设条件下,上述问题的解答为

$$\begin{aligned} u_r &= u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{F_a + D} \left[\frac{k_h}{k_s} \left(\ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_e^2} \right) + D \right] \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_m t}, & r_w \leq r \leq r_s \\ u_r &= u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{F_a + D} \left[\left(\ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_e^2} \right) + \frac{k_h}{k_s} \left(\ln s - \frac{s^2 - 1}{2n^2} \right) + D \right] \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_m t}, & r_s \leq r \leq r_e \\ u_w &= u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{F_a + D} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_m t} \\ \bar{u}_r &= u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_m t} \end{aligned} \quad (6-85)$$

式中,

$$F_a = \left(\ln \frac{n}{s} + \frac{k_h}{k_s} \ln s - \frac{3}{4} \right) \frac{n^2}{n^2-1} + \frac{s^2}{n^2-1} \left(1 - \frac{k_h}{k_s} \right) \left(1 - \frac{s^2}{4n^2} \right) + \frac{k_h}{k_s} \frac{1}{n^2-1} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)$$

$$D = \frac{8G(n^2-1)}{M^2 n^2}, M = \frac{2m+1}{2} \pi, G = \frac{k_h}{k_w} \left(\frac{H}{d_w} \right)^2, B_r = \frac{8C_{vh}}{(F_a+D) d_e^2}$$

式中, k_h 为土的水平渗透系数; k_s 为涂抹区内土的渗透系数; k_w 为砂井填料的渗透系数; r_s 为涂抹区半径; $s = r_s / r_w$ 。

由式(6-85)可得砂井地基的径向平均固结度 U_r 为

$$U_r = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} e^{-B_r t} \quad (6-86)$$

6.6 三维固结计算

在非耦合固结理论中,假定体积应力 Θ 与时间无关,此时只需考虑连续条件和体积变形。前面的分析表明,即使一次性施加外部荷载, Θ 也与时间有关。此时,仅仅连续方程无法确定孔隙水压力,必须考虑平衡方程、几何方程和本构方程。Biot(1941)假定土骨架变形为线弹性小变形,渗流服从 Darcy 定律,孔隙水为含有封闭气泡的可压缩流体,推导出比较严密的三维固结微分方程,使多孔弹性介质固结理论趋于完善。本节仅考虑饱和土的渗透固结。

6.6.1 问题的基本方程

6.6.1.1 平衡方程

对于饱和土静力学问题,平衡微分方程为

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

结合有效应力原理,可得有效应力 σ'_{ij} 和孔隙水压力 u_w (在 Biot 固结理论中用 u_w 表示孔隙水压力,以免同位移符号相混)表达的平衡方程

$$\sigma'_{ij,j} + u_{w,i} + f_i = 0 \quad (6-87)$$

6.6.1.2 几何方程

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6-88)$$

6.6.1.3 本构方程

根据有效应力原理,土的变形取决于有效应力,所以本构方程是有效应力与应变之间的关系。假设土骨架为各向同性的线性弹性介质,则本构方程为广义 Hooke 定律为

$$\sigma'_{ij} = \lambda \varepsilon_v \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (6-89)$$

6.6.1.4 连续方程

假设土体完全饱和且土颗粒和孔隙水不可压缩,则连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u_w}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (6-90)$$

式中, $Q = \gamma_w \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$ 。

6.6.1.5 边界条件

在固结问题中,边界条件包括位移、应力和孔压等三种边界条件。位移边界条件为

$$u = \bar{u}_i \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (6-91)$$

结合有效应力原理,应力边界条件为

$$n_j \sigma_{ij} + u_w n_i = -\bar{p}_i \quad (\text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上}) \quad (6-92)$$

孔隙水压力边界条件主要有三种:在第一类边界 Γ_1 ,为透水边界,边界上已知孔隙水压力,即

$$u_w|_{\Gamma_1} = u_w(x, y, z, t) \quad (6-93)$$

第二类边界 Γ_2 为已知流量边界。考虑到流量边界条件以及孔隙水压力与水头的关系,有

$$\left(k_x \frac{\partial u_w}{\partial x} l + k_y \frac{\partial u_w}{\partial y} m + k_z \frac{\partial u_w}{\partial z} n \right) \bigg|_{\Gamma_2} = -\gamma_w q \quad (6-94)$$

式中, q 为单位时间内通过单位面积流出的水量; l, m, n 为边界几的外法线方向余弦。当边界不透水时,上述边界条件成为

$$\left(k_x \frac{\partial u_w}{\partial x} l + k_y \frac{\partial u_w}{\partial y} m + k_z \frac{\partial u_w}{\partial z} n \right) \bigg|_{\Gamma_2} = 0 \quad (6-95)$$

此外,截断边界上的孔隙水压力是渐变的,可用外插法确定边界条件,但这样做会使总的系数矩阵不对称,增加计算量。最好是根据具体情况,处理成前两种边界。在边界截取范围较大时,这样处理对主要分析区域的影响是不大的。

6.6.1.6 初始条件

求解固结问题需要初始条件,包括 $t=0$ 时刻的位移场 u_i 和孔隙水压力场 u_w , 即

$$u_i|_{t=0} = u_{i0}(x, y, z, 0) \quad (6-96)$$

$$u_w|_{t=0} = u_{w0}(x, y, z, 0) \quad (6-97)$$

在 Terzaghi 固结理论中,固结方程不包含外部荷载;它引起的初始孔隙水压力必须先求出并作为初始条件。而在 Biot 固结理论中,孔隙水压力与外荷载之间的关系在平衡方程和应力边界条件中得到了反映,因此没有类似于 Terzaghi 理论中要求的初始条件。式(7-97)中规定的初始孔隙水压力并非当下的外部荷载所引起,而是加荷前残留在土体中未消散的。

6.6.2 Biot 方程的推导

6.6.2.1 固结方程

对于空间固结问题,有3个平衡方程、6个几何方程、6个本构方程、1个连续方程,共16个方程,其中包括6个应力分量、6个应变分量、3个位移分量、1个孔隙水压力,共16个未知数。可见,在给定边界条件和初始条件时,问题是可以求解的。以位移和孔隙水压力为基本未知量。将几何方程式(6-88)代入本构方程,有

$$\sigma'_{ij} = \lambda \varepsilon_v \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6-98)$$

将上式代入平衡方程,并注意到

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{kk} = u_{k,k} \quad (6-99)$$

可得用位移和孔压表示的微分方程

$$(\lambda + G)u_{i,ij} + Gu_{i,ij} - u_{w,i} + f_i = 0 \quad (6-100a)$$

其展开式为

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial u_w}{\partial x} + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial u_w}{\partial y} + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial u_w}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (6-100b)$$

式(6-90)与式(6-100)联立,就是饱和土的 Biot 固结方程。

6.6.2.2 简要评述

在 Terzaghi 理论中,假定体积应力与时间无关,或只发生竖向压缩,这使得孔隙水压力与土骨架变形无耦合关联,从而固结变形问题只需求解连续方程。而在 Biot 真三维固结理论中没有做上述假定,孔隙水压力的变化与土骨架变形相互联系,理论推导严密。可见, Biot 理论是一种较合理的有效应力分析方法。

由于问题的复杂性,上述方程的求解通常需要采用数值方法,特别是有限单元法。Sandhu 等人(1969)首先将有限单元法用于分析 Biot 固结问题,此后固结有限元分析获得了长足的发展。采用有限单元法求固结问题时,需要将平衡问题和连续问题分别处理。可以从式(6-90)和式(6-100)出发,采用加权余量法建立有限元方程,也可以从前述基本方程出发,推导有限元方程。第二种方式概念比较清晰,有助于理解各种方程和边界条件的处理。

第7章 岩土的动力特性

7.1 岩土中的弹性波理论

7.1.1 波在介质中的传播

当一个急剧作用在介质中引起局部扰动时,扰动会立即传播或扩展到介质的其余部分。从日常生活的许多事例中,如声音的传播以及地震的传播等,都可以看到此类现象。这些简单的现象,即为研究波动问题的基础。

介质中局部扰动的传播,究其最终的物理原因,仍在于原子之间的相互作用。最简单和粗糙的模型,就是用弹簧连接起来的一串质点,当其中一个质点受到扰动时,就会通过弹簧传给相邻质点,如此继续下去,很快就传到了全部质点上。在此过程中,每个质点只在它的平衡位置附近作微小振动,被传递的只是扰动。由于这种传播是以波的形式实现的,从整体上看,是一种波的运动,故简称为波动。显然,在此模型中,质点的质量和连接弹簧的刚度对传播速度有影响。质量减小和弹簧刚度增大,将使传播速度加快;反之,传播速度将减慢。在极端情况下,可以导致瞬时传播或不传播。

以上所述的模型虽有一系列缺点,但在一定程度上说明了波动过程,有助于了解各种介质的波动。实际上,各种不同介质中的波动虽然具有许多共同的特点,但也有很大的差别,以致不能得出完整的、普遍性的结论,因而需作为单独的课题加以研究。在此所讨论的只是波在固体中的传播,而且限于弹性波,即在弹性介质中传播的波。

一般扰动是在三维空间中向外传播的。传播中,位于最前面的扰动称为波前。处于波前前面的介质尚无运动,而在波前后面的部分则已经受到扰动,并在某一时间内继续振动。由于弹性体既能传递拉压应力,又能传递剪切应力,因而在弹性体中可以存在两种不同形式的波,其中,一种主要是由于各微小部分间的拉压作用而传播的波,称为膨胀波,因为此时单元体的对角线不转动,故也称无旋转波;另一种主要是由于弹性体中各微小部分间的剪切作用而传播的波,称为畸变波。因为剪切作用不会改变单元体的体积,故也称为等体积波。

当然,扰动的向外传播只是波动的形式之一。传播的结果必然会遇到介质的边界面。这时将发生波的反射、折射等一系列现象。而当弹性波传播到边界面时,一般说来,上述任何一种波都会同时引起膨胀波和畸变波。这一特点是声波或电磁波所没有的。

7.1.2 波动方程

理想弹性体的运动微分方程为

$$\begin{cases} (\lambda+G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ (\lambda+G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ (\lambda+G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (7-1)$$

式中, ρ 为体积密度; $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$, 为 Lamé 弹性常数; E, G, μ 为材料的动弹性常数;

$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, 为体积应变; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 为 Laplace 算子。

假设波动所产生的变形中体积应变为零时, 变形仅由剪切的歪斜与转动构成, 运动方程式(7-1)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 w \end{cases} \quad (7-2)$$

因上述方程表示的波动中单元体的体积无变化, 故通常称其为等体积波或畸变波。

假设波动所产生的变形中不存在旋转, 即变形仅由体积改变构成, 运动方程式(7-1)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda+2G}{\rho} \nabla^2 u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\lambda+2G}{\rho} \nabla^2 v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\lambda+2G}{\rho} \nabla^2 w \end{cases} \quad (7-3)$$

显然, 这也是一组波动方程, 说明在无转动的条件下, 仍然有一种波的运动, 这种波称为无旋转波或膨胀波。

实际上, 一般情况下, 传播于弹性体中的波是这两种波的叠加, 即既有膨胀波, 也有畸变波。综合式(7-2)及式(7-3), 两种波的运动方程可统一写成

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \eta \quad (\eta = u, v, w) \quad (7-4)$$

对于膨胀波:

$$a = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}$$

对于畸变波:

$$a = c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

7.1.3 平面波

当扰动产生于弹性体中一点时, 波动将由此点开始向各个方向传播, 此时的波前并不在

一个平面上,但是,当距离扰动中心足够远时,则可以近似认为波的传播是以平面的形式向前推进,所有质点的运动都平行于传播方向或垂直于传播方向,这种波称为平面波。其中,当质点运动方向平行于传播方向时,称为纵波,纵波相当于上述的膨胀波;而当质点运动方向垂直于传播方向时,称为横波,它相当于上述的畸变波。

7.1.3.1 纵波

假设 x 轴为传波方向,根据纵波的特点,此时 $v=w=0$,而 u 仅为坐标 x 和时间 t 的函数,方程式(7-3)简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7-5)$$

这就是纵波的波动方程。

可以证明,任何一个以 $x+c_1t$ 为变量的函数 $g(x+c_1t)$ 都是方程式(7-5)的解。这一点,只要把 $u=g(x+c_1t)$ 代入式(7-5)即可得到证明。同样还可以证明,任何一个以 $x-c_1t$ 为变量的函数 $f(x-c_1t)$ 也是方程式(7-5)的解。因此,方程式(7-5)的通解可写为

$$u=f(x-c_1t)+g(x+c_1t) \quad (7-6)$$

现在,暂时不去研究函数 f 与 g 的具体形式(由初始条件决定),而先说明解的物理意义。由此也可说明,式(7-5)为什么被称为波动方程。

以式(7-6)的第一项为例,函数 $f(x-c_1t)$ 在某一个固定的时刻,如 $t=0$ 或某一固定值时,它将是 x 的函数,这时我们可以画出它的图形是曲线 abc (图 7-1(a))。

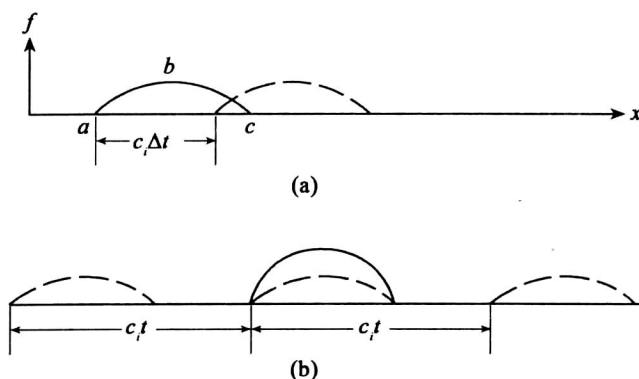


图 7-1 波动函数

在 Δt 时间之后,函数变为 $f(x-c_1t-c_1\Delta t)$ 。如果令 $x_1=x-c_1\Delta t$,则函数可写成 $f(x_1-c_1t)$,仍与原来有同样的形式。但是,由解析几何知道,以 x_1 代 x 这种变量的变换,相当于将坐标原点沿 x 轴向前移动了 $c_1\Delta t$ 距离。因为,经变量变换后函数的形式未变,故在新坐标系内,曲线仍然保持原来形状。这实际上是把图形向前移动 $c_1\Delta t$ 距离。因此,在 Δt 时间之后,曲线 abc 将保持其原形,并前进到虚线位置。由于曲线 abc 表示的是某一时刻弹性体各点因扰动而产生的位移,则上述分析扰动以速度 c_1 向 x 的正向传播,也就是说,式(7-6)的第一项代表以恒速 c_1 向 x 正向传播的波。同理,可以说明,式(7-6)的第二项代表以同样的速度 c_1

向 x 轴的反向传播的波。整个通解说明,由式(7-5)所表示的运动,在一般情况下是朝相反方向传播的两个波,其传播速度为

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

将 λ 及 G 代入上式,得

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}} \quad (7-7)$$

c_1 为无限介质中纵波(膨胀波)的传播速度,对于石灰岩类介质, $c_1 \approx 4000 \text{ m/s}$ 。

7.1.3.2 横波

沿用前面的坐标,把 x 轴设在传波方向、 y 轴设在质点运动的方向,则在横波中,各点只有 y 向的位移 v ,它是坐标 x 与时间 t 的函数,其余两个方向的位移 $u=w=0$ 。波动方程式(7-2)简化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7-8)$$

对比式(7-5)可以看出,除了位移是在 y 方向(横向)之外,横波的运动方程与纵波的运动方程在形式上完全相同。因此,上述方程通解以及关于波动特点的讨论,在此处仍然适用,即现在的通解可写为

$$v = f(x - c_2 t) + g(x + c_2 t) \quad (7-9)$$

式中, f 与 g 是两个任意函数,等式右边的两项分别代表沿 x 轴正、负方向传播的横波,其传播速度为

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} \quad (7-10)$$

对比式(7-7)可知:

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1-2\mu}{2(1+\mu)}}$$

这一结果很重要。例如,对于石灰岩, $\mu = 0.25$,则由此式可以算出 $c_2 = c_1 / \sqrt{3}$ 。

7.1.4 等直杆中纵波的基本理论

结合实际需要,本节讨论一个特殊问题——纵波在等直杆中的传播,主要目的是弄清这种情况下的波速、质点振动速度、应力变化规律以及波在固定端或自由端的反射等问题。

7.1.4.1 波动方程

设有一个无限长的等截面直杆,受到扰动后,沿其轴向有纵波传播。以坐标 x 表示任意截面的位置,则截面的位移将是 x 与时间 t 的函数,即 $u = u(x, t)$ 。现由杆中截出长为 dx 的微小段,其两端表面上的应力如图 7-2 所示。以 A 表示杆的横截面积, ρ 表示材料的密度,略去体积力,由牛顿第二定律可列出微段杆的运动微分方程为

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

整理后得

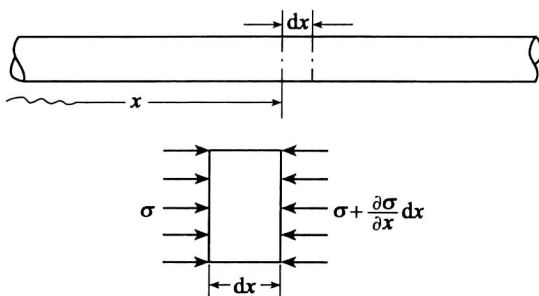


图 7-2 波在等截面直杆中传播的分析模型

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7-11)$$

考虑到现在杆受单向应力,故有

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

代入式(7-11)得

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7-12)$$

上式即为直杆的波动方程,对比式(7-5),可以看出,纵波在等截面直杆内的传播速度为

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7-13)$$

应注意,此时 c_0 不同于无限介质中的纵波速度 c_1 。由式(7-7)及式(7-13)可以得出

$$\frac{c_1}{c_0} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

对于岩土类材料,通常 $\mu=0.3$,此时比值为 1.16。

这里应当指出,在推导波动方程式(7-12)时,认为杆的侧面不受任何外力作用,但允许由于横向效应而有尺寸变化。同时,还略去了横向的惯性,并且,假定该截面上应力是均匀分布的。

7.1.4.2 波在固定端和自由端的反射

1. 固定端的反射

现假定,所考察的杆一端固定,另一端在无限远处,即是个半无限杆。把坐标原点设在固定端,则此处的边界条件为,当 $x=0$ 时:

$$u(0, t) = 0 \quad (7-14)$$

这个边界条件的意思是:无论是何种形式的扰动(脉冲),无论在什么时间,只要它达到固定端,其位移就应等于零。

为研究这种固定端的约束对波动的影响,最好采用影象法——波动研究中另一重要的方法,此法比较直观,除了很复杂的情况外都可以用。现举例说明如图 7-3 所示。

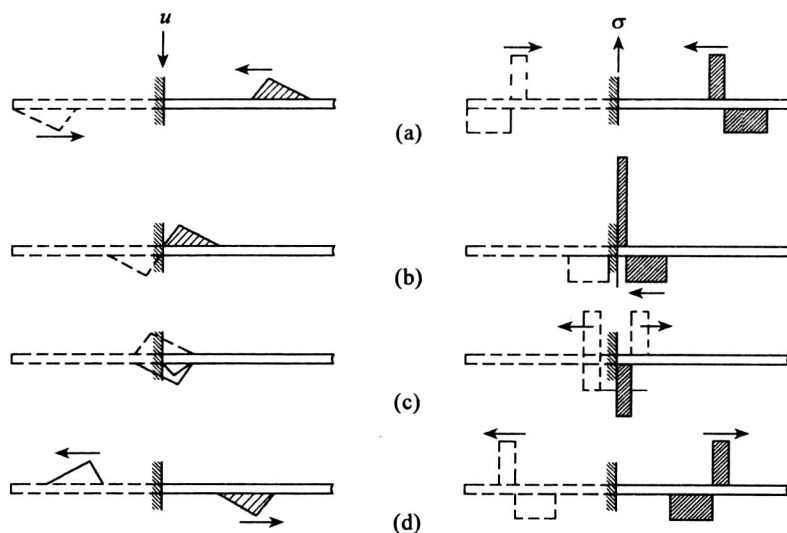


图 7-3 波的传播特征

设有三角形的位移脉冲向固定端传来,当它到达固定端时,应满足式(7-14)的条件,即位移为零。假想有一个形状完全相同但位移值为负的脉冲,以同样的距离和速度由固定端的另一面传来,好像是真实脉冲的影像(图 7-3(a)),它与真实脉冲同时到达固定端,由于二者形状相同而位移相反,结果在脉冲到达固定端时位移为零,也就是说,根据边界条件,固定端的作用相当于造成一个从另一面传来的负位移脉冲。与这些位移脉冲相应的脉冲,可用图形微分的方法求出,并画在图的右列。

图(7-3(b))表示脉冲到达固定端时的情况。特别值得注意的是,此时两个应力脉冲方向相同。因互相叠加的结果,使固定端处的应力是单个脉冲时的一倍。在图(7-3(c))所示阶段,因两个位移脉冲叠加的结果造成有剖面线部分的小脉冲,同时,应力脉冲因叠加的结果造成压应力增加一倍。这种应力成倍增加的现象,是固定端边界的特点之一。图(7-3(d))表示脉冲与固定端作用以后的情况,由图可见,经反射之后,应力脉冲保持原来的形状,拉应力在前,压应力在后,并且二者的大小不变。反射后能保持原有应力的形式及数值,这是固定端的另一个特点。

总之,当波与固定端相互作用时,其应力值会增加一倍。经反射后,位移改变符号而应力保持原有形式。

2. 自由端的反射

现假定半无限杆有一端自由,将坐标原点放在此处。因自由端无外力作用,截面应力为零,故此处的边界条件为,当 $x=0$ 时:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (7-15)$$

仍然采用影像法说明自由端对波的反射作用,如图 7-4 所示。

设有三角形的位移脉冲传向自由端。为保证条件式(7-15)得到满足,可假想有一形状、符号都相同的位移脉冲从另一方传向自由端,如图 7-4(a)所示,相应的应力脉冲画在右

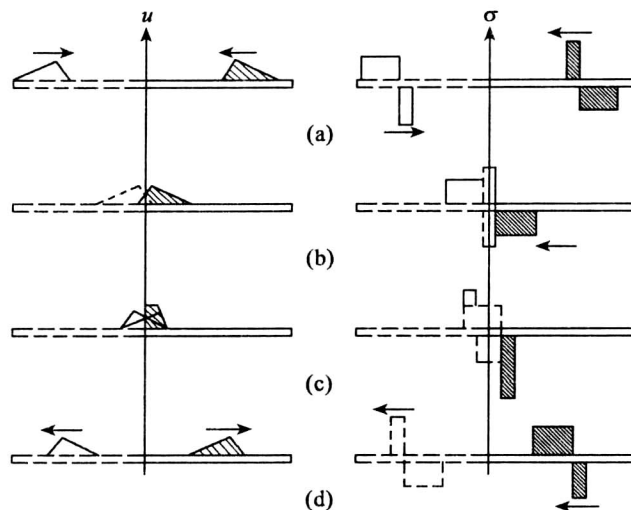


图 7-4 波在自由端面的反射

列,由于两个位移波形的斜率相等、方向相反,所以,二者叠加后恰能满足边界条件。图 7-4 (b)、(c)表示两个脉冲相互作用的情况,实际上也就是脉冲与自由端相互作用的情况。可以看出,当两个位移脉冲的峰值同时到达自由端时,位移量将增加一倍,但自由端的应力始终为零。到了图 7-4(d)所示阶段,脉冲与自由端的作用已结束。由图可看出,原来的拉应力变成了压应力,而压应力变成了拉应力即经自由端的反射,应力将改变符号。自由端的这一特点,在许多试验中都被利用。

3. 波传入另一个杆的问题

设有两个半无限杆,截面积、材料的密度及弹性模量都不同,两者在交界处紧密接触,如图 7-5 所示。

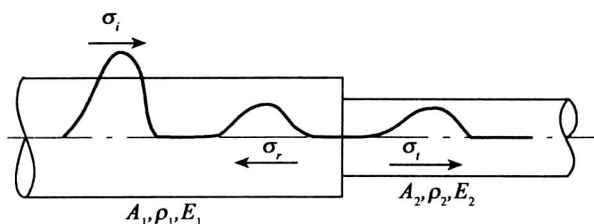


图 7-5 波在不同截面间的传播

现假定从左边的杆内向右传来一个脉冲(为方便计,称之为入射波),当它到达交界面时,其中一部分将被反射回去,另一部分将传入右段杆中。假设以 i 代表入射参数, r 代表反射参数, t 代表透射参数则当已知入射应力 σ_i 时,可以求出反射和透射应力。

考察两杆交界面,由于两杆保持紧密接触,则在此面两边的力必须相等,同时,每个杆界面处的速度也必须相等。据此,接触面的连续条件为

$$\begin{cases} A_1(\sigma_i + \sigma_r) = A_2\sigma_t \\ \dot{u}_i + \dot{u}_r = \dot{u}_t \end{cases} \quad (7-16)$$

根据波动方程的通解,注意到 u_i 及 u_r 是向右传播的波,而 u_t 为向左传播的波,可写出

$$\begin{cases} u_i = f_1(x - c_1 t) \\ u_r = g_2(x + c_1 t) \\ u_t = f_2(x - c_2 t) \end{cases} \quad (7-17)$$

式中, $c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$, 分别代表左、右杆中的传波速度。

根据质点运动方程,结合上述边界条件,可解得

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{2A_1\rho_2c_2}{A_1\rho_1c_1 + A_2\rho_2c_2} \sigma_i \\ \sigma_r &= \frac{A_2\rho_2c_2 - A_1\rho_1c_1}{A_1\rho_1c_1 + A_2\rho_2c_2} \sigma_i \end{aligned} \quad (7-18)$$

式中, A_1, A_2 分别为左、右杆的截面积; ρ_1, ρ_2 分别为左、右杆的密度; σ_i, σ_r 分别为透射与反射力。

7.1.5 岩土中的弹性波

7.1.5.1 弹性波的类型

弹性波在地层中的传播可分为体波和面波。体波又分为压缩波(由于振动时这种波的传播速度比其他波的速度大而先到达监测点,又称为 P 波(Primary Wave))和剪切波(由于其波速小于 P 波的速度而次于 P 波到达,又称其为 S 波(Secondary Wave))。剪切波的垂直分量为 SV 波,水平分量为 SH 波。在地层表面传播的面波可分为瑞利(Rayleigh Wave)和勒夫波(Love Wave),它们在地层介质中传播的特征和速度各不相同,由此,可以在时域波形中加以区别。

在弹性半空间中,各种波的能量密度都将随着离振源的距离的增大而减小(即位移振幅减小),这种能量密度的减小称为几何阻尼。对于体波而言,其振幅与 $1/r$ 成比例减小,但在地表体波衰减很快,其位移振幅与 $1/r^2$ 成比例衰减;而面波的位移振幅与 $1/\sqrt{r}$ 成比例衰减,可见,瑞利波比体波随震源距离 r 的增加而衰减要慢得多。

根据 Miller 和 Percy(1955)的计算,三种弹性波各占总输入能量的百分比见表 7-1。

表 7-1 三种波占输入能量的百分比

波的类型	占总能量的比例(%)
瑞利波	67
剪切波(S波)	26
压缩波(P波)	7

在弹性波速测试中,为确定与波速有关的岩土参数,进行场地类别划分,为场地地震反应分析与动力机械基础进行动力分析提供地基土动力参数,检验地基处理效果等方面的应用,主要有三种测试方法,其特点见表 7-2。

表 7-2 几种波速测试方法的比较

测试方法	测试波形	钻孔数量	测试深度	激振形式	测试仪器	波速精度	工作效率	测试成本
单孔法	P,SH	1	深	地面、孔内	简单	平均值	较高	低
跨孔法	P,SV	2	深	孔内	复杂	高	低	高
瑞利波法	R	—	较浅	地面	复杂	较高	高	低

7.1.5.2 波速在工程中的应用

- (1)计算岩土动力参数;
- (2)计算地基刚度和阻尼比;
- (3)划分建筑场地抗震类别;
- (4)计算场地地基卓越周期;
- (5)判定砂土地基液化;
- (6)地震小区划;
- (7)检验地基加固处理效果;
- (8)地层剪切波速度和地基土的弹性模量参考值;
- (9)判定桩、混凝土结构的质量;
- (10)确定围岩松动圈等。

7.2 岩土的动力特性

7.2.1 动力问题与动荷载

在土木工程建设中,土体经常会受到诸如天然振源的地震(Earthquake)、波浪(Wave)、风(Wind)或人工振源的车辆(Rolling Stock)、爆炸(Explosion)、打桩(Pile Driving)、强夯(Dynamic Compaction 或 Dynamic Consolidation)、动力机器基础(Dynamic Machine Foundation)等引起的动荷载作用。在这些动荷载作用下,土的强度与变形特性都将受到影响。动荷载可能造成土体的破坏,必须加以重视;动荷载也可利用改善不良土体的性质的方法,如地基处理(Ground Treatment)中的爆炸法(Explosion Method)、强夯法、换填垫层法(Cushion Method)等。

天然振源和人工振源的振动频率、振动次数和振动波形各不相同。天然振源发生随机振动荷载,其振动周期、幅值及方向都是不规则的;人工振源有瞬时脉冲振动荷载(一次作用时间很短,但土的动应变较大),也有规则的循环荷载(土的动应变属小应变范围)。在不

同的动荷载作用下,土的强度和变形各不相同,其共同特点是都受到加荷速率和加荷次数的影响。动荷载都是在很短的时间内施加的,一般是 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ s,如爆炸荷载只有几 ms,通常在 10s 以内时,应看做为动力问题。

按加荷次数,动荷载可以分为:①一次快速施加的瞬时荷载,如爆炸和爆破作业,加荷时间非常短,所引起土体的振动由于受到阻尼作用,振幅在不长的时间内衰减为零,称为冲击荷载(Impact Load),如图 7-6(a)所示;②加荷几次至几十次甚至千百次的动荷载,如地震、打桩引起的振动作用等,荷载随时间的变化没有规律可循,称为不规则荷载(Erratic Load),如图 7-6(b)所示;③加荷几万次以上的动荷载,以同一振幅和周期反复循环作用的荷载,称为周期荷载(Periodic Load),如图 7-6(c)所示,如车辆行驶对路基的作用、往复运动和旋转运动的机器基础对地基的作用等。

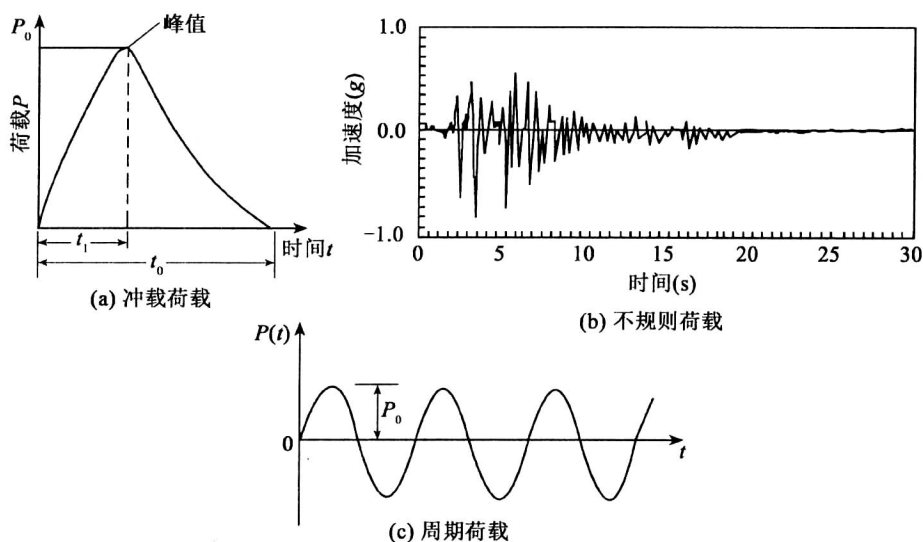


图 7-6 动荷载的类型

土体在动荷作用下的性能不同于静荷作用下的性能,其影响因素除了同样有静力性质,如土的物理、力学性质以及温度等外,还有三个重要因素:①荷载持续时间 t 或动荷重复次数 N (循环效应);②动荷的频率 f (荷载速率效应);③动荷载引起的体系振幅 A (或应变幅值)。

荷载持续时间是指荷载作用于土体形成一定的动应力或应变所需的时间,例如,土中埋炸药进行土石方爆破,荷载时间非常短促,为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ s 的量级。

重复次数是指荷载以一定的周期反复作用在土体上的次数所产生的影响,可称循环效应。如果以每秒钟所重复的次数来度量,则称频率,频率的高低反映了动荷载速率的大小。

振幅值是指土体在动荷作用下产生的振动幅度大小,它导致了动应变幅度大小,反映了土体的动力性状,如动应变幅小于 $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 量级,则土体处于弹性性状;动应变幅大于

等于 $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 量级,则土体处于塑性性状;通常以 10^{-4} 应变量级作为大小应变幅值的界限。

土体在荷载作用下经历了一定时间后,其性状发生变化。如果增(或减)荷载作用,使土体达到某种应力-应变状态的时间在数十秒以上,即荷载的增(或减)十分缓慢,通常按静力问题考虑,反之,则按动力问题处理,这是就载荷持续时间而言。另外,从应变幅值来说,静荷作用引起的应变值大于 10^{-3} 量级时,一般才作为工程问题处理。但是,动荷作用即使产生很小的应变,如 10^{-6} 量级,往往由于重复了若干次,使振动体产生疲劳强度破坏,此种现象在空气压缩机基础上可以见到。因此,有必要按载荷持续时间和重复次数对荷载进行综合分类,见表 7-3。

表 7-3 动荷载作用特点综合分类表

荷载时间 (s) 重复 次数(次) 动力 分类 特点		10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1.0	10	10^2	10^3	10^4	10^5	$\geq 10^6$
		动力问题							静力问题			
1.0	冲击		爆破						建(构)筑物荷载(一次)			
10	波动				地震							
10^2	振动			打桩 强夯								
10^3												
10^4	疲劳				车辆行驶				停车荷载(若干次)			
10^5				动力机器 基础振动								

注:□内为对应于荷载时间段和重复次数段的自然或人为动荷(举例)。

不同的动荷载以不同的方式作用于土体,土的变形和强度特性各异,在工程设计中必须区别对待。在小应变幅情况下,主要是研究土的动弹性模量(或动剪切模量)及阻尼,如在动力机器基础设计中需要提供的地基刚度和阻尼比。在大应变幅情况下,主要研究土的动强度(包括饱和砂土、粉土的液化)和动变形(包括振动压密或震陷),为建筑物抗震计算提供所需的动力参数。

当地基土、特别是饱和松散的砂土和粉土受到动荷载作用(如地震作用)时,地震造成建(构)筑物的破坏,除地震直接引起结构破坏外,还有场地条件的原因,如地震引起的地表错动与地裂、滑坡和土的振动液化等,从而发生地表类似于液体性质而完全丧失抗剪强度的

现象,即振动液化现象,从而发生地表喷水冒砂、振陷、滑坡、上浮及地基失稳等,最终导致建筑物或构筑物的破坏。1976年唐山大地震时,液化区喷水高度达8m,厂房沉降高达1m,很多房屋、桥梁、道路路面结构出现破坏。特别需要指出的是,地震可引起大面积、甚至深层的土体液化,常能造成场地的整体失稳,具有面积广、破坏性严重等特点。因此,土的振动液化问题已成为工程抗震设计中的重要内容之一。

7.2.2 岩土动力参数

7.2.2.1 岩体的动力变形参数

反映岩体动力变形性质的参数通常有动弹性模量、动泊松比及动剪切模量,这些参数均可通过声波测试资料求得:

$$E_d = v_{mp}^2 \rho \frac{(1+\mu_d)(1-2\mu_d)}{1-\mu_d} \quad (7-19)$$

或

$$E_d = 2v_{ms}^2 \rho (1+\mu_d) \quad (7-20)$$

$$\mu_d = \frac{v_{mp}^2 - 2v_{ms}^2}{2(v_{mp}^2 - v_{ms}^2)} \quad (7-21)$$

$$G_d = \frac{E_d}{2(1+\mu_d)} = v_{mp}^2 \rho \quad (7-22)$$

式中, G_d, E_d 分别为岩体的动弹性模量和动剪切模量, GPa; μ_d 为动泊松比; ρ 为岩体密度, g/cm^3 ; v_{mp}, v_{ms} 分别为岩体纵波速度与横波速度, km/s 。

利用声波法测定岩体动力学参数的优点是不扰动被测岩体的天然结构和应力状态,测定方法简便,省时省力,且能在岩体中各个部位进行测试。

从大量的试验资料可知,不论是土层还是岩体,其动弹性模量都普遍大于静弹性模量,两者的比值 E_d/E_{me} ,对于坚硬完整的岩体为 1.2 ~ 2.0;而对风化、裂隙发育的岩体和软弱岩体,该比值较大,一般为 1.5 ~ 10.0,大者可超过 20.0。造成这种现象的原因可能有以下几方面:

(1) 静力法采用的最大应力大部分在 1.0 ~ 10.0 MPa,少数则更大,变形量常以 mm 计,而动力法的作用应力则约为 10^{-4} MPa 量级,引起的变形量微小。因此静力法必然会测得较大的不可逆变形,而动力法则测不到这种变形。

(2) 静力法持续的时间较长。

(3) 静力法扰动了岩体的天然结构和应力状态。

然而,由于静力法试验时,岩体的受力情况接近于工程岩体的实际受力状态,故实践应用中,除某些特殊情况外,多数工程仍以静力变形参数为主要设计依据。由于原位变形试验费时、费钱,这时可通过动、静弹性模量间关系的研究,来确定岩体的静弹性模量。有人提出用如下经验公式:

$$E_{me} = jE_d \quad (7-23)$$

式中, j 为折减系数,可根据岩体完整性系数 K_v 查表 7-4 求取; E_{me} 为岩体静弹性模量。

表 7-4 K_v 与 j 的关系

K_v	1.0 ~ 0.9	0.9 ~ 0.8	0.8 ~ 0.7	0.7 ~ 0.65	<0.65
j	1.0 ~ 0.75	0.75 ~ 0.45	0.45 ~ 0.25	0.25 ~ 0.2	0.2 ~ 0.1

7.2.2.2 土体的动力变形参数

土的动力变形参数包括动弹性模量或动剪切模量、阻尼比或衰减系数,其中,动剪切模量(Dynamic Shear Modulus)和阻尼比(Damping Ratio)是表征土的动力特征的两个主要参数。

土的动剪切模量 G_d 是指产生单位动剪应变时所需要的动剪应力,即动剪应力与动剪应变之比值,按下式计算:

$$G_d = \frac{\tau_d}{\varepsilon_d}$$

(7-24)

土体作为一个振动体系,其质点在运动过程中由于黏滞摩擦作用而有一定能量的损失,这种现象称为阻尼,也称黏滞阻尼。在自由振动中,阻尼表现为质点的振幅随振次而逐渐衰减。在强迫振动中,则表现为应变滞后于应力而形成滞回圈。土的阻尼比 ξ 是指阻尼系数与临界阻尼系数的比值。由物理学可知,非弹性体对振动波的传播有阻尼作用,这种阻尼力作用与振动的速度成正比关系,比例系数即为阻尼系数(Damping Factor),使非弹性体产生振动过渡到不产生振动时的阻尼系数,称为临界阻尼系数。阻尼比是衡量吸收振动能量的尺度。地基或土工建筑物振动时,阻尼有两类,一类是逸散阻尼,另一类是材料阻尼,前者是土体中积蓄的振动能量以表面波或体波(包含剪切波和压缩波)向四周和下方扩散而产生的,后者是土粒间摩擦和孔隙中水与气体的黏滞性产生的。

土动力问题研究应变的范围很大,从精密设备基础振幅很小的振动到强烈地震或核爆炸的震害,剪应变从 10^{-6} 到 10^{-2} 。在这样广阔的应变范围内,土动力计算中所用的特征参数,需用不同的测试方法来确定。

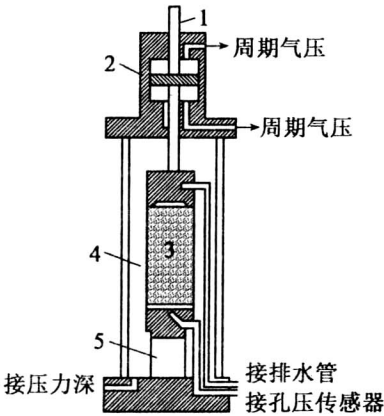
在测定土的动力参数时,必须注意模拟它们的实际动力状况,尤其是动应变幅的大小。表 7-5 给出了土的动力性质随应变幅值不同时所采用的相应测试方法。

土动力测试和其他土工试验一样,尽管原位测试可以得到代表实际土层性质的测试资料,但限于原位试验的条件和较高的试验费用,通常在原位只做小应变试验,而在实验室内则可以做从小应变到大应变的试验。

由于周期加荷三轴剪试验相对比较简单,故一般用土的动力特征参数的室内测定来确定土的动剪切模量 G_d (换算得到)和阻尼比 ξ 。周期加荷三轴试验仪器如图 7-7 所示(由于加荷方式有用电磁激振器激振、气压或液压激振,故周期加荷三轴仪的形式也有多种)。试验时,对圆柱形土样施加轴向周期压力,直接测量土样的应力和应变值,从而绘出应力-应变曲线,如图 7-8 所示,称滞回曲线。

表 7-5 土动力特性测试方法与应变幅值关系

应变幅值		10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹
现 象		波动、振动		开裂、不均匀下沉		压密、滑动、液化	
力学特性		弹性		弹塑性		破 坏	
动力特性参数		弹性(或剪切)模量、泊松比、阻尼系数					内磨擦角、内聚力
原位测定	弹性波法	—————					
	振动试验	—————					
	重复荷载试验	—————					
室内测定	波动法	—————					
	共振柱法	—————					
	动三轴、动扭剪	—————					



1—活塞杆;2—活塞;3—试样;4—压力室;5—压力传感器图
图 7-7 周期加荷三轴仪

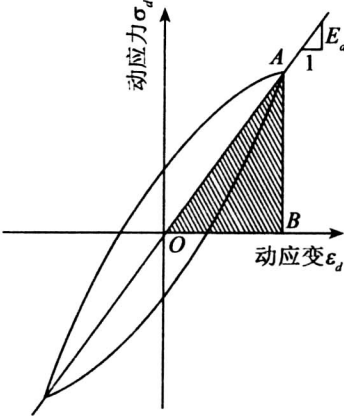


图 7-8 动应力与动应变关系曲线

试验所得滞回曲线是在周期荷载作用下的结果,所以求得的模量称动弹性模量 E_d ,而动剪切模量 G_d 则可由下式求出:

$$G_d = \frac{E_d}{2(1+\mu)} \tag{7-25}$$

式中, μ 为土的泊松比。

土的阻尼比可由图 7-8 所示的滞回圈按下式求得:

$$\xi = \frac{\Delta F}{4\pi F} \tag{7-26}$$

式中, ΔF 为滞回圈包围的面积,表示加荷与卸荷的能量损失; F 为滞回圈顶点至原点的连线与横坐标所形成的直角三角形 AOB 的面积,表示加荷与卸荷的应变能。

另一种测定阻尼比的方法是让土样受一瞬时荷载作用,引起自由振动,量测振幅的衰减规律,用下式求土的阻尼比:

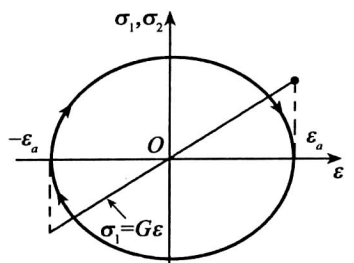
$$\xi = \frac{\omega_r}{2\pi\omega} \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} \quad (7-27)$$

式中: ω_r 、 ω 分别为有阻尼和无阻尼时土样的自由振动频率; U_k 、 U_{k+1} 分别为第 k 和第 $k+1$ 次循环的振幅。

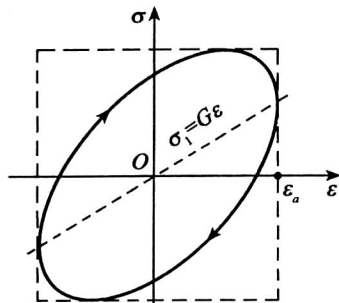
一般 ω_r 与 ω 差别不大,故上式可简化为

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} \quad (7-28)$$

必须指出,在小应变时,把土体作为线弹性体。在周期应力作用下,应力可分解为弹性部分 σ_1 和阻尼部分 σ_2 , 弹性部分的应力和应变成正比,阻尼部分的应力与应变沿椭圆变化,二者相加即为实际的滞回曲线,如图 7-9 所示,当周期应力的幅值增大或减小,滞回圈保持相似的形状扩大或减小。因此,表征动力特征参数的动剪切模量 G_d 和阻尼比 ξ 即可视为常数。而在大应变时,土体呈现非线性变形特性,弹性部分的应力-应变不是直线关系,阻尼部分的应力-应变也不再是椭圆变化,两种非线性变化的曲线合成后的滞回圈的形状随应力的变化而变化(图 7-10),使得动剪切模量 G_d 和阻尼比 ξ 也在不断变化。因此,在动力分析选用动力特性参数时,由于非线性的特点,故应根据具体情况选用相应应力应变条件下的滞回环,从而确定动剪切模量 G_d 和阻尼比 ξ 值。



(a) 弹性部分与阻尼部分



(b) 应力与应变滞回环

图 7-9 线性黏弹性体的应力与应变关系曲线

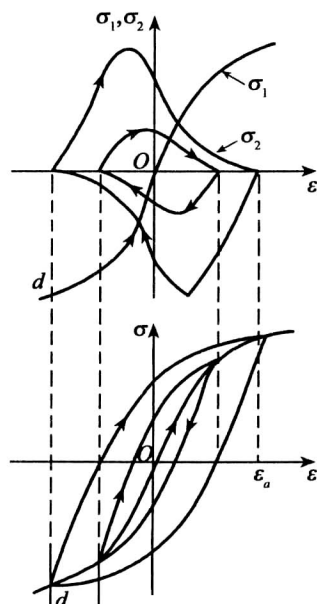


图 7-10 非线性变形体的应力-应变关系曲线

7.2.3 岩土的动力变形特性

一般而论,岩土的动力应力应变关系具有如下特征:

(1)一次循环作用期间的应力应变轨迹线称为滞回曲线。可以证明,滞回环的面积表征一个循环中的能量耗损。随着循环应力水平的逐渐变大,连接滞回环顶点所得直线的斜率越来越小;滞回环所围的面积越来越大(图 7-11)。

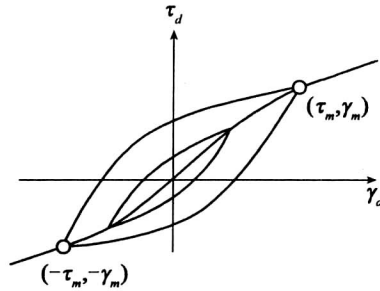


图 7-11 滞回曲线

(2)循环应变水平不同的滞回环顶点,即应力和应变最大值或幅值(τ_m 和 γ_m),落在初始加荷的应力-应变曲线上,这条曲线称为骨架曲线(图 7-12)。

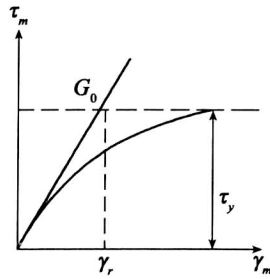


图 7-12 骨架曲线

(3)当应变较大时,荷载循环过程中将产生不断累积的塑性变形,滞回环中心不断朝应变增大的方向移动(图 7-13)。

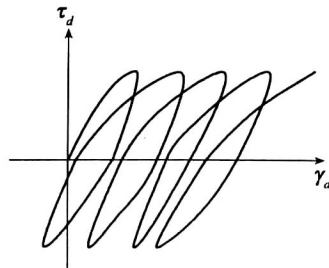


图 7-13 滞回环移动

可见,在循环荷载作用下,土不仅具有非线性,而且具有滞后性和塑性变形累积性。骨架曲线反映了动应力应变关系的非线性;滞回曲线表示某个应力循环内各时刻应力应变之间的关系,反映了应变应力关系的滞后性;滞回环中心的移动反映了塑性变形的累积性。

图 7-14、图 7-15 反映了反复荷载作用下土的变形特性。图 7-14 表示受竖向应力 σ_z 作用下海滩砂振动的一些试验结果。试样的起始相对密实度 $D_r = 0.60$, 荷载作用的频率为 $1.8 \sim 6\text{Hz}$, 由图可知,应变随作用次数的增加而增加,随动应力与竖向应力之比 σ_d/σ_z 值的增加而增加。图 7-15 表示室内条形基础的模型试验,砂土上的模型基础尺寸为 $75\text{mm} \times 228\text{mm}$, 在反复荷载的作用下,砂土的沉降随作用次数的增加而增加,随动应力与单轴抗压强度之比 σ_d/q_u 值的增加而增加。

同样,动荷载的加荷速度,对土的强度与变形也将产生影响。如图 7-15 所示,加荷速度越慢,其强度越低,但承受的应变范围越大。

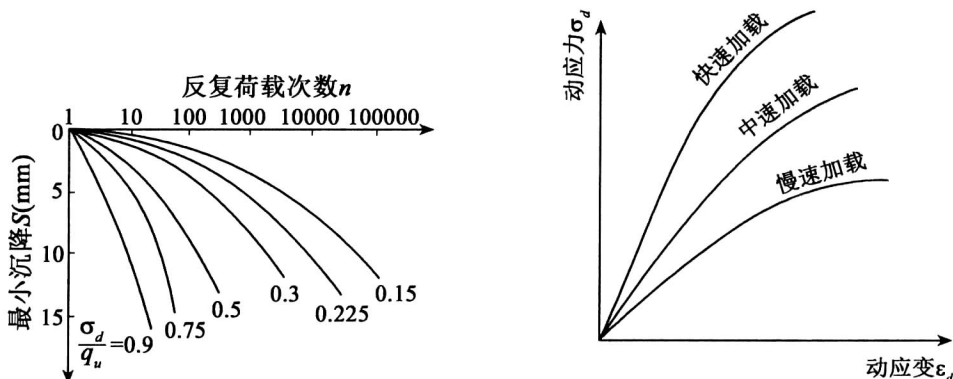


图 7-14 条形基础模型试验中反复荷载引起的塑性变形 图 7-15 加荷速率对土的应力-应变的影响

7.2.4 岩土的动力强度特性

7.2.4.1 动强度概念

土的动强度是指土在动荷载作用下破坏时的应力,而破坏常与动应变相联系。在循环荷载作用下,土的应变将随动应力的增大而增大,随荷载循环次数 N 的增大而增大。因此,欲使试样产生一定的应变,可以采用低循环次数下高的动应力,也可采用高循环次数下低的动应力。通常是针对一定的循环次数确定动强度,循环次数越低,动强度越高;循环次数越高,动强度越低。此外,动强度也与初始静应力有关。初始应力可以用两个变量表示,即参考面上的初始剪应力 τ_0 和初始有效法向应力 σ'_0 。动强度定义为一定循环次数 N 、一定初始剪应力比 $\alpha = \tau_0/\sigma'_0$ 下参考面上初始静应力 τ_0 和动剪应变幅值达到某一数值时的循环剪应力 τ_{df} 之和,即 $\tau_0 + \tau_{df}$ 。显然,如果所规定的破坏应变不同,相应的动强度也就不同。因此,合理地确定破坏应变,是讨论动强度问题的基础。对于黏性土,通常以双幅动剪应变达到 5% 为破坏标准。

在研究土的动强度特性时,必须注意动荷载随时间变化的两种效应,即加荷速率效应和循环效应。一方面,在快速加荷时,土的动强度均大于静强度。随着加荷速率的增大,土的

动强度也增大,而且含水量越大,强度的增大越显著。这种现象不仅出现在黏性土中,而且也发生在无黏性土中。例如,Casagrande 等(1948)进行的曼彻斯特干砂试验和 Seed 等(1954)进行的饱和细砂试验均发现强度增大 15% ~ 20%。另一方面,在循环荷载下,与静强度相比,循环扰动引起强度降低。动强度与静强度相比是增大还是减小,取决于这两种因素的共同作用。

7.2.4.2 动强度曲线

对于特定的土,确定动强度的主要参数有初始剪应力比 $\alpha = \tau_0/\sigma'_0$ 、初始有效应力 σ'_0 、动荷载循环次数 N 、破坏剪应变 γ_d 。为了确定动强度,在动单剪强度试验中,制备若干个相同的试样。首先保持 α 和 σ'_0 不变,分别在不同动剪应力 τ_d 下进行循环荷载试验。为确定 τ_d 大小对试验结果的影响,需要在 5 ~ 7 个 τ_d 下进行试验。然后保持 α 不变,改变 σ'_0 重复上述试验。为确定 σ'_0 对试验结果的影响,需要在 2 ~ 3 个 σ'_0 下进行试验。最后改变 α ,重复上述试验。为确定 α 对试验结果的影响,需要在 2 ~ 3 个 α 下进行试验。

动强度可表示为达到破坏标准时的循环次数 N_f 与动应力比 τ_d/σ'_0 之间的关系,即 τ_d/σ'_0 - $\lg N_f$ 曲线(图 7-16)。在循环次数、初始剪应力比确定后,可以绘出动强度 $\tau_d = \tau_0 + \tau_d$ 与 σ'_0 的关系,并整理出动强度参数(图 7-17)。

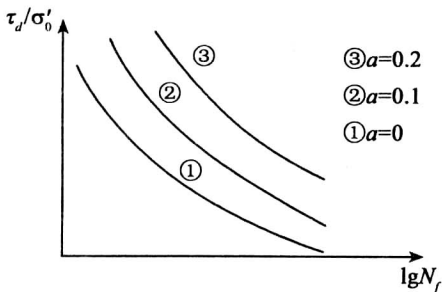


图 7-16 动单剪强度曲线

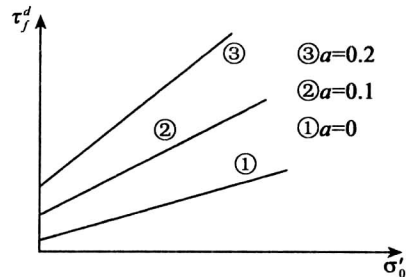


图 7-17 动单剪强度参数

$$\tau_d = a + b\sigma'_0 \quad (7-29)$$

式中,参数 a, b 与 α 之间的关系近似为直线,可表示为

$$a = a_0 + a_1\alpha$$

$$b = b_0 + b_1\alpha$$

式中, a_0, a_1, b_0, b_1 为试验常数。

在动三轴强度试验中,首先保持固结比 $K_c = \sigma_{1c}/\sigma_{3c}$ 和侧向固结压力 σ_{3c} 不变,分别在不同动荷载 σ_d 下进行试验。然后保持 K_c 不变,改变 σ_{3c} 重复上述试验。最后改变 K_c 重复上述试验。动强度可表示为达到破坏标准时的循环次数 N_f 与动应力 f_d 的关系,通常按 45° 面上的动剪应力 $\tau_d = \sigma_d/2$ 与 σ_{3c} 之比对 $\lg N_f$ 作动强度曲线。试验表明, τ_d/σ_{3c} - $\lg N_f$ 曲线随 K_c 的增大而增高(图 7-18)。

根据上述动强度曲线,也可以求出动抗剪强度参数(图 7-19),还可采用另一种方式求出动强度包线与参数。循环次数 N_f 和固结比 K_c 一定时,从曲线上可确定动强度比 τ_d/σ_{3c} ,对于某确定的 σ_{3c} ,由 K_c 计算出 σ_{1c} ,并由 τ_d/σ_{3c} 算出 σ_d 。于是,破坏时的大小主应力分别为

$\sigma_{1f} = \sigma_{1c} + \sigma_d$ 和 $\sigma_{3f} = \sigma_{3c}$, 由此可绘出一个极限应力圆。对不同的 σ_{3c} , 重复上述做法可得若干个极限应力圆, 从而确定出强度包络线及相应的强度参数 c_d 和 φ_d 。根据破坏时的动孔隙水压力 u_d , 还可确定动荷载下土的有效应力强度参数 c'_d 和 φ'_d 。

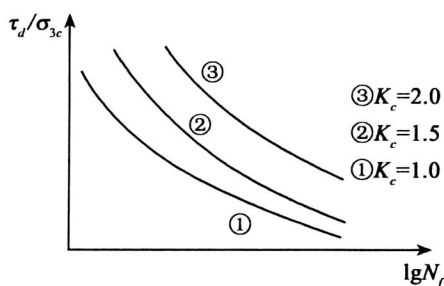


图 7-18 动三轴强度曲线

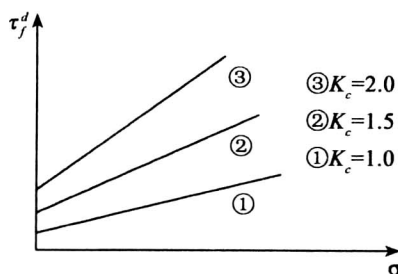


图 7-19 动三轴强度参数

按剪切破坏面确定动强度时, 剪切面上的法向应力包括动应力和静应力。通常以静应力为参数比较方便, 假设单向激振时剪切破坏面 $45^\circ + \varphi'_d/2$ 上的初始有效法向应力为 σ'_{0f} 、初始剪应力 τ_{0f} 、动剪应力 τ_{df} , 可得下列公式:

$$\sigma'_{0f} = \sigma'_0 \pm \tau_0 \sin \varphi'_d \quad (7-30)$$

$$\tau_{0f} = \tau_0 \cos \varphi'_d \quad (7-31)$$

$$\tau_{df} = \tau_d \cos \varphi'_d \quad (7-32)$$

$$\alpha_f = \tau_{0f} / \sigma'_{0f} \quad (7-33)$$

式中, φ'_d 为动有效内摩擦角; σ'_0 , τ_0 和 τ_d 分别为 45° 面上的初始法向应力, 初始剪应力和动剪应力; “ \pm ” 号分别适用于拉、压破坏情况。

动荷载具有时间性, 通常在 10s 以内应作为动力问题; 还具有荷载的反复性 (加卸荷) 或周期性 (荷载变向)。由于动荷载的这两个特性, 使得土在动荷载作用下, 其力学性质与静荷载作用时相比有很大差异。

7.3 土的振动液化

7.3.1 土的振动液化机理及试验分析

土、特别是饱和松散砂土、粉土, 在振动荷载作用下, 土中 (超) 孔隙水压力逐渐累积, 有效应力下降, 当孔隙水压力累积至总应力时, 有效应力为零, 土粒处于悬浮状态, 表现出类似于水的性质而完全丧失其抗剪强度, 这种现象称为土的液化 (Liquefaction)。地震、波浪以及车辆荷载、打桩、爆炸、机器振动等引起的振动力均可能引起土的振动液化。振动力通常可引起无黏性土、低塑性黏性土、粉土、粉煤灰等的振动液化。

根据饱和土的有效应力原理和无黏性土抗剪强度公式 $\tau_f = (\sigma - u) \tan \varphi' = \sigma' \tan \varphi'$, 当有效应力为零, 即抗剪强度为零时, 没有黏聚力的饱和松散砂土就丧失了承载能力, 这就是饱和和砂土振动液化的基本原理。

土的振动液化可由室内试验研究分析,但室内试验必须模拟现场土体实际的受力状态。图 7-20(a)表示现场微单元土体在地震前的应力状态,此时,单元土体的竖向有效应力和水平向有效应力分别分 σ_v 和 $\sigma_h = K_0 \sigma_v$,其中, K_0 为静止土压力系数;图 7-20(b)表示地震作用时单元土体的应力状态,此时,震动引起的往复剪应力 τ_h 作用在单元体上。因此,任何室内研究液化问题的试验都必须模拟这样一种状态,即有不变的法向应力和往复的剪应力作用在土样的某一个平面上。

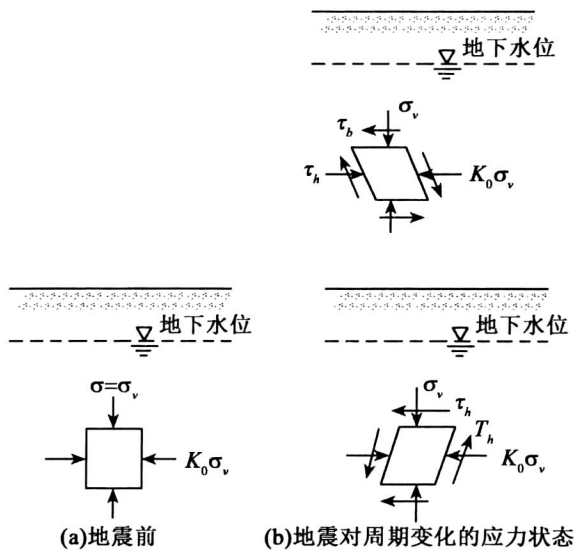


图 7-20 在微单元土体上地震前、后的应力状态

室内研究液化问题的试验方法很多,如周期加荷三轴试验、周期加荷单剪试验等,其中,周期加荷三轴试验是最普遍使用的试验。饱和砂样的室内周期加荷三轴试验的方法是,先给土样施加周围压力 σ_3 完成固结,然后仅在轴向作用大小为 σ_d 的往复荷载,并不允许排水(图 7-21)。在往复加荷过程中,可以测出轴向应变和超孔隙水压力。

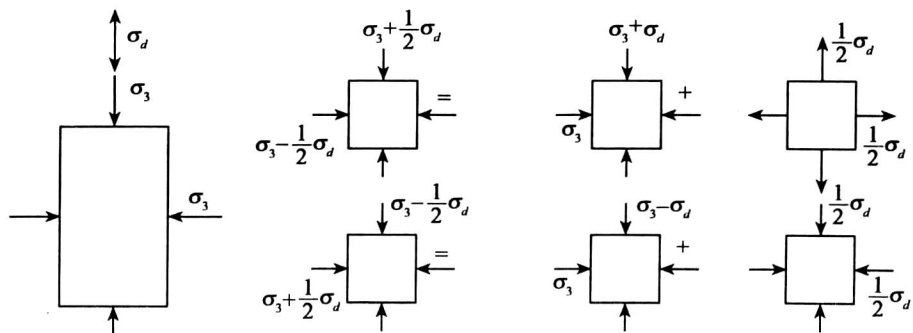


图 7-21 周期三轴试验剪切面上往复应力的模拟

图 7-22 是 H. B. 希得、K. L. 李 (Seed & Lee, 1966) 用饱和砂样做的周期加荷三轴压缩试验典型结果。砂样的初始孔隙比为 0.87, 初始周围压力和初始孔隙水压力分别为 98.1 kPa 和 196.2 kPa, 当周围固结压力 $\sigma_3 = 98.1$ kPa 时, 往复动应力 σ_d 为 38.2 kPa 以 2 周/秒的频率作用在土样上。从图中可以看出, 每次应力循环后都残留一定的孔隙水压力, 随着动应力循环次数的增加, 孔隙水压力累积而逐渐上升直至孔隙水压力等于总应力而有效应力等于零时, 应变突然增到很大, 土体强度骤然下降而发生液化。图 7-23 是上述试验中土样发生液化时的 σ_d 值与往复加荷次数之间的关系曲线, 可以看出, 往复加荷的次数随 σ_d 值的减小而增加。这种试验得到的曲线是土体振动液化分析的基本依据。

试验研究与分析发现, 并不是所有的饱和砂土、低塑性黏土、粉土等在地震时都会发生液化现象, 因此, 必须充分了解影响土液化的因素, 才能做出正确的判断。

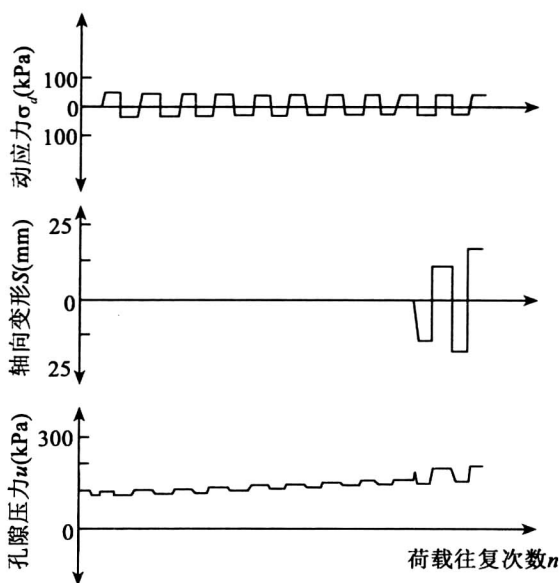
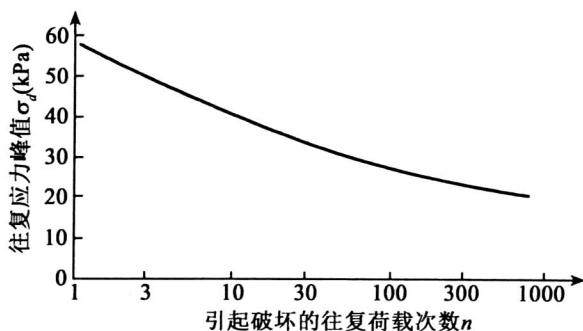


图 7-22 某饱和松散砂样的往复荷载试验



(初始孔隙比, $e = 0.87$, $\sigma_3 = 98.1$ kPa)

图 7-23 某砂样液化时 σ_d 与 n 的关系

7.3.2 影响土液化的主要因素

影响土液化的影响因素众多,其中主要的有土的类型、土的初始密度、初始固结压力、往复应力强度与次数。

7.3.2.1 土的类型

土的类型是影响液化的一个重要因素。黏性土具有黏聚力,即使超孔隙水压力等于总应力,有效应力为零,抗剪强度也不会完全消失,难以发生液化,砾石等粗粒土因为透水性大,超孔隙水压力能迅速消散,不会造成孔隙水压力累积至总应力而使有效应力为零,也难以发生液化;只有没有黏聚力或黏聚力很小且处于地下水位以下的砂土和粉土,由于其渗透系数不大,不足以在第二次振动荷载作用之前把孔隙水压力全部消散,才有可能积累孔隙水压力并使强度完全丧失而发生液化。所以,一般情况下塑性指数高的黏土不易液化,低塑性和无塑性的土易于液化。在振动作用下发生液化的饱和土,一般平均粒径小于 2mm,黏粒含量低于 10%~15%,塑性指数低于 7。

7.3.2.2 土的初始密实度

初始密实度对液化的影响表示在图 7-24 中(周期加荷三轴压缩试验结果)。土中孔隙水压力等于固结压力 σ_3 是产生液化的必要条件,此时定义为初始液化。在大多数场合下,20%的全幅应变值被认为土样已经破坏。对图 7-24(a)中的松砂(初始孔隙比 $e=0.87$,相对密实度 $D_r=0.38$),给定往复应力峰值 σ_d ,初始液化和破坏同时发生;然而,当砂的初始密

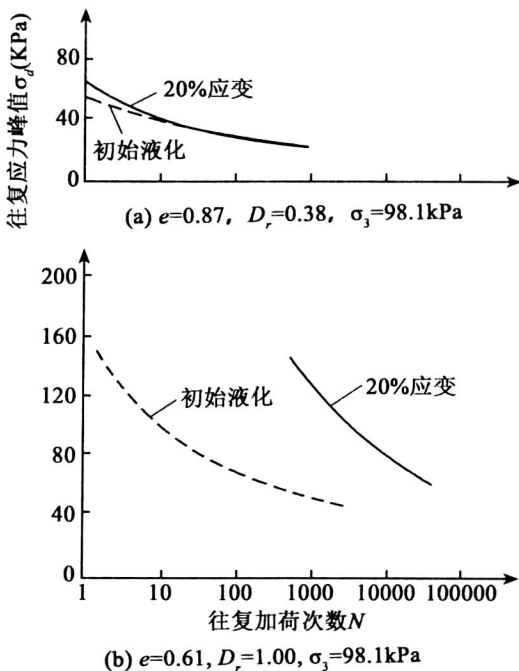


图 7-24 初始密度对某砂液化的影响

实度增加时(初始孔隙比 $e=0.61$, 相对密实度 $D_r=1.0$), 引起 20% 全幅应变和初始液化所需要的往复加荷次数的差别明显增加, 如图 7-24(b) 所示, 这说明, 当土的初始密实度越大, 在振动力作用下, 土越不容易产生液化。1964 年日本新泻地震表明, 相对密实度 $D_r=0.50$ 的地方普遍发生液化, 而相对密度 $D_r>0.70$ 的地方则没有发生液化。我国《海城地震砂土液化考察报告》中也提出了类似的结论。

7.3.2.3 土的初始固结压力

图 7-25 所示为固结压力(周围压力 σ_3) 对液化的影响(周期加荷三轴压缩试验结果), 其中, 图 7-25(a) 表示固结压力对初始液化的影响, 而图 7-25(b) 表示固结压力对 20% 的全幅应变(土样破坏)的影响。从图中可以看出, 对于给定的初始孔隙比($e=0.61$)、初始相对密实度($D_r=1.00$) 和往复应力峰值, 引起初始液化和 20% 全幅应变所需的往复荷载次数都将随着固结压力的增加而增加(对所有的相对密实度都适用)。这说明, 周围压力越大, 在其他条件相同的情况下, 越不容易发生液化。地震前地基土的固结压力可以用土层有效的覆盖压力乘以侧压力系数表示, 因此, 地震时土层埋藏越深, 越不易液化。

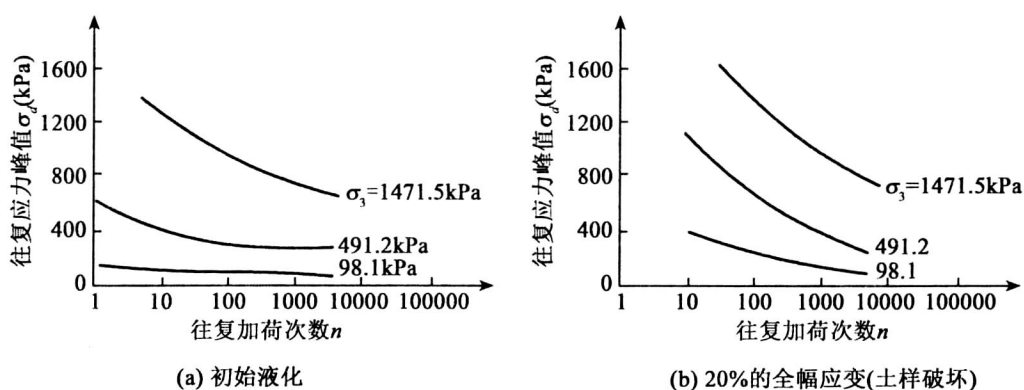


图 7-25 周围压力对某砂样液化的影响

7.3.2.4 往复应力强度与往复次数

图 7-26 是周期加荷单剪仪液化试验的典型结果。从图中可以看出, 对于给定的固结压力 σ_c 和不同相对密实度 D_r , 就同一种土类而言, 往复应力越小, 则需越多的振动次数才可产生液化; 反之, 则在很少振动次数时, 就可产生液化。现场的震害调查也证明了这一点, 如 1964 年日本新泻地震时, 记录到地面最大加速度为 $0.16 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$, 其余 22 次地震的地面加速度变化为 $0.005 \sim 0.12 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$, 但都没有发生液化。同年美国阿拉斯加地震时, 安科雷奇滑坡是在地震开始后 90s 才发生, 这表明要持续足够的应力周期后, 才发生液化和土体失去稳定性。

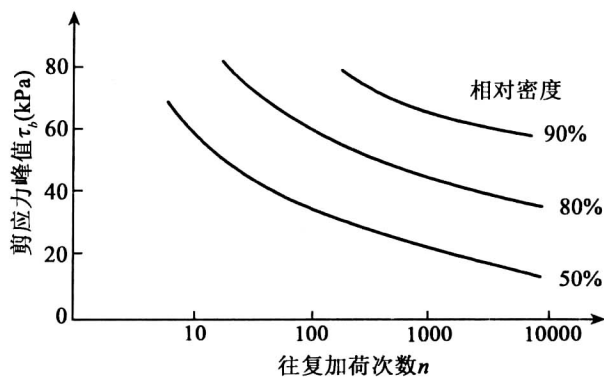


图 7-26 某砂样周期单剪试验的初始液化曲线 ($\sigma_v = 784.8 \text{ kPa}$)

7.3.3 地基液化判别与防治

7.3.3.1 液化的初步判别

在现场的初步勘察阶段和进行地基失效区划时,常利用已有经验,采取对比的方法,把一大批明显不会发生液化的地段勾画出来,以减轻勘察任务,节省勘察时间与费用。这种利用各种界限勾画不液化地带的方法,称为液化的初步判别。我国根据对邢台、海城、唐山等地地震液化现场资料的研究,发现液化与土层的地质年代、地貌单元、黏粒含量、地下水位深度和上覆非液化土层厚度有密切关系。利用这些关系,可进行液化的初步判别。

《建筑抗震设计规范》(GB50011—2010)规定:建筑所在地区遭受的地震影响,应采用相应于抗震设防烈度的设计基本地震加速度和设计特征周期表征,或对已编制抗震设防区划的城市,可按批准的设计地震动参数来表征。抗震设防烈度为 6 度及以上地区的建筑,必须进行抗震设计。

所谓抗震设防烈度(Seismic Fortification Intensity),定义为按国家规定的权限批准作为一个地区抗震设防依据的地震烈度。述及“抗震设防烈度为 6 度、7 度、8 度或 9 度”时,一般略去“抗震设防烈度”字样,简称“6 度、7 度、8 度或 9 度”。

所谓设计基本地震加速度(Design Basic Acceleration of Ground Motion),定义为 50 年设计基准期超越概率 10% 的地震加速度的设计值。抗震设防烈度和设计基本地震加速度取值的对应关系,应符合表 7-6 的规定。这个取值与《中国地震动参数区划图 A1》所规定的“地震动峰值加速度”相当,即在 0.10g 和 0.20g 之间有一个 0.15g 的区域,在 0.20g 和 0.40g 之间有一个 0.30g 的区域,在这两个区域内建筑的抗震设计要求除另有具体规定外,分别与 7 度和 8 度地区相当(表 7-7)。

表 7-6 抗震设防烈度和设计基本地震加速度取值对应关系 (GB50011—2010)

抗震设防烈度	6	7	8	9
设计基本地震加速度值	0.05g	0.10(0.15)g	0.20(0.30)g	0.40g

所谓设计特征周期(Design Characteristic Period of Ground Motion),定义为抗震设计用的地震影响系数曲线中反映地震震级、震中距和场地类别等因素的下降段起始点对应的周期值。建筑的设计特征周期应根据其所在地的设计地震分组和场地类别确定。对 II 类场地,第一组、第二组和第三组的设计特征周期,应分别按 0.35s、0.30s 和 0.45s 采用。

对于饱和的砂土或粉土(不含黄土),当符合下列条件之一时,可初步判别为不液化或可不考虑液化影响:

(1)地质年代为第四纪晚更新世(Q_3)及其以前时,7 度、8 度时可判为不液化土。

(2)粉土的黏粒(粒径小于 0.005mm 的颗粒)含量百分率,7 度、8 度和 9 度分别不小于 10 度、13 度和 16 度时,可判为不液化土(注:用于液化判别的黏粒含量采用六偏磷酸钠作分散剂测定,采用其他方法时应按有关规定换算)。

(3)对天然地基的建筑,当上覆非液化土层厚度和地下水位深度符合下列条件之一时,可不考虑液化影响:

$$d_u > d_0 + d_b - 2 \quad (7-34)$$

$$d_w > d_0 + d_b - 3 \quad (7-35)$$

$$d_u + d_w > 1.5d_0 + 2d_b - 4.5 \quad (7-36)$$

式中, d_w 为地下水位深度(m),宜按设计基准期内年平均最高水位采用,也可按近期内年最高水位采用; d_u 为上覆非液化土层厚度(m),计算时宜将淤泥和淤泥质土层扣除; d_b 为基础埋置深度(m),不超 2m 时应采用 2m; d_0 为液化特征深度(m),对于饱和粉土,7 度、8 度、9 度时,分别取 6m、7m、8m,对于饱和砂土,则分别取 7m、8m、9m。

当初步判别未得到满足,即不能判为不液化土时,需要进行第二步的液化判别。《公路桥涵设计通用规范》(JTGD60—2004)规定:地震动峰值加速度等于 0.10g、0.15g、0.20g、0.30g 地区的公路桥涵,应进行抗震设计。地震动峰值加速度大于或等于 0.40g 地区的公路桥涵,应进行专门的抗震研究和设计。地震动峰值加速度小于或等于 0.05g 地区的公路桥涵,除有特殊要求者外,可采用简易设防。做过地震烈度区划的地区,应按主管部门审批后的地震动参数进行抗震设计。此规定修改了《公路工程抗震设计规范》(JTJ 004—1989)有关公路工程包括桥涵工程的抗震设计,根据《中国地震动参数区划图》(GB18306—2001),不再采用地震基本烈度的概念,取而代之为地震动峰值加速度系数。地震基本烈度与地震动峰值加速度系数之间的关系如表 7-7。

表 7-7 地震基本烈度与地震动峰值加速度系数的对应关系

地震动峰值加速度系数(g)	<0.05	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30	≥0.40
地震基本烈度	<VI	VI	VII	VII	VIII	VIII	IX

经初步判定有可能液化的土层,可通过标准贯入试验(有成熟经验时也可采用其他方法),进一步判定土层是否液化。

7.3.3.2 液化判别方法

1.《建筑抗震设计规范》方法

《建筑抗震设计规范》(GB50011—2010)规定:当初步判别认为需进一步进行液化判别时,应采用标准贯入试验判别法判别地面下 20m 深度范围内土的液化。当饱和的标准贯入锤击数(未经杆长修正)小于液化判别标准贯入锤击数临界值时,应判为液化土;当有成熟经验时,可采用其他判别方法。

在地面下 20m 深度范围内,液化判别标准贯入锤击数临界值可按下式计算:

$$N_{cr}=N_0\beta\left[\ln(0.6d_s+1.5)-0.1d_w\right]\sqrt{\frac{3}{\rho_c}}\quad (7-37)$$

式中, N_{cr} 为液化判别标准贯入锤击数临界值; N_0 为液化判别标准贯入锤击数基准值,应按表 7-8 采用; d_s 为标准贯入点深度(m); d_w 为地下水位深度(m); ρ_c 为黏粒含量百分率,当小于 3 或为砂土时,应采用 3; β 为调整系数,设计地震第一组取 0.80,第二组取 0.95,第三组取 1.05。

表 7-8 液化判别标准贯入锤击数基准值 N_0

设计基本地震加速度(g)	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40
N_0	7	10	12	16	19

2. Seed H. B. 的经验方法

Seed H. B. 以世界各国的资料(包括中国)为基础,提出了地震剪应力比, τ/σ' 与修正标贯击数 N_1 的关系图如图 7-27 所示,在 $(\tau/\sigma')-N_1$ 的关系图中,临界液化剪应力比 $(\tau/\sigma')_c$ 可用直线近似表示为

$$(\tau/\sigma')_c=0.011N_1\quad (7-38)$$

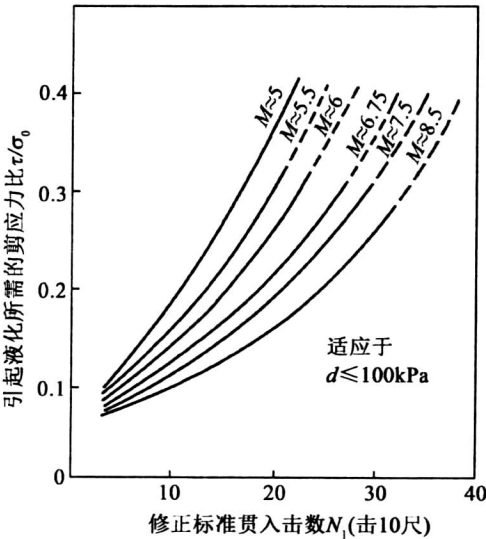


图 7-27 判别砂土液化的 Seed H. B. 经验方法图

土层中的等效地震剪应力比 $(\tau/\sigma')_E$ 按下式计算:

$$(\tau_{av}/\sigma'_v)_E = 0.1(M-1) \frac{a_{\max}}{g} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma'_v} (1-0.015d_i) \quad (7-39)$$

式中, σ'_v 为竖向有效应力 (kPa); σ_v 为竖向总应力 (kPa); N_1 为将竖向有效应力 σ'_v 调整为 100kPa 时的修正标贯击数, 与实测标贯击数 N 的近似关系为 $N_1 = C_N/N$, $C_N = 10\sqrt{\sigma'_v}$; M 为震级; a_{\max} 为地面水平向峰值加速度; g 为重力加速度; d_i 为土层深度 (m)。

当满足下述关系:

$$(\tau_{av}/\sigma'_v)_E > (\tau/\sigma')_{cr} \quad (7-40)$$

时, 判别为液化; 否则, 判别为不液化。应当指出, 式 (7-40) 在 $(\tau/\sigma')_{cr}$ 取值 0.1 ~ 0.3 时有足够精度, 大于 0.3 之后取值偏小, 即偏于安全。

7.3.3.3 液化土层的液化等级划分

对存在液化土层的地基, 应探明各液化土层的深度与厚度。按下式计算每个钻孔的液化指数, 并按表 7-9 综合划分地基的液化等级:

$$I_{LE} = \sum_{i=1}^n (1 - N_i/N_{cr}) d_i W_i \quad (7-41)$$

式中, I_{LE} 为液化指数; n 为在判别深度范围内每一个钻孔标准贯入试验点的总数; N_i 、 N_{cr} 分别为 i 点标准贯入击数的实测值和临界值, 当实测值大于临界值时应取临界值; 当只需要判别 15m 范围内的液化时, 15m 以下的实测值可按临界值采用; d_i 为 i 点所代表的土层厚度 (m), 可采用与该标准贯入试验点相邻的上、下两标准贯入试验点深度差的一半, 但上界不高于地下水位深度, 下界不深于液化深度; W_i 为 i 土层单位土层厚度的层位影响权函数值 (m^{-1}), 当该层中点深度不大于 5m 时应采用 10, 等于 20m 时应采用零值, 5 ~ 20m 时按线性内插法取值。

表 7-9 液化等级与液化指数的对应关系 (GB50011—2010)

液化等级	轻微	中等	严重
液化指数 I_{LE}	$0 < I_{LE} \leq 6$	$6 < I_{LE} \leq 18$	$I_{LE} > 18$

7.3.3.4 地基液化防治

对于可能产生液化的地基, 必须采取相应的工程措施加以防治, 采用桩基础或其他深基础、全补偿筏板基础、箱形基础等防治。当采用桩基时, 桩端伸入液化深度以下稳定土层中的长度 (不包括桩尖部分), 应按计算确定, 且对碎石土、砾、粗、中砂, 坚硬黏性土和密实粉土, 不应小于 0.8m; 对其他非岩石土, 不宜小于 1.5m。采用深基础时, 基础底面应埋入液化深度以下的稳定土层中, 其深度不应小于 0.5m。对于穿过液化土层的桩基础, 桩周摩擦力应视土层液化可能性大小, 全部扣除, 或作适当折减。对于液化指数不高的场地, 仍可采用浅基础, 但适当调整基底面积, 以减小基底压力和荷载偏心; 或者选用刚度和整体性较好的基础形式, 如筏板基础等。

采用地基处理方法防治,可以采用振冲、振动加密、挤密碎石桩、强夯、胶结、设置排水系统等方法处理地基,也可用非液化土替换全部液化土层。加固时,应处理至液化深度下界。振冲或挤密碎石桩加固后,桩间土的标准贯入锤击数不宜小于规范规定的液化判别标准贯入锤击数临界值;采用加密法或换土法处理时,在基础边缘以外的处理宽度,应超过基础底面下处理深度的 $1/2$ 且不小于基础宽度的 $1/5$ 。胶结法包括使用添加剂的深层搅拌和高压喷射注浆,设置排水通道往往与挤密结合起来,材料可以用碎石和砂。

第 8 章 岩土工程问题

迄今为止,岩土工程的设计仍然以强度控制为主。尽管变形控制在某些领域已取得长足的进展,但由于强度计算较变形方便,且符合传统的工程设计习惯,因此岩土工程问题常归结为强度计算问题,常见的岩土工程有三大类,即岩土地基工程、岩土边坡工程和岩土地下工程。

在强度问题中,通常假定岩土体处于平面应变状态,材料是理想刚塑性的,破坏区或破坏面上的材料达到极限平衡状态(Limit Equilibrium State),其极限平衡条件采用 Coulomb-Mohr 准则。为了计算岩土体强度,学者们提出了三种理论,即极限平衡理论(Umited Equilibrium)、滑移线场理论(Slidingline Field)和极限分析理论(Limit Analysis),其中,极限平衡理论是经典岩土力学的重要组成部分,包括三个分支,即挡墙岩土压力、地基极限承载力和边坡稳定分析。

8.1 挡墙岩土压力

挡墙(Retaining Wall)是一种主要承受岩土压力(Earthpressure)的支挡结构物,可分为刚性和柔性两种。所谓刚性挡墙,是指墙体刚度较大,在岩土压力作用下基本不变形或变形很小的挡墙,如砖石、混凝土、钢筋混凝土等材料建筑的重力式挡墙、悬臂式挡墙、扶臂式挡墙。计算这种挡墙上的土压力时,可不考虑墙体变形的影响。柔性挡墙包括支撑墙、板桩墙、锚定板挡墙等,这种挡墙的墙体刚度不大,其变形对土压力大小与分布的影响不可忽略,此时,较为完善的土压力计算需要考虑墙体与填土之间的相互作用。

作用在挡墙上的岩土压力是填土因自重或外荷载作用产生的侧压力。由于岩土压力是作用在挡墙上的主要荷载,因此正确确定岩土压力便成为挡墙设计的关键。通常所求的岩土压力是针对岩土体破坏或处于极限平衡状态而言的,所以岩土压力可视为岩土体强度。关于这方面的研究,1773 年 C. A. Coulomb 提出了计算挡墙岩土压力的滑楔理论;1857 年 W. J. M. Rankine 采用极限平衡条件,从不同途径提出了岩土压力计算公式。此后,Terzaghi 等许多学者对岩土压力计算理论和方法进行了研究,扩展了 Coulomb 理论和 Rankine 的应用范围,并提出了一些新的理论和方法。本节仅简要阐述刚性挡墙岩土压力计算的基本理论。

8.1.1 Rankine 土压力理论

8.1.1.1 主动土压力

Rankine 理论的基本假定是墙背竖直、光滑,填土水平(图 8-1),其基本方法是研究填土

单元的极限平衡。根据上述基本假设,当挡墙静止不动时,可知填土单元的竖向应力 σ_z 为大主应力 σ_1 ,侧压力 σ_x 为小主应力 σ_3 。当挡墙离开填土移动或转动时, σ_1 将保持不变,侧压力逐步减小;到一定程度时达到极限平衡状态,此时的压力称为主动土压力 (Active)。可见,极限平衡时的侧压力 σ_3 ,即为主动土压力强度 p_a 。根据极限平衡条件,即

$$\sigma_3 = \sigma_1 \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

有

$$p_a = \sigma_3 = \sigma_1 K_a - 2c \sqrt{K_a} \quad (8-1)$$

式中, $K_a = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ 称为主动土压力系数; φ 和 c 为土的强度参数。

对于填土表面无超载 (Surcharge) 的情况,式 (8-1) 中的 $\sigma_1 = \gamma z$,这表明土压力沿墙高呈线性分布。如果填土为黏性土,则墙背上部将出现拉裂区,其深度为 z_0 。考虑到拉裂区底 $z = z_0$ 处的土压力为零,由式 (8-1) 可得

$$z_0 = \frac{2c}{\gamma \sqrt{K_a}} \quad (8-2)$$

作用在单位长度挡墙上的土压力合力大小等于图 8-1 中三角形的面积,即

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma (H - z_0)^2 \quad (8-3)$$

其作用点距离墙底

$$y = \frac{1}{3} (H - z_0) \quad (8-4)$$

当填土为多层、表面作用有超载时 (图 8-2),式 (8-1) 仍然成立,只是各层土需采用相应的强度参数。由于土压力呈线性分布,所以只要计算若干控制点处的 σ_1 ,就可确定各点的 p_a 值。根据土压力分布和力矩条件,不难求出合力及其作用点。

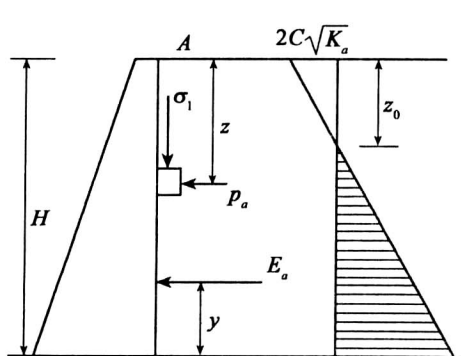


图 8-1 填土单元与土压力对

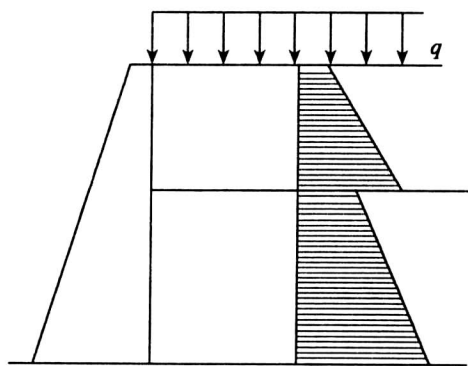


图 8-2 多层填土有超载

8.1.1.2 被动土压力

如果挡墙挤向填土移动或转动,并使填土达到极限平衡状态,则填土作用于挡墙上的压

力称为被动土压力(Passive)。此时,填土单元的竖向应力为小主应力 σ_3 ,而 σ_x 即为被动土压力强度 p_p ,为大主应力 σ_1 。根据极限平衡条件

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + 2c \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

有

$$P_p = \sigma_1 = \sigma_3 K_p + 2c \sqrt{K_p} \quad (8-5)$$

式中, $K_p = \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$, 称为被动土压力系数。剩余的分析与主动土压力类似,只是被动极限状态不可能存在拉裂区。

8.1.2 Coulomb 土压力理论

8.1.2.1 无黏性填土主动土压力

Coulomb 土压力理论假定填土为无黏性土,滑动土楔为刚体,滑动面为通过墙脚的两个平面。图 8-3 所示为填土达到主动极限平衡状态时的情况,其中, ABC 为滑动土楔, AB 和 BC 为滑动面, ε 为墙背倾角, β 为填土表面倾角。

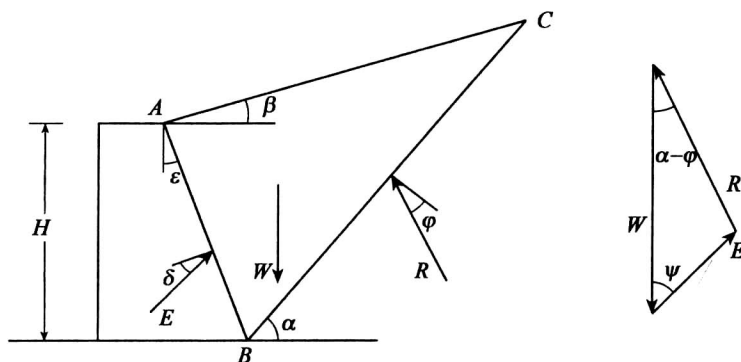


图 8-3 主动土压力

假设滑动面 BC 的倾角为 α ,取单位长度的土楔为脱离体,研究其极限平衡。作用力有土楔重力 W 、不动填土对土楔的作用力 R 以及挡墙对土楔的作用力 E (其反作用力即为土压力)。已知土的内摩擦角为 φ 、墙背与土的摩擦角为 δ , R 和 E 的方向不难确定。这三个力组成封闭三角形,根据正弦定理,有

$$\frac{W}{\sin[180^\circ - (\psi + \alpha - \varphi)]} = \frac{E}{\sin(\alpha - \varphi)} \quad (8-6)$$

其中,

$$\psi = 90^\circ - \varepsilon - \delta \quad (8-7)$$

从而有

$$E = f(\alpha) = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[\frac{\cos(\varepsilon - \alpha) \cos(\beta - \varepsilon) \sin(\alpha - \varphi)}{\cos^2 \varepsilon \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \varphi - \varepsilon - \delta)} \right] \quad (8-8)$$

上式表明土压力 E 是 α 的函数。当 $\alpha = \varphi$ 和 $\alpha = 90^\circ + \varepsilon$ 时, 有 $E = 0$ 。因此, 当 α 在 φ 和 $90^\circ + \varepsilon$ 之间变化时, E 将出现一个极大值 E_{\max} , 此即所求的主动土压力 E_a 。于是, 由

$$\frac{dE}{d\alpha}=0 \quad (8-9)$$

不难得出实际的破坏角 α , 代入式(8-8)得

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (8-10)$$

式中, $K_a=f(\varphi, \delta, \varepsilon, \beta)$ 是主动土压力系数, 其表达式为

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon \cos(\varepsilon + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varepsilon + \delta) \cos(\varepsilon - \beta)}} \right]^2} \quad (8-11)$$

由式(8-10)可知, E_a 可视为墙高 H 的二次函数, 故主动土压力强度 p_a 沿墙高线性变化。 E_a 的作用点 $y=H/3$ 。

8.1.2.2 无黏性填土被动土压力

当墙体产生向着填土方向位移或转动,形成向上挤出的破坏楔体时,填土处于被动极限状态(图 8-4)。

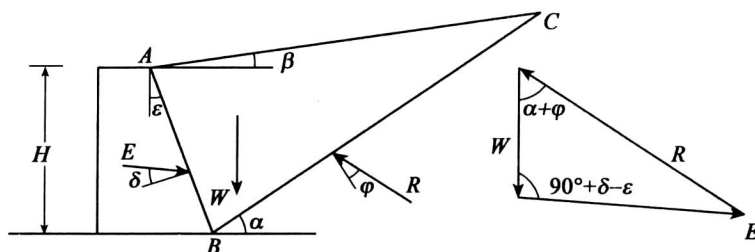


图 8-4 被动土压力

按照推导主动土压力计算公式的类似方法,可得土压力 E 与破坏角 α 之间的关系。 E 的最小值即为被动土压力 E_p 。据此可得

$$E_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_p \quad (8-12)$$

式中, $K_a=f(\varphi, \delta, \varepsilon, \beta)$ 是被动土压力系数, 其表达式为

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi + \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon \cos(\varepsilon - \delta) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varepsilon - \delta) \cos(\varepsilon - \beta)}} \right]^2} \quad (8-13)$$

被动土压力强度 p_p 沿墙高线性变化, E_p 的作用点 $y=H/3$ 。

8.1.2.3 黏性填土主动土压力

挡墙填土最好采用无黏性土,但实际填土一般都具有不同程度的黏性,有时甚至不得不用黏性很大的土。用 Coulomb 理论计算黏性土土压力比较麻烦。

为简便起见,一种方法是只考虑内摩擦角 φ 而不计黏聚力 c 的影响;另一种方法是等值

内摩擦角法,即用下式确定的 φ_D 代替黏性土的 c 和 φ ,按无黏性土计算。

$$\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_D}{2}\right) = \sqrt{\frac{\gamma h_i^2 \tan^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) - 4ch_i \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4c^2}{\gamma}}{\gamma h_i^2}} \quad (8-14)$$

式中, h_i 为计算分层厚度。实践表明,等值内摩擦角法的效果并不好,因此黏性填土的土压力仍是有待研究的课题。

当填土为黏性土时,需考虑黏聚力和填土表面开裂对土压力的影响。若填土的黏聚力为 c ,则填土与墙背之间的黏聚力取 $k=(0.25 \sim 0.5)c$ 。此外,试验表明,当墙体绕墙顶转动时,填土表面不会产生水平位移,而主要是表现为下沉。此时,填土表面不可能产生拉裂。当墙体可能产生水平位移或绕墙底转动时,可按填土表面出现裂缝考虑。以下介绍几种简化计算方法。

1. 图解法(楔体试算法)

如果挡墙的位移很大,足以使黏性土的抗剪强度全部发挥,在填土顶面 z_0 深度处将出现张拉裂缝,引用朗肯土压力理论的临界深度 $z_0=2c\sqrt{\gamma/K_a}$ (K_a 为朗肯主动土压力系数)。

先假设一滑动面 $\overline{BD'}$,如图 8-5(a) 所示,作用于滑动土楔 $A'BD'$ 上的力有:

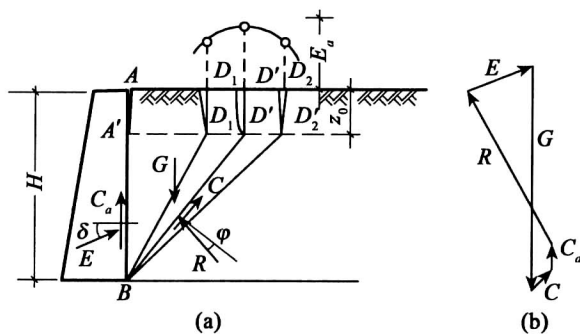


图 8-5 黏性填土土压力图解法

- (1) 土楔体自重 G ;
- (2) 滑动面 $\overline{BD'}$ 反力 R , 与 $\overline{BD'}$ 面法线成 φ 角;
- (3) $\overline{BD'}$ 面上的总黏聚力 $C=c \cdot \overline{BD'}$, c 为填土的黏聚力;
- (4) 墙背与接触面 $A'B$ 的总黏聚力 $C_a=c_a \cdot \overline{BD'}$, c_a 为墙背与填土之间的黏聚力;
- (5) 墙背对土的反力 E , 与墙背法线方向成 δ 角。

在上述各力中, G, C, C_a 的大小和方向已知, R 和 E 的方向已知,但大小未知,考虑到力系平衡,由力矢多边形可以确定 E 的数值,如图 8-5(b) 所示,假定若干滑动面按以上方法试算,其中最大值即为主动土压力 E_a 。

2. 规范推荐公式

按《建筑地基基础设计规范》(GB50007—2011)推荐的公式,采用楔体试算法相似的平

面滑裂面假定,得到黏性土和粉土的主动土压力为

$$E_a = \psi_c \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (8-15)$$

式中, E_a 为主动土压力; ψ_c 为主动土压力增大系数, 土坡高度小于 5m 时取 1.0, 高度为 5 ~ 8m 时取 1.1, 高度大于 8m 时取 1.2; γ 为填土重度 (kN/m^3); H 为挡墙高度 (m); K_a 为规范主动土压力系数, 按下式确定:

$$K_a = \frac{\sin(\alpha' + \beta)}{\sin^2 \alpha' \sin^2(\alpha' + \beta - \varphi - \delta)} \times \{ k_q [\sin(\alpha' + \beta) \sin(\alpha' - \delta) + \sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)] + 2\eta \sin \alpha \cos \varphi \times \cos(\alpha' + \beta - \varphi - \delta) - 2[(k_q \sin(\alpha' + \beta) \sin(\varphi - \delta) + \eta \sin \alpha' \cos \varphi) \times (k_q \sin(\alpha' - \delta) \sin(\varphi + \delta) + \eta \sin \alpha' \cos \varphi)]^{\frac{1}{2}} \} \quad (8-16)$$

$$k_q = 1 + 2q \sin \alpha' \cos \beta / [\gamma H \sin(\alpha' + \beta)] \quad (8-17)$$

$$\eta = \frac{2c}{\gamma H} \quad (8-18)$$

式中, q 为地表均布荷载 (以单位水平投影面上的荷载强度计); φ, c 分别为填土的内摩擦角和黏聚力; α', β, δ , 如图 8-6 所示。

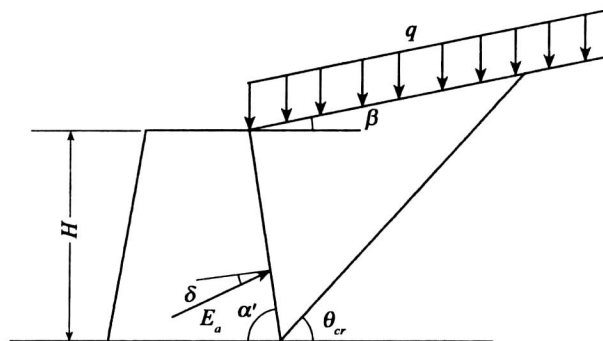


图 8-6 计算简图

3. 无裂缝时的理论解

无裂缝填土时, 库仑主动土压力计算式为 (图 8-7):

$$E_a = \gamma \left(\frac{1}{2} H + h \right) H \lambda \quad (8-19)$$

式中, h 为超载 q 换算为填土的折算高度, 即

$$h = \frac{q \cos \varepsilon \cos \beta}{\gamma \cos(\varepsilon - \beta)} \quad (8-20)$$

λ 为主动土压力系数, 即

$$\lambda = \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{L_1}{H} + \frac{1}{\gamma \left(\frac{H}{2} + h \right) H} \left[\frac{c \sin(\varepsilon + \delta - \beta)}{\cos(\varepsilon + \delta)} \cdot \frac{L_1 L_2}{B} - \frac{c \cos \beta}{\cos(\varepsilon + \delta)} L_1 + \frac{H \sin \varepsilon}{\cos(\varepsilon + \delta)} \left(c + \frac{k}{\cos \varepsilon} \right) \right]$$

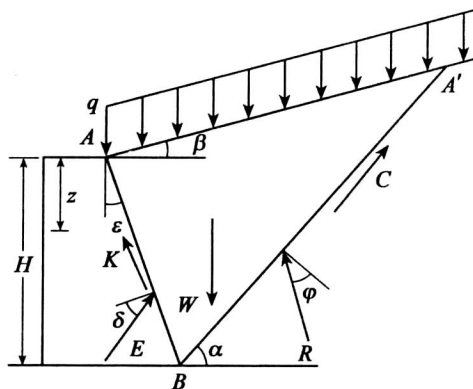


图 8-7 黏性填土主动土压力

其中，

$$L_1 = A_1 + A_2 B \quad (8-21)$$

$$L_2 = A_2 - A_4 B \quad (8-22)$$

$$\frac{B}{H} = A \sqrt{1 + \frac{\frac{2k}{\gamma H}}{I \left(1 + \frac{2h}{H}\right) + J \cdot \frac{2c}{\gamma H}}} \quad (8-23)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{H \sin(\varphi + \delta)}{\cos \varepsilon \cos(\varepsilon + \delta + \varphi - \beta)} \\ A_2 &= \frac{\cos(\varepsilon + \delta)}{\cos(\varepsilon + \delta + \varphi - \beta)} \\ A_3 &= \frac{H \cos(\varepsilon - \beta)}{\cos \varepsilon \cos(\varepsilon + \delta + \varphi - \beta)} \\ A_4 &= \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varepsilon + \delta + \varphi - \beta)} \\ A &= \sqrt{\frac{\cos(\varphi - \beta)}{\cos \varepsilon \cos(\varepsilon + \delta)}} \\ I &= -\frac{\sin(\varphi + \delta) \cos(\varepsilon + \delta) \cos(\varepsilon - \beta)}{\cos \varepsilon \cos(\varepsilon + \delta + \varphi - \beta) \cos \delta} \\ J &= \frac{\cos(\varepsilon - \beta) \cos \varphi}{\cos(\varepsilon + \delta + \varphi - \beta) \cos \delta} \end{aligned} \right\} \quad (8-24)$$

由式(8-19)可知,土压力沿墙高线性分布,作用线与墙面法线成 δ 角,填土面以下深度 z 处的土压力强度为

$$P_{ax} = \gamma(z+h) \lambda \quad (8-25)$$

8.1.2.4 有车辆荷载时的土压力

在进行桥台或路堤挡土墙设计时,应考虑车辆荷载引起的土压力。《公路桥涵设计通用规范》(JTG D60—2004)中规定,按照库仑土压力理论,先将台背或墙背填土的破坏棱体范围内的车辆荷载,用均布荷载 q 或换算为等代土层来代替。当填土面水平($\beta=0^\circ$)时,等代土层厚度 h 的计算公式如下(图 8-8):

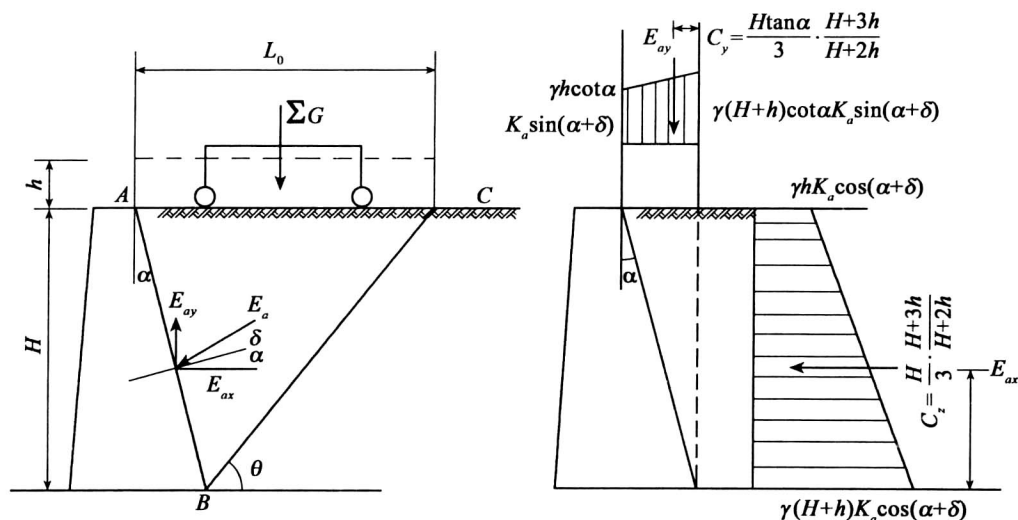


图 8-8 有车辆荷载时的土压力

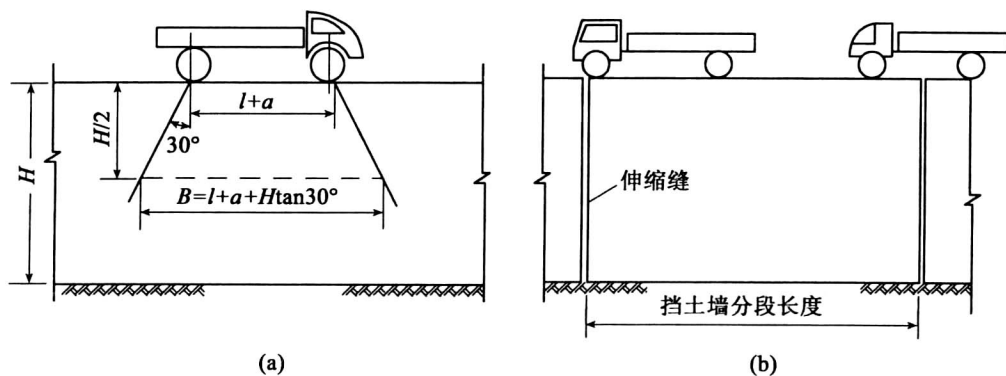
$$h = \frac{q}{\gamma} = \frac{\sum G}{BL_0\gamma} \quad (8-26)$$

式中, γ 为填土的重度 (kN/m^3); $\sum G$ 为布置在 $b \times L_0$ 面积内的车轮的总重量 (kN), 计算挡墙的土压力时, 车辆荷载应横向布置, 车辆外侧车辆中线距路面边缘 0.5m, 计算中涉及多车道加载时, 车轮总重力应进行折减, 详见《公路桥涵设计通用规范》(JTG D60—2004); B 为桥台横向全宽或挡墙的计算长度 (m); L_0 为台背或墙背填土的破坏棱体长度 (m); 对于墙顶以上有填土的路堤式挡墙, L_0 为破坏棱体范围内的路基宽度部分。

挡墙的计算长度可按下列公式计算, 但不应超过挡墙分段长度 (图 8-9(b)):

$$B = 13 + H \tan 30^\circ \quad (8-27)$$

式中, H 为挡墙高度 (m), 对于墙顶以上有填土的挡墙, 为两倍墙顶填土厚度加墙高。


 图 8-9 挡土墙计算长度 B 的计算

当挡墙分段长度小于 13m 时, B 取分段长度, 并在该长度内按不利情况布置轮重。在实际工程中, 挡墙的分段长度一般为 10 ~ 15m, 规范按照汽车(超 20 级)的车辆荷载, 其前后轴距为 12.8m。当挡墙分段长度大于 13m 时, 其计算长度取为扩散长度(图 8-9(a)), 如果扩散长度超过挡墙分段长度, 则取分段长度计算。

关于台背或墙背填土的破坏棱体长度 L_0 , 对于墙顶以上有填土的挡墙, L_0 为破坏棱体范围内的路基宽度部分; 对于桥台或墙顶以上没有填土的挡墙, L_0 可用下式计算(图 8-9):

$$L_0 = H(\tan\alpha + \cot\theta) \quad (8-28)$$

式中, H 为桥台或挡墙的高度; α 为台背或墙背倾斜角, 仰斜时以负值代入, 垂直时 $\alpha=0$; θ 为滑动面的倾斜角, 确定时忽略车辆荷载对滑动面位置的影响, 按没有车辆荷载时计算, 使主动土压力 E 为极大值时最危险滑动面的破裂倾斜角, 当填土面倾斜角 $\beta=0^\circ$ 时, 破坏棱体破裂面与水平夹角 θ 的余切值按下式计算:

$$\cot\theta = -\tan(\alpha + \delta + \varphi) + \sqrt{[\cot\varphi + \tan(\alpha + \delta + \varphi)][\tan(\alpha + \delta + \varphi) - \tan\alpha]} \quad (8-29)$$

其中, α 、 δ 、 φ 分别为墙背倾斜角、墙背与填土间的外摩擦角和填土内摩擦角。

以上求得等代均布土层厚度 h 后, 有车辆时的主动土压力(当 $\beta=0^\circ$)可按下式计算:

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H(H+2h)BK_a \quad (8-30)$$

主动土压力的着力点自计算土层底面起, $Z = \frac{H}{3} \cdot \frac{H+3h}{H+2h}$ 。

8.1.2.5 侧向岩石压力

按《建筑边坡工程技术规范》(GB50330—2002)推荐的公式, 静止岩石压力标准值按下式计算:

$$e_{0ik} = \left(\sum_{j=1}^i \gamma_j h_j + q \right) K_{0i} \quad (8-31)$$

式中, e_{0ik} 为计算点处静止侧压力标准值 (kN/m^2); γ_j 为计算点以上第 j 层岩土的重度 (kN/m^3); h_j 为计算点以上第 j 层岩土的厚度 (m); q 为地面均布荷载 (kN/m^2); K_{0i} 为计算点处的静止侧压力系数。

对于岩石, K_{0i} 按下式计算:

$$K_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (8-32)$$

式中, ν 为岩石的泊松比, 宜采用实测数据或当地经验数据。

对于沿外倾结构面滑动的边坡, 其主动岩石压力合力标准值可按下式计算:

$$E_{ak} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (8-33)$$

$$K_a = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha - \delta + \theta - \varphi_s) \sin(\theta - \beta)} \times [K_q \sin(\alpha + \theta) \sin(\theta - \varphi_s) - \eta \sin \alpha \cos \varphi_s] \quad (8-34)$$

$$K_q = 1 + \frac{2q \sin \alpha \cos \beta}{\gamma H \sin(\alpha + \beta)} \quad (8-35)$$

$$\eta = \frac{2c_s}{\gamma H} \quad (8-36)$$

式中, θ 为外倾结构面倾角($^{\circ}$); c_i 为外倾结构面黏聚力(kPa); φ_i 为外倾结构面摩擦角($^{\circ}$); δ 为岩石与挡墙背的摩擦角($^{\circ}$),取 $(0.33 \sim 0.5)\varphi$ 。

其他符号如图 8-10 所示。

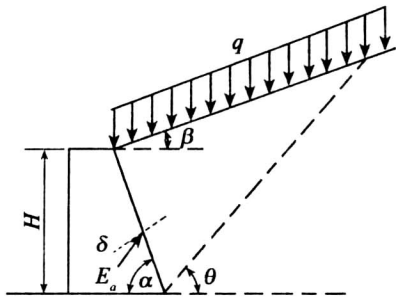


图 8-10 侧压力计算简图

当有多组外倾结构面时,侧向岩石压力应计算每组结构面的主动岩石压力,并取其最大值。

对于支护结构变形有控制要求或坡顶有重要建(构)筑物,可按表 8-1 确定支护结构上侧向岩土压力。

表 8-1 侧向岩土压力修正		
支护结构变形控制要求或坡顶重要建(构)筑物基础位置 a		侧向岩土压力修正方法
土质边坡	对支护结构变形控制严格;或 $a < 0.5H$	E_0
	对支护结构变形控制较严格;或 $0.5H \leq a \leq 1.0H$	$E'_a = \frac{1}{2}(E_0 + E_a)$
	对支护结构变形控制不严格;或 $a > 1.0H$	E_a
岩质边坡	对支护结构变形控制严格;或 $a < 0.5H$	$E'_0 = \beta_1 E_0$ 且 $E'_0 \geq (1.3 \sim 1.4) E_a$
	对支护结构变形控制不严格;或 $a \geq 0.5H$	E_a

注:(1) E_a 为主动岩土压力, E_0 为静止岩土压力; E'_a 为修正主动土压力, E'_0 为岩质边坡修正静止岩石压力;

(2) β_1 为岩质边坡静止岩石压力折减系数,可根据边坡岩体类型按表 8-2 取值;

(3) a 为坡脚到坡顶重要建(构)筑物基础外边缘的水平距离, H 为墙高。

表 8-2 岩质边坡静止侧压力折减系数 β_1				
边坡岩体类型	I	II	III	IV
静止岩石侧压力折减系数 β_1	0.30 ~ 0.45	0.40 ~ 0.55	0.50 ~ 0.65	0.65 ~ 0.85

注:(1) 当裂隙发育时取表中大值,裂隙不发育时取表中小值。

(2) 边坡岩体类型参见《建筑边坡工程技术规范》(GB50330—2002)附录 A。

8.1.3 有关问题说明

8.1.3.1 位移与土压力

作用在挡墙上的实际土压力与许多因素有关,如挡墙的结构型式和刚度、挡墙的位移、墙背的粗糙程度、填土的类型及填挖方式、填土表面荷载以及地下水位等。在诸多因素中,特别需要注意的是挡土墙位移对土压力的影响。

Terzaghi (1929) 在解决挡墙设计问题时,做了模型试验,并提出了挡墙土压力与墙位移之间的关系。结果表明(图 8-11),当墙离开填土位移时,土压力迅速减小;相对位移 Δ/H 为 0.001 ~ 0.005 时,填土达到主动极限平衡状态。当墙移向填土时,土压力迅速增大; Δ/H 为 0.1 ~ 0.05 时,填土达到被动极限平衡状态。此外,墙体位移模式对土压力也有影响。大量实测资料研究表明,主动土压力绕墙顶转动时最大,绕墙底转动时次之,墙体平移时土压力最小。

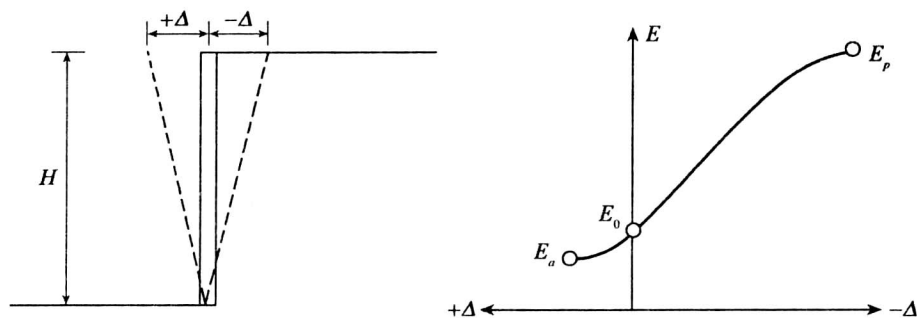


图 8-11 挡墙位移与土压力

通常主动土压力状态较容易实现,所以多按主动土压力计算。实现被动土压力要求很大位移,通常不允许。因此,遇到被动情况时,不能采用全部被动土压力进行设计,一般取 E_p 的 30% 左右。

8.1.3.2 土压力的分布

根据前面阐述的经典理论,土压力沿墙高呈线性分布,而实际情况要复杂得多。Terzaghi (1943) 在《理论土力学》一书中就曾指出土压力分布的非线性特征,此后许多土压力试验、现场观测以及采用水平层分析法进行的理论计算都证实了这一点。通常,当挡墙产生足够的位移而使填土处于极限平衡状态时,土压力分布为三角形;当墙体位移不足以使填土达到极限平衡状态时,土压力呈曲线形分布。此外,土压力强度的最大值通常不在墙底,合力作用点在距墙底 $0.4H$ 左右。

8.1.3.3 滑动面的形状

由于没有考虑挡墙变形的影响,土压力计算的两种经典理论主要适用于刚性挡墙。Rankine 理论严密、概念清楚,但只能处理较为简单的情况。Coulomb 理论的适用范围较广,但也有局限性,如按这种理论算得的被动土压力较实际偏大,这是由于受墙背摩擦的影响,破坏面 BC 并不是平面而是曲面。假定为平面对主动土压力引起的误差一般不大,但对被

动土压力有显著影响,采用对数螺旋面与平面组合滑动面比较合理(图 8-12)。此外,当墙背倾角 ε 较大时,滑动面不会沿墙背 AB 产生,而是发生在土体中,形成所谓第二滑动面 $A'B$ (图 8-13)。

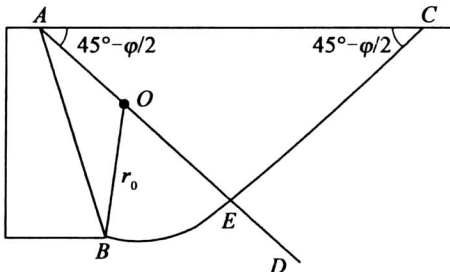


图 8-12 组合滑动面

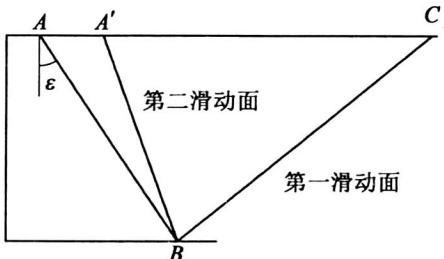


图 8-13 第二滑动面

8.1.3.4 复杂情况的处理

很多情况下,无法得到严密的土压力理论解,只能采用 Coulomb 土压力理论近似处理。各种具体情况的处理方法可参见相关文献。

8.2 岩土地基工程

8.2.1 概述

建筑荷载通过基础传给地基,从而引起地基应力状态的改变并产生变形。当荷载足够大时,可能使地基达到承载力极限状态,即地基因基底压力达到极限承载力而破坏。简单地说,地基承载力(Subgrade Bearing Capacity)就是地基承受外部荷载的能力。最优的设计既能使地基具有足够的安全储备,又能充分发挥地基的承载能力。这就要求准确地确定地基承载力。确定承载力的方法有原位试验法、理论计算法和当地经验法等。

原位试验法(In-situ Testing Method)是一种通过现场直接试验确定承载力的方法,现场直接试验包括(静)载荷试验、静力触探试验、标准贯入试验、旁压试验等,其中,以载荷试验法为最直接、最可靠的方法。理论公式法(Theoretical Equation)是根据岩石的抗剪强度指标以理论公式计算确定承载力的方法。当地经验法(Local Empirical Method)是一种基于地区的使用经验,进行类比判断确定承载力的方法。

在外部荷载作用下,地基的破坏主要表现为剪切破坏(Shear Failure)。对于浅基础来说,地基破坏型式可分为整体剪切(General Shear)、局部剪切(Local Shear)和冲切剪切(Punching Shear)(图 8-14)。

整体剪切破坏型式最早由 Prandtl(1920)提出,其基本特征是:当基底荷载较小时,基底压力与沉降基本上呈直线关系,属于线性变形阶段;当荷载增加到某一数值时,基础边缘处的土开始发生剪切破坏,出现剪切破坏区,也称为塑性区(Plastic Zone);随着荷载的增加,塑性区逐渐扩大,此时压力与沉降之间呈曲线关系,属于弹塑性变形阶段。如果荷载继续增

加,最终在地基中形成延伸到地表的连续滑动面,地基发生整体剪切破坏,此时基础急剧下沉或向一侧倾倒,基础四周的地面同时产生隆起, $p-s$ 曲线出现明显的拐点(图8-14(a)),此点对应的基底压力 P_u 称为极限荷载。

地基局部剪切破坏的概念是由 E. E. De Beer(1943)提出的,这种破坏也是从基础边缘开始,但滑动面不会发展到地面,而是限制在地基内部某一区域。即使基底压力 p 大于按通常方法确定的 p_u ,剪切破坏面也不会延伸至地表,而是塑性变形不断向四周及深层发展。局部剪切破坏时,基础四周地面也有微小的隆起现象,但不会有明显的倾斜和倒塌。此外, $p-s$ 曲线从开始就呈非线性变化,且无明显的拐点(图8-14(b))。

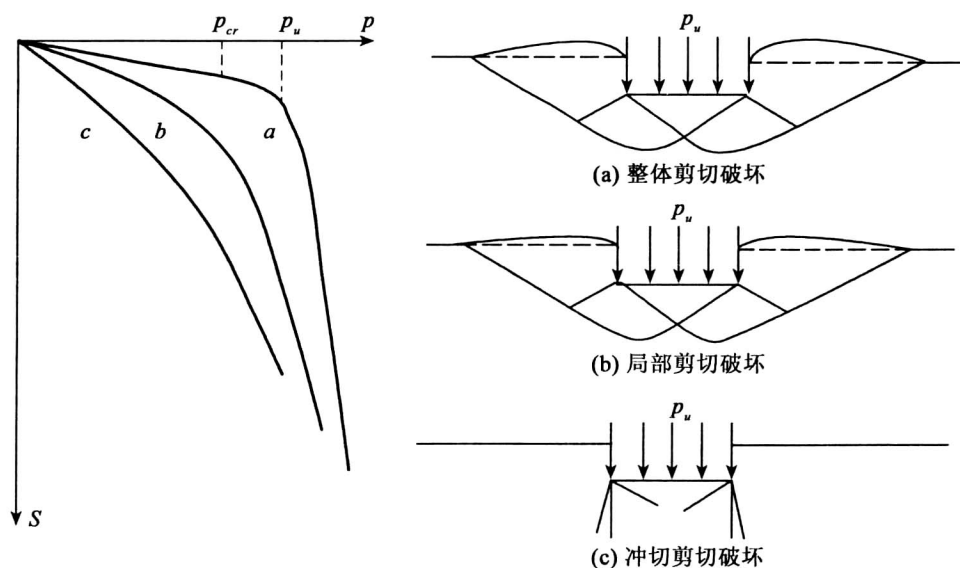


图8-14 地基破坏型式

地基冲切剪切破坏的概念是由 E. E. De Beer 和 Vesic(1958)提出的,其基本特征是:基底压力引起软弱土压缩变形,使基础连续下沉。当荷载继续增加到某一数值时,基础可能向下“切入”土中,基础侧面附近的土体因垂直剪切而破坏。发生这种冲切剪切破坏时,地基中没有出现明显的连续滑动面,基础四周不隆起,基础也没有明显的倾斜。 $p-s$ 曲线从开始就呈非线性变化,且无明显的拐点(图8-14(c))。

地基究竟发生哪种破坏型式,主要与土的压缩性有关。一般地说,密实砂土和坚硬黏土常发生整体剪切破坏;而压缩性较大的地基将会出现局部剪切或冲切剪切破坏。除了地基土的压缩性以外,地基破坏型式还与基础埋深、加荷速率等因素有关。例如,当埋深很大时,坚硬黏土或密砂地基也常产生冲切剪切破坏;而在软黏土地基中快速加荷时,地基土不能产生压缩变形,可能发生整体剪切破坏;当地基为松砂或其他松散结构土层时,不论基础埋深如何,均将发生冲切破坏,但这类地层很少会被选作建筑物地基,故没有多大研究意义。

对于承载力计算方法,L. Prandtl(1920)根据塑性理论研究了刚性冲模压入无重量的半无限刚塑性介质,达到破坏时的滑动面形状和极限压力公式,人们把该解应用到地基极限承

承载力 (Ultimate Bearing Capacity) 问题上。之后,不少学者进行了理论研究,根据不同的假设条件得出各种不同的极限承载力近似计算公式,例如, Terzaghi (1943), C. C. Meyerhof (1951), J. B. Hansen, A. S. Vesic 等人在 Prandtl 的基础上,根据平衡条件得出半经验公式。极限承载力理论方法仅对于平面问题,即均质地基、条形基础、受均布荷载作用且发生整体剪切破坏才是可行的。以下介绍各种理论时,将这些条件作为基本假定不再特别提出,而只说明额外的假定。

对一般岩石地基而言,其岩石强度高于混凝土强度,因此岩石的承载力就显得毫无意义了。然而,我们发现岩石地基的承载力通常与场地的地质构造有紧密联系,本节将主要介绍破碎风化岩体、缓倾结构面岩体、成层岩体及岩溶地基等各种地质条件下的岩石地基承载力确定方法。

8.2.2 地基临界荷载

8.2.2.1 地基塑性区边界方程

假设在均质地基表面上,作用一竖向均布条形荷载 p ,如图 8-15(a)所示,实际工程中的基础一般都有埋深 d ,如图 8-15(b)所示,则条形基础两侧荷载 $q = \gamma_m d$, γ_m 为基础埋置深度范围内土层加权平均重度,地下水位以下取浮重度。因此,均布条形荷载 p 应替换为 p_0 ($p_0 = p - q$)。

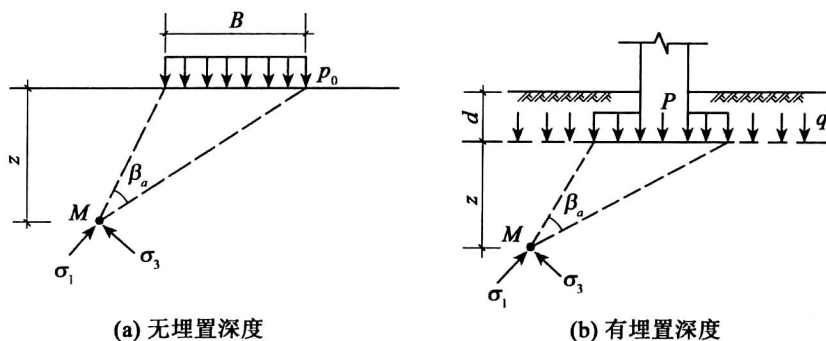


图 8-15 均布条形荷载作用下地基中的主应力

根据弹性理论,它在地表下任一点 M 处产生的大、小主应力可以按下式表达

$$\sigma_1 = \frac{p_0}{\pi} (\beta_0 + \sin \beta_0) \quad (8-37a)$$

$$\sigma_3 = \frac{p_0}{\pi} (\beta_0 - \sin \beta_0) \quad (8-37b)$$

式中, p_0 为均布条形荷载 (kPa); β_0 为任意点 M 到均布条形荷载两端点的夹角 (弧度)。

σ_1 的作用方向与 β_0 角的平分线一致,作用在 M 点的应力,除由基底平均附加压力 p_0 引起的地基附加应力外,还有土自重应力 $q + \gamma z$, γ 为地基持力层土的重度,地下水位以下均取浮重度。

为了推导方便,假设地基土原有的自重应力场的静止侧压力系数 $K_0 = 1$, 具有静水压力性质, 则自重应力场没有改变 M 点附加应力场的大小和主应力的作用方向, 因此, 地基中任意点 M 的大、小主应力可按式表达:

$$\sigma_1 = \frac{p_0}{\pi}(\beta_0 + \sin\beta_0) + q + \gamma z \quad (8-38a)$$

$$\sigma_3 = \frac{p_0}{\pi}(\beta_0 - \sin\beta_0) + q + \gamma z \quad (8-38b)$$

式中, p_0 为基底附加压力, $p_0 = p - \sigma_{ch} = p - \gamma_m h$ (h 为从天然地面算起的基础埋深); q 为基础两侧荷载, $q = \gamma_m d$ (d 为从设计地面算起的基础埋深); γ 为地基持力层土的重度, 地下水位以下用浮重度。

当 M 点应力达到极限平衡状态时, 该点的大、小主应力应满足下式极限平衡条件:

$$\sin\varphi = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 + \sigma_3 + 2c\cot\varphi)} \quad (8-39)$$

将式(8-37)代入上式得

$$z = \frac{p_0}{\gamma\pi} \left(\frac{\sin\beta_0}{\sin\varphi} - \beta_0 \right) - \frac{1}{\gamma} (c\cot\varphi + q) \quad (8-40)$$

此式即为满足极限平衡条件的地基塑性变形区边界方程, 给出了边界上任意一点的坐标 z 与 β_0 角的关系, 如图 8-16 所示。如果荷载 p_0 、基础两侧超载 q 以及 γ 、 c 、 φ 为已知, 则根据此式可绘出塑性区的边界线。

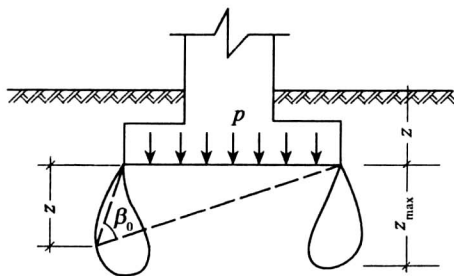


图 8-16 条形基础底面边缘的塑性区

8.2.2.2 弹性极限荷载

弹性极限荷载是指基础边缘地基中刚要出现塑性区时基底单位面积上所承担的荷载, 它相当于地基土中应力状态从压缩阶段过渡到剪切阶段时的界限荷载。根据地基塑性区边界方程, 即可导出地基弹性极限荷载。

随着基础荷载的增大, 在基础两侧以下土中塑性区对称地扩大。在一定荷载作用下, 塑性区的最大深度 z_{\max} (图 8-16) 可由 $dz/d\beta_0$ 的条件求得:

$$\frac{dz}{d\beta_0} = \frac{p_0}{\gamma\pi} \left(\frac{\cos\beta_0}{\sin\varphi} - 1 \right) = 0$$

则有

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

将它代入式(8-38), 得出 z_{\max} 的表达式为

$$z_{\max} = \frac{p_0}{\gamma \pi} \left(\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{\gamma} (c \cot \varphi + q) \quad (8-41)$$

当荷载 p_0 增大时, 塑性区就发展扩大, 塑性区的最大深度也增大。根据定义临塑荷载为地基刚要出现塑性区时的荷载, 即 $z_{\max} = 0$ 时的荷载, 则令式(8-41)右侧为零, 可得临塑荷载 p_{cr} 的公式如下:

$$p_{cr} = \frac{\pi (c \cot \varphi + q)}{\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + q \quad (8-42a)$$

或

$$p_{cr} = c N_c + q N_q \quad (8-42b)$$

式中, N_c 、 N_q 为承载力系数, 均为 φ 的函数:

$$N_c = \frac{\pi c \cot \varphi}{\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}}$$

$$N_q = \frac{\cot \varphi + \varphi + \frac{\pi}{2}}{\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}}$$

从式(8-42a), 式(8-42b)可看出, 临塑荷载 p_{cr} 由两部分组成, 第一部分为地基土黏聚力 c 的作用, 第二部分为基础两侧超载 q 或基础埋深 d 的影响, 这两部分都是内摩擦角 φ 的函数, p_{cr} 随 φ 、 c 、 q 的增大而增大。

8.2.2.3 临界荷载

临界荷载是指允许地基产生一定范围塑性区所对应的荷载。工程实践表明, 采用不允许地基产生塑性区的临塑荷载 p_{cr} 作为地基容许承载力的话, 往往不能充分发挥地基的承载能力, 取值偏于保守。对于中等强度以上地基土, 将控制地基中塑性区较小深度范围内的临界荷载作为地基容许承载力或地基承载力特征值, 可使地基既有足够的安全度, 保证稳定性, 又能比较充分地发挥地基的承载能力, 从而达到优化设计, 减少基础工程量, 节约投资的目的, 符合经济合理的原则。允许塑性区开展深度的范围大小与建筑物的重要性、荷载性质和大小、基础形式和特性、地基土的物理力学性质等有关。

根据工程实践经验, 在中心荷载作用下, 控制塑性区最大开展深度 $z_{\max} = b/4$, 在偏心荷载下控制 $z_{\max} = b/3$, 对一般建筑物是允许的。 $p_{1/4}$ 、 $p_{1/3}$ 分别是允许地基产生 $z_{\max} = b/4$ 和 $b/3$ 范围塑性区所对应的两个临界荷载, 此时, 地基变形会有所增加, 必须验算地基的变形值不超过允许值。

根据定义, 分别将 $z_{\max} = b/4$ 和 $z_{\max} = b/3$ 代入式(8-41)得

$$p_{1/4} = \frac{\pi (c \cot \varphi + q + \gamma b/4)}{\cot \varphi + \varphi - \pi/2} + q \quad (8-43a)$$

或

$$p_{1/4} = c N_c + q N_q + \gamma b N_{1/4} \quad (8-43b)$$

$$\text{和} \quad p_{\frac{1}{3}} = \frac{\pi(c \cot \varphi + q + \gamma b/3)}{\cot \varphi + \varphi - \pi/2} + q \quad (8-44a)$$

$$\text{或} \quad p_{\frac{1}{3}} = cN_c + qN_q + \gamma bN_{\frac{1}{3}} \quad (8-44b)$$

式中, $N_{\frac{1}{4}}$ 、 $N_{\frac{1}{3}}$ 为承载力系数, 均为 φ 的函数:

$$N_{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{4 \left(\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$N_{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3 \left(\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)}$$

从式(8-43b)、式(8-44b)可以看出, 两个临界荷载由三部分组成, 第一、二部分分别反映了地基土黏聚力和基础埋深对承载力的影响, 这两部分组成了临塑荷载, 第三部分表现为基础宽度和地基土重度的影响、实际上受塑性区开展深度的影响, 它们都随内摩擦角 φ 的增大而增大, 其值可从公式计算得到。分析临界荷载的组成, 随 c 、 φ 、 q 、 γ 、 b 的增大而增大。

8.2.3 无重介质承载力公式

8.2.3.1 基本假定

假定地基土无重量($\gamma=0$), 基础底面光滑。地基发生整体剪切破坏时, 滑动区域由 Rankine 主动区 I、径向剪切区 II 和 Rankine 被动区 III 所组成(图 8-17), 其中, Rankine 主动区和被动区的边界为直线, 考虑到基础底面为大主应力面, 基础两侧地表面为小主应力面, 则上述边界直线与水平面的夹角分别为 $\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$ 和 $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ 。径向剪切区的边界为对数螺旋线, 其中心点为 O , 曲线方程为

$$r = r_0 e^{\theta \tan \varphi} = r_0 \exp(\theta \tan \varphi) \quad (8-45)$$

式中, r_0 为起始半径, 即 $\theta=0$ 时的 r 。

8.2.3.2 无超载情况

求解上述整体剪切破坏时的极限荷载 p_u 就是 Prandtl 课题, Prandtl 用塑性力学方法求得解析解, 这里采用极限平衡分析求解, 取对数螺旋曲线所涉及的区域为脱离体。根据图 8-17 所示几何关系, 不难求得 r_0 , ab 和 cd 段的长度。在 $\gamma=0$ 的情况下, 根据极限平衡条件, 可确定主动区土压力 p_a 和被动区土压力 p_p 在对数螺旋曲线上, 法向应力和摩擦力的合力作用线与法线成 φ 角, 而这作用线正是对数螺旋线的径向线, 通过螺旋线的中心 O , 故其力矩为零。对 O 点取力矩平衡, 可得

$$p_u = \frac{c}{\tan \varphi} \left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \tan \varphi) - 1 \right] \quad (8-46)$$

式中, c_u 为土的强度参数。

对于饱和黏土地基, 在 $\varphi_u=0$ 条件下, p_u 为不定式。应用数学中的罗必塔法则, 得

$$p_u = (\pi + 2) c_u = 5.14 c_u \quad (8-47)$$

式中, c_u 为不排水强度。

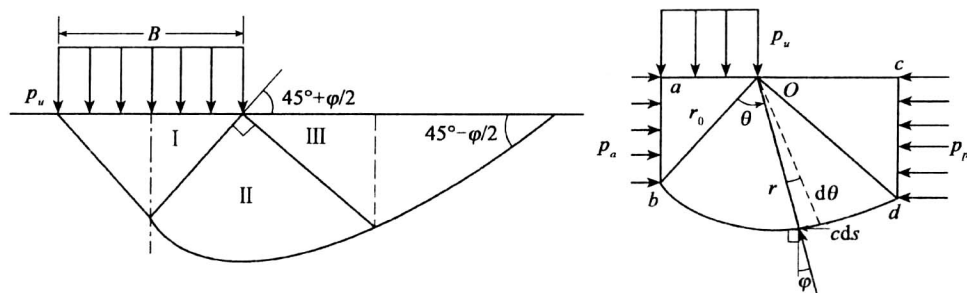


图 8-17 无重介质无超载情形

根据式(8-46),砂土地基($c=0$)的极限承载力为零。这个结论显然是不合理的,其原因在于假定了土的重度为零。

8.2.3.3 有超载情况

Prandtl 课题没有考虑基础埋深, H. Reissner (1924) 对此提出了修正。他将基底以上基础两侧土的影响用连续均布超载 $q = \gamma_0 d$ (γ_0 为基底以上基础两侧土重度的加权平均值, d 为基础埋深) 来代替, 而不考虑这部分土的抗剪强度对承载力的影响(图 8-18)。通过与前面类似的分析, 不难推导出极限承载力公式:

$$p_u = qN_q + cN_c \quad (8-48)$$

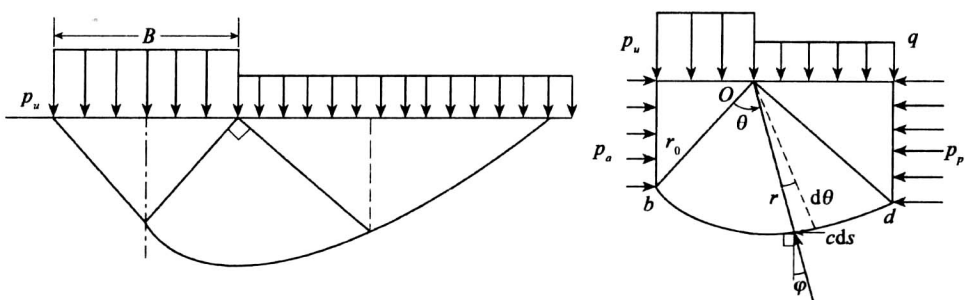


图 8-18 无重介质有超载

式中, N_q, N_c 是 φ 的函数, 称为地基承载力系数, 表达式为

$$N_q = \exp(\pi \tan \varphi) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (8-49)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi \quad (8-50)$$

由于式(8-48)没有考虑地基土的重量、基础两侧土的抗剪强度以及基底的粗糙等因素对承载力的影响, 计算结果与实际仍有较大出入。

8.2.4 Terzaghi 承载力公式

8.2.4.1 基本假定

Terzaghi 在推导极限承载力公式时假定: ①地基土有重量; ②基础底面粗糙; ③基础两

侧土体的影响用均布超载 $q = \gamma_0 d$ 来代替,而不考虑其抗剪强度的影响;④在极限荷载条件下,基础发生整体剪切破坏;⑤假定地基中滑动面的形状如图 8-19 所示。

由于基底与地基土之间存在摩擦,所以基底下有一部分土体将随着基础一起移动而处于弹性平衡状态,该部分土体称为弹性楔体即 I 区。作为滑动面的一部分,弹性楔体的边界是曲面,为计算简便,假定其为平面,与水平面的夹角 ψ 介于 φ 与 $45^\circ + \varphi/2$ 之间。滑动区域由径向剪切区 II 和 Rankine 被动区 III 组成,其中,滑动区域 II 的边界为对数螺旋曲线(图 8-19)。

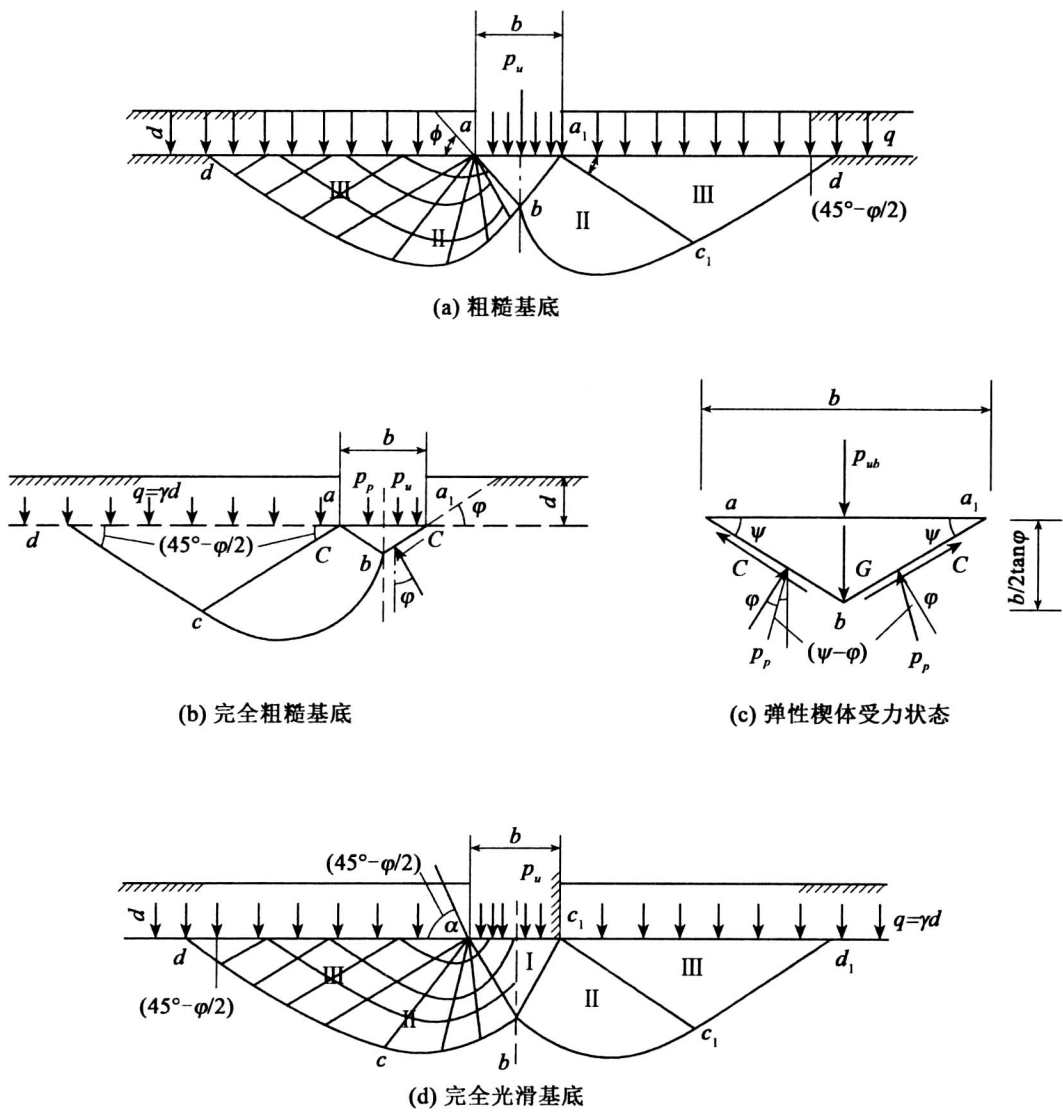


图 8-19 太沙基承载力解

8.2.4.2 一般公式

取弹性楔体为脱离体,分析其受力状态。在弹性楔体上受到下列荷载作用:弹性楔体的自重 W 、基底面上的极限荷载 $p_u b$ 、弹性楔体两边界面上的黏聚力 c 以及弹性楔体两边界面上的被动土压力 P_p ,其中, P_p 是由土的黏聚力 c 、超载 q 和重度 γ 引起的,Terzaghi 假定

$$P_p = \frac{b}{2 \cos^2 \varphi} \left(ck_{pc} + qk_{pq} + \frac{1}{4} \gamma b \tan \varphi k_{py} \right) \quad (8-51)$$

式中, k_{pc}, k_{pq}, k_{py} 为被动土压力系数。

由竖直方向的平衡条件可得

$$p_u = \frac{1}{2} \gamma b N_\gamma + q N_q + c N_c \quad (8-52)$$

式中,承载力系数 N_γ, N_q, N_c 是 φ 和 ψ 的函数,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} N_q &= \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \exp \left[\left(\frac{3}{2} \pi + \varphi - 2\psi \right) \tan \varphi \right] \\ N_c &= \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi \sin \varphi} \left\{ (1 + \sin \varphi) \exp \left[\left(\frac{3}{2} \pi + \varphi - 2\psi \right) \tan \varphi \right] - 1 \right\} \\ N_\gamma &= \frac{1}{2} \tan \psi \left[\frac{K_{py} \cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi \cos \varphi} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-53)$$

N_γ 中的被动土压力系数 k_{py} 需由试算确定。

8.2.4.3 基底完全粗糙

式(8-53)中的 ψ 未定,当基底完全粗糙即 $\psi = \varphi$ 时,有

$$\begin{aligned} N_q &= \frac{\exp[(3\pi/2 - \varphi)]}{2 \cos^2(45^\circ + \varphi/2)} \\ N_c &= (N_q - 1) \cot \varphi \\ N_\gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_{py}}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) \tan \varphi \end{aligned} \quad (8-54)$$

8.2.4.4 基底完全光滑

当基底完全光滑时, $\psi = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$ 。此时,弹性楔体不再存在,而成为 Rankine 主动区,且整个滑动区域与 Prandtl 假定完全相同, N_q, N_c 也与式(8-43)和式(8-44)相同。对于 N_γ , Terzaghi 和 Peck(1967)建议改由下列半经验公式计算:

$$N_\gamma = 1.8 (N_q - 1) \tan \varphi \quad (8-55)$$

8.2.5 Meyerhoff 承载力公式

Terzaghi 极限承载力理论忽略了基础两侧土的强度对承载力的影响。为了弥补这一不足,Meyerhoff 将滑动面延伸到地表(图 8-20)。为简化分析,假定:①基底光滑,滑动面由直线 AC 、对数螺旋线 CD 和直线 DE 组成;②作用在 BE (与水平面成 β 角)上的合力由等代应力 σ_0, τ_0 代替;③基础侧面法向应力 σ_a 按静止土压力分布,即 $\sigma_a = K_0 \gamma d/2$,而切向应力 $\tau = \sigma_a \tan \delta$,其中 K_0 为土的静止侧压力系数, d 为基础埋深, δ 是基础与侧土间的摩擦角。

Meyerhoff 根据上述假定,分两步确定地基的极限承载力:①黏聚力 c 和超载 (σ_0, τ_0) 对应的承载力;②地基土重度 γ 对应的承载力。然后将两部分叠加起来,可得

$$P_u = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \sigma_0 N_q + c N_c \quad (8-56)$$

其中,

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \gamma d \left(K_0 \sin^2 \beta + \frac{1}{2} K_0 \tan \delta \sin 2\beta + \cos^2 \beta \right) \quad (8-57)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \gamma d \left(\frac{1-K_0}{2} \sin 2\beta + K_0 \tan \delta \sin^2 \beta \right) \quad (8-58)$$

$$N_q = \frac{(1 + \sin \varphi) \exp(2\theta \tan \varphi)}{1 - \sin \varphi \sin(2\eta + \varphi)} \quad (8-59)$$

$$N_c = (N_g - 1) \cot \varphi \quad (8-60)$$

$$N_{\gamma} = \frac{4P_p \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\gamma B^2} - \frac{1}{2} \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (8-61)$$

$$P_p = \frac{P_1 L_1 + W_1 L_2}{L_3} \quad (8-62)$$

上述各式中符号 $\eta, P_1, W, L_1, L_2, L_3$ 的意义如图 8-20 所示。被动土压力 P_p 和 P_1, W 是在任意假定对数螺旋线中心点 O 及其相应滑动面的情况下得到的。为了求得最危险的滑动面及其相应 P_p 的最小值, 必须假定多个对数螺旋线中心和滑动面进行试算。

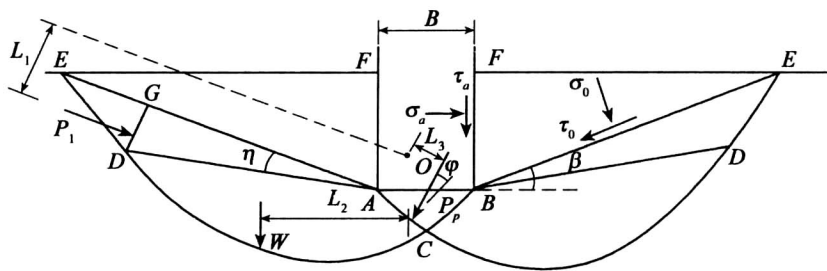


图 8-20 Meyerhoff 极限承载力分析

8.2.6 岩基承载力

相对于土体,完整岩体具有更高的抗压、抗剪强度以及更大的变形模量,因此,一般岩石地基具有承载力高和压缩性低的特点,对于一般的工业和民用建筑,是一种极为良好的地基。我国地域辽阔,但山区多而平原少,很多地区基岩完全出露于地面或浅埋于地面,随着山区高层建筑、水利、道桥建设的发展,对岩石地基的研究引起越来越多的重视。

自然界中的岩体是岩块与各种节理、裂隙及其填充物组成的复合体。岩石地基经常遇到各种不良地质现象,如滑坡、断层、岩溶等,以及受自然界中风化等各种物理化学作用的影响,从而对不良地基上的建筑物构成直接或潜在的威胁。因此,对岩石地基,在设计前,必须

首先进行工程地质及岩体质量评价。影响岩石地基工程性质的主要因素有岩石质量、岩体的完整性以及水对岩石的影响,其中,岩石质量是指岩石的强度和变形的特征,目前通用的表示方法包括岩石单轴抗压强度、模量比及点荷载强度,岩体的完整性是对岩体内节理、不连续结构面的描述,国内通常用 RQD 指标进行量化评价。水对岩石地基的影响主要表现在降低岩石强度方面。

岩石地基承载力可按经验式计算,也可根据室内饱和单轴抗压强度按规范公式确定。更为准确的方法是按现场岩体荷载试验确定。

8.2.6.1 岩石地基承载力经验公式

太砂基公式:

$$P_u=0.5\gamma b(k^6-1)+5ck^4+qk^5 \tag{8-63}$$
$$k=\tan\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$$

式中, c,φ 为岩体的黏结力与内摩擦角; γ 为岩体重度; b 为基础的底宽; q 为基础旁侧荷载, $q=\gamma_0d(d$ 基础埋深)。

科茨公式:

$$P_u=0.5\gamma bk^6+c(k^4-1)\cot\varphi+qk^4 \tag{8-64}$$

式中符号同前。

由于上述计算进行了大量假设,其计算结果误差较大,仅作为岩石地基承载力的初设置。

8.2.6.2 根据《建筑地基基础规范》(GB50007—2011)确定

对于完整、较完整和较破碎的岩石地基承载力特征值,可根据室内饱和单轴抗压强度按下式计算:

$$f_a=\psi_r\cdot f_{rk} \tag{8-65}$$

式中, f_a 为岩石地基承载力特征值(kPa); f_{rk} 为岩石饱和单轴抗压强度标准值(kPa); ψ_r 为折减系数,根据岩体完整程度以及结构面的间距、宽度、产状和组合,由地区经验确定。无经验时,对完整岩体可取0.5,对较完整岩体可取0.2~0.5,对破碎岩体可取0.1~0.2。

值得注意的是,上述折减系数值未考虑施工因素及建筑物使用后风化作用的继续的影响,对于黏土质岩,在确保施工期及使用期不致遭水浸泡时,也可采用天然湿度的试样,不进行饱和处理。

对破碎、极破碎的岩石地基承载力特征值,可根据地区经验取值;无地区经验时,可根据平板载荷实验确定。

岩体完整程度应按表 8-3 划分为完整、较完整、较破碎、破碎和极破碎。当缺乏试验数据时可按表 8-4 执行。

表 8-3 岩体完整程度划分

完整程度等级	完整	较完整	较破碎	破碎	极破碎
完整性指数	>0.75	0.75~0.55	0.55~0.35	0.35~0.15	<0.15

表 8-4 岩体完整程度划分(缺乏试验数据)

名称	结构面组数	控制性结构面平均间距(m)	代表性结构类型
完整	1~2	>1.0	整状结构
较完整	2~3	0.4~1.0	块状结构
较破碎	>3	0.2~0.4	镶嵌状结构
破碎	>3	<0.2	碎裂状结构
极破碎	无序	-	散体结构

8.2.6.3 岩体现场荷载试验确定

荷载试验方法是,对浅基础采用直径为 30cm 的圆形刚性承压板,当岩石埋藏深度较深时,可采用钢筋混凝土桩,但桩周需采取措施以消除桩身与土之间的摩擦力。在试验过程中,荷载分级施加,同时量测沉降值 s ,荷载应增加到不少于设计要求的两倍。由试验结果绘制的荷载与沉降关系曲线(p - s)确定比例界限和极限荷载, p - s 曲线上起始直线段的终点为比例极限,符合终止加载条件的前一级荷载即为极限荷载。

承载力的取值分两种情况:对微风化岩及强风化岩,取极限荷载除以安全系数(安全系数为 3);对中等风化岩,需根据岩石裂隙发育情况确定,与比例界限荷载比较,取二者中之小值。参加统计的试验点不应少于 3 个,取最小值作为岩石地基承载力标准值。由于岩石地基的破坏机理与土质地基不同,故除强风化岩外,岩石地基承载力不进行深度与宽度修正,标准值即为设计值。

8.2.7 有关问题说明

8.2.7.1 承载力公式比较

由于各种极限承载力理论的假定不同,算得的承载力值也就不同。Meyerhoff 公式考虑了基础两侧的摩擦以及侧土抗剪强度的影响,其值最大;Terzaghi 公式考虑了基底摩擦,其值次之。从所考虑的因素上讲,Meyerhoff 理论是比较合理的,但由于计算繁杂、使用不便,所以 Meyerhoff 自己也倾向于以式(8-50)为基础引入各种修正系数来计算地基承载力。

8.2.7.2 地基承载力修正

影响地基承载力的因素很多,如地基土的性质、地下水位、基础的形式与尺寸、荷载偏心与倾斜等。与抗剪强度有关的因素需要特别注意,例如,在其他条件相同的情况下,含水量越大,抗剪强度越低,承载力也越小,所以必须考虑地下水位上升对承载力的影响。

Meyerhoff, Hansen 和 Vesic 对 Terzaghi 公式进行了修正,所考虑的因素包括基础形状、荷载偏心与倾斜、基础埋深、基底倾斜、地面倾斜等,极限承载力垂直分量 p_{uv} 的普遍表达式可写为

$$p_{uv} = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma g_\gamma b \gamma + q N_q s_q d_q i_q g_q b_q + c N_c s_c d_c i_c g_c b_c$$

(8-66)

式中, s_γ, s_q, s_c 为基础形状修正系数; d_γ, d_q, d_c 为基础埋深修正系数; i_γ, i_q, i_c 为荷载倾斜修正系数; g_γ, g_q, g_c 为地面倾斜修正系数; b_γ, b_q, b_c 为基底倾斜修正系数; 各承载力系数和修正系数可查表求得。

此外, 各种承载力理论公式都是在假定均质地基、发生整体剪切破坏条件下得到的。对于局部剪切破坏情况, 可采用 Terzaghi 的建议进行修正, 即采用下述折减后的强度参数计算承载力:

$$\bar{c} = \frac{2}{3}c, \bar{\varphi} = \arctan^{-1}\left(\frac{2}{3}\tan\varphi\right) \quad (8-67)$$

8.2.7.3 特殊基础与承载力

经典地基承载力理论是针对条形基础提出的, 而筏板基础、箱形基础、桩基础的埋深、宽度均发生了显著变化, 现有的承载力计算公式是否仍可用? 经研究已经发现一些问题, 例如, 当基础面积较大时, 按公式计算的地基极限承载力需要修正。但到目前为止, 这方面的研究成果非常有限, 还不足以得出一致的结论。

8.2.7.4 地基承载力允许值与特征值

所有建筑物和土工建筑物地基基础设计时, 均应满足地基承载力和变形的要求, 对经常受水平荷载作用的高层建筑、高耸结构、高路堤和挡土墙以及建造在斜坡上或边坡附近的建筑物, 应验算地基稳定性。通常地基计算时, 首先应限制基底压力小于等于地基容许承载力或地基承载力特征值(设计值), 以便确定基础的埋置深度和底面尺寸, 然后验算地基变形, 必要时验算地基稳定性。

地基容许承载力是指地基稳定有足够安全度的承载能力, 它相当于地基极限承载力除以一个安全系数 K , 此即定值法确定的地基承载力; 同时, 必须验算地基变形不超过允许变形值。因此, 地基容许承载力也可定义为在保证地基稳定的条件下, 建筑物基础或土工建筑物路基的沉降量不超过允许值的地基承载力。地基承载力特征值是指地基稳定有保证可靠度的承载能力, 它作为随机变量, 是以概率理论为基础的, 是以分项系数表达的极限状态设计法确定的地基承载力; 同时, 也要验算地基变形不超过允许变形值。按《建筑地基基础设计规范》(GB50007—2011), 地基承载力特征值定义为由荷载试验测定的地基土的压力-变形曲线线性变形段内规定的变形所对应的压力值, 其最大值为比例界线值。

地基临塑荷载 p_{cr} 和临界荷载 $p_{\frac{1}{4}}, p_{\frac{1}{3}}$ 及地基极限荷载 p_u 的理论公式都属于地基承载力的表达式, 均为基底接触面的地基抗力。地基承载力是土的内摩擦角 φ 、黏聚力 c 、重度 γ 、基础埋深 d 和宽度 b 的函数, 其中, 土的抗剪强度指标 c, φ 值可根据现场条件采用不同仪器和方法测定, 试验数据剔除异常值后, 承载力定值法应取平均值或最小平均值(其中一个最大值舍去后的平均值); 承载力概率极限状态法应取特征值。

我国长期采用容许承载力方法设计, 因而缺乏使用极限承载力计算公式的经验。地基极限承载力计算公式大多是半理论半经验的, 计算值与实测值的比较研究非常重要, 但这项工作目前仍做得很不充分。

8.3 岩土边坡工程

8.3.1 概述

边坡(Slope)是指具有倾斜表面的岩土体。从19世纪中叶开始,欧洲进行大规模铁路、公路、运河、渠道等工程建设,并迫切需要解决边坡稳定(Stability)问题。K. E. Petterson(1916)根据工程经验,首先提出了圆弧滑动面的假说,并建立了整体圆弧法。在此基础上,W. Fellenius(1921, 1927)提出了瑞典条分法(Swedish Slice Method)。后来,经过D. W. Taylor(1948), A. W. Bishop(1955), N. R. Morgenstern和V. E. Price(1965), E. Spencer(1967), N. Janbu(1972)等人的研究,稳定分析的条分法逐渐趋于成熟。此外,现代计算技术的发展又使得自动搜索最危险滑动面成为可能。目前国内外已有多种边坡稳定分析程序可供使用。

边坡按成因可以分为自然边坡和人工边坡。天然的山坡和谷坡是自然边坡,此类边坡是在地壳隆起或下陷过程中逐渐形成的。通常发生较大规模破坏的是自然边坡。人工边坡是由于人类活动而形成的边坡,其中挖方形成的边坡称为开方边坡,填方形成的称为构筑边坡。人工边坡的几何参数可以人为控制。

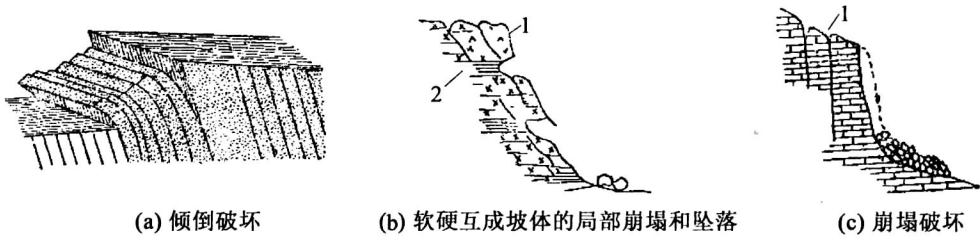
边坡按组成物质可分为岩质边坡和土质边坡。岩坡失稳与土坡失稳的主要区别在于,土坡中可能滑动面的位置并不明显,而岩坡中的滑动面则往往较为明确,无需像土坡那样通过大量试算才能确定。岩坡中结构面的规模、性质及其组合方式在很大程度上决定着岩坡失稳时的破坏形式;结构面的产状或性质稍有改变,岩坡的稳定性将会受到显著影响。因此,要正确解决岩坡稳定性问题,首先需搞清结构面的性质、作用、组合以及结构面的发育情况等,在此基础上不仅要对破坏方式做出判断,而且对其破坏机制也必须进行分析,这是保证岩坡稳定性分析结果正确性的关键。

边坡稳定问题是工程建设中经常遇到的问题,如水库的岸坡、渠道边坡、隧洞进出口边坡、拱坝坝肩边坡以及公路或铁路的路堑边坡等,都涉及稳定性问题。边坡的失稳,轻则影响工程质量与施工进度;重则造成人员伤亡与国民经济的重大损失。因此,不论土木工程还是水利水电工程,边坡的稳定问题经常成为需要重点考虑的问题。

岩坡的破坏类型从形态上可分为崩塌和滑坡。

所谓崩塌(Toppling),是指块状岩体与岩坡分离,向前翻滚而下。其特点是,在崩塌过程中,岩体中无明显滑移面。崩塌一般发生在既高又陡的岩坡前缘地段,这时大块的岩体与岩坡分离而向前倾倒,如图8-21(a)所示;或者,坡顶岩体由于某种原因脱落翻滚而在坡脚下堆积,如图8-21(b)、(c)所示。崩塌经常发生在坡顶裂隙发育的地方,其起因是由于风化等原因减弱了节理面的内聚力,或是由于雨水进入裂隙产生水压力所致,或者也可能是由于气温变化、冻融松动岩石所致,或者是由于植物根系生长造成膨胀压力以及地震、雷击等原因而引起。自然界的巨型山崩总是与强烈地震或特大暴雨相伴发生。

所谓滑坡(Landslide),是指岩体在重力作用下,沿坡内软弱结构面产生的整体滑动。与



1—砂岩;2—页岩
图 8-21 岩崩类型

崩塌相比,滑坡通常以深层破坏形式出现,其滑动面往往深入坡体内部,甚至延伸到坡脚以下,其滑动速度虽比崩塌缓慢,但不同的滑坡其滑速可以相差很大,这主要取决于滑动面本身的物理力学性质。当滑动面通过塑性较强的岩土体时,其滑速一般比较缓慢;相反,当滑动面通过脆性岩石,如果滑面本身具有一定的抗剪强度,在构成滑面之前可承受较高的下滑力,那么一旦形成滑面即将下滑时,抗剪强度急剧下降,滑动往往是突发而迅速的。

滑坡的滑动形式可分为平面滑动、楔形滑动以及旋转滑动。平面滑动是一部分岩体在重力作用下沿着某一软弱面(层面、断层、裂隙)的滑动,如图 8-22(a)所示。滑面的倾角必须大于滑面的内摩擦角,否则,无论坡角和坡高的大小如何,边坡都不会滑动。平面滑动不仅要求滑体克服滑面底部的阻力,而且还要克服滑面两侧的阻力。在软岩(如页岩)中,如果滑面倾角远大于内摩擦角,则岩石本身的破坏即可解除侧边约束,从而产生平面滑动。而在硬岩中,如果结构面横切到坡顶,解除了两侧约束时,才可能发生平面滑动。当两个软弱面相交,切割岩体形成四面体时,就可能出现楔形滑动(图 8-22(b))。如果两个结构面的交线因开挖而处于出露状态,不需要地形上或结构上的解除约束即可能产生滑动。1656 年法国 Malpasset 坝的崩溃就是岩基楔形滑动的结果。旋转滑动的滑面通常呈弧形,如图 8-22(c)所示,这种滑动一般产生于非成层的均质岩体中。

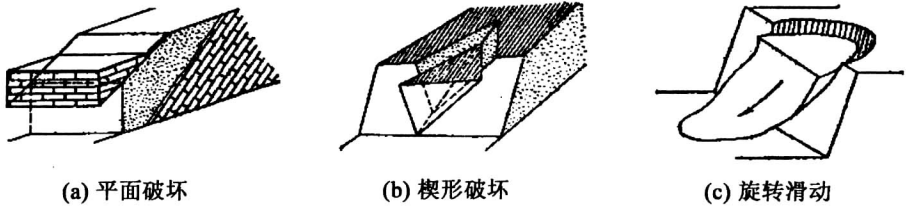


图 8-22 岩滑类型

边坡实际的破坏形式是很复杂的,除上述两种主要破坏形式外,还有介于崩塌与滑坡之间的滑塌,以及倾倒、剥落、流动等破坏方式;有时也可能出现以某种破坏方式为主,兼有其他若干破坏形式的综合破坏。

土坡滑动面的形状通常为簸箕形,但稳定问题常被视为平面应变问题。由于忽略两侧

稳定土体对滑体的抗滑力,故分析偏于安全。在无黏性土坡中,通常形成直线滑动面;均质黏性土坡的滑动面则呈圆弧形;如果坡体中含有软弱夹层,或坡积物与基岩面交界,则滑动面将受其影响或控制。必须指出,发生滑坡时滑动土体虽然产生大的变形,但刚滑动的瞬间却为一整体,故在稳定性分析中均假定滑体为刚体。

8.3.2 稳定分析理论

8.3.2.1 安全系数定义

针对各种不同情况,人们给出了边坡稳定安全系数(Safety Factor) F_s 的相应定义,例如,当滑动面为平面时, F_s 定义为抗滑力 F_R 与滑动力 F_s 之比,即

$$F_s = \frac{F_R}{F_s} \quad (8-68)$$

当滑动面为圆柱面或圆弧时, F_s 定义为抗滑力矩 M_R 与滑动力矩 M_s 之比,即

$$F_s = \frac{M_R}{M_s} \quad (8-69)$$

为了适用于一般滑动面, Bishop (1955) 将安全系数定义为滑动面上的抗剪强度 τ_f 与剪应力 τ 之比

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau} \quad (8-70)$$

这相当于通过降低强度使滑体达到极限平衡状态。这样做比较符合实际情况,因为实际边坡的失稳通常也是由于岩土抗剪强度降低所致。但强度参数有两个,引用一个安全系数意味着黏聚力和摩擦系数按同一比例衰减,而这样做与实际情况并不完全相符。

8.3.2.2 普遍条块分析

通常采用条分法计算土坡的安全系数,这种方法简单实用。如图 8-23 所示的可能滑体 ABC 被分成 n 个竖直土条,每个土条都视为刚体。由于土条宽度较小,底面近似为平面,典型土条 i 的底面与水平面的夹角为 α_i 。当滑动面确定、滑体分为土条后,土条 i 的几何参数随之确定;滑面上的强度参数也是给定的。

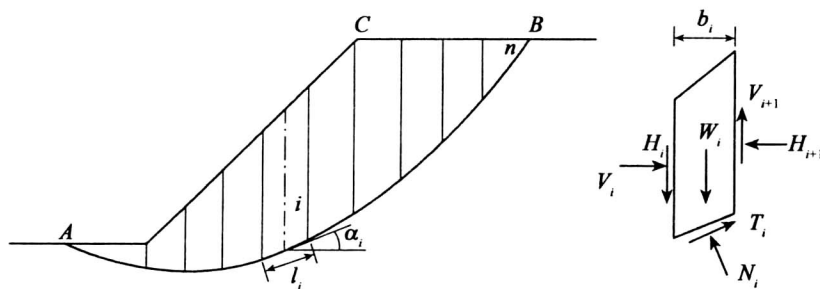


图 8-23 条分法模型

下面对典型土条 i 进行分析。注意到力的三个要素,每个分割面上(底面和条间面)各有三个未知数,即力的大小、方向和作用点或力的法向和切向分量以及法向分力的作用点。

共有 n 个底面和 $n-1$ 个条间分割面,故未知数个数为 $3(2n-1)=6n-3$ 。每个条块可列出三个平衡方程(即两个力的平衡条件和一个力矩平衡条件),共 $3n$ 个。

很显然,除非 $n=1$,问题总是超静定的。为了引入静定化条件而消除问题的超静定,必须做出补充假设。土条底面上的阻滑力可能达到的最大值为抗剪强度的合力,即

$$T_{fi} = \tau_{fi} l_i = (c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) l_i = c_i l_i + N_i \tan \varphi_i \quad (8-71)$$

式中, c_i, φ_i 为第 i 个滑面上土的强度指标; l_i 为第 i 个土条底面的长度。引入安全系数 F_s , 并假定所有条块的安全系数相等,则滑动面上实际被动用的阻滑力 T_i 为

$$T_i = \frac{T_{fi}}{F_s} = \frac{c_i l_i + N_i \tan \varphi_i}{F_s} \quad (8-72)$$

这样便增加了 n 个方程,但又多了一个未知数 F_s 。

到此为止,问题的超静定次数仍为 $2n-2$ 。一般假定土条底面上的法向力 N_i 作用在底面的中点。这样又增加了 n 个条件,故超静定次数变为 $n-2$ 。为了完全消除超静定,学者们针对条间力的大小或方向或作用点提出了各种假设,从而发展出多种条分法。

8.3.3 Fellenius 条分法

Fellenius 条分法也称为瑞典条分法(Swedish Slice Method),该法假定滑动面是圆弧。此外,为了消除超静定,还忽略土条两侧面上的作用力,或假定土条两侧面上的合力与土条底面平行(图 8-24)。由于各土条底面的倾角不同,上述假定违背了作用反作用定律。

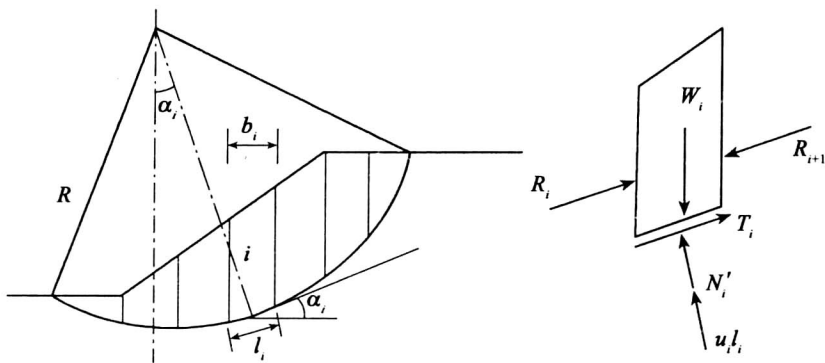


图 8-24 Fellenius 条分法

Fellenius 条分法利用土条底面法向平衡条件和对滑弧圆心的整体力矩平衡条件求解安全系数。根据典型土条 i 底面法向平衡条件,有

$$N_i' + u_i l_i = W_i \cos \alpha_i$$

即

$$N_i' = W_i \cos \alpha_i - u_i l_i \quad (8-73)$$

式中, u_i 为孔隙水压力。对圆心取整体力矩平衡,有

$$\sum_{i=1}^n T_i R = \sum_{i=1}^n W_i R \sin \alpha_i \quad (8-74)$$

式中, T_i 可表示为

$$T_i = \frac{1}{F_s} (c_i l_i + N_i \tan \varphi_i) \quad (8-75)$$

联立式(8-73)、式(8-74)和式(8-75), 得

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n (c_i' l_i + N_i' \tan \varphi_i')}{\sum_{i=1}^n W_i \sin a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n [c_i' l_i + (W_i \cos a_i - u_i l_i) \tan \varphi_i']}{\sum_{i=1}^n W_i \sin a_i} \quad (8-76)$$

采用总应力法时, 上式成为

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n (c_i l_i + W_i \cos a_i \tan \varphi_i)}{\sum_{i=1}^n W_i \sin a_i} \quad (8-77)$$

8.3.4 Bishop 条分法

为了使分析更为精确, Bishop (1955) 提出了一种圆弧条分法 (图 8-25), 该法利用土条竖向平衡条件和对滑弧圆心的整体力矩平衡条件求解安全系数。根据土条 i 的竖向平衡条件, 有

$$W_i = V_{i+1} - V_i + (N_i' + u_i l_i) \cos a_i + T_i \sin a_i \quad (8-78)$$

将式(8-75)代入式(8-78), 可解得

$$N_i' = \frac{1}{m_{ai}'} \left[W_i + (V_i - V_{i+1}) - \frac{c_i' l_i}{F_s} - u_i l_i \cos a_i \right] \quad (8-79)$$

其中,

$$m_{ai}' = \cos a_i + \frac{\sin a_i \tan \varphi_i'}{F_s} \quad (8-80)$$

注意到条间力为内力, 对圆心取整体力矩平衡仍得式(8-73), 将式(8-74)和式(8-78)代入其中, 得

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n [c_i' b_i + (W_i + V_i - V_{i+1} - u_i b_i) \tan \varphi_i'] / m_{ai}'}{\sum_{i=1}^n W_i \sin a_i} \quad (8-81)$$

式中, $(V_i - V_{i+1})$ 是未知的, 需估算其值, 并通过逐次逼近以求出 F_s 。

在试算中, V_i 和 H_i 均应满足每个土条的平衡条件, 且整个滑动土体的 $\sum (V_i - V_{i+1})$ 和 $\sum (H_i - H_{i+1})$ 等于零。研究表明, 忽略 $\sum (V_i - V_{i+1})$ 所产生的误差仅为 1%, 如此得到应用相当普遍的简化 Bishop 法公式:

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n [c_i' b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \varphi_i'] / m_{ai}'}{\sum_{i=1}^n W_i \sin a_i} \quad (8-82)$$

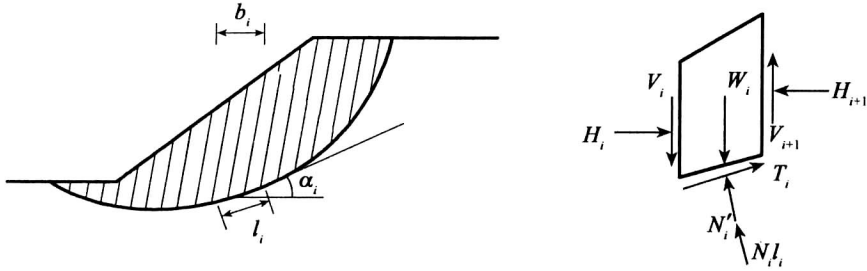


图 8-25 Bishop 条分法

由于 m'_{ai} 内含有 F_s , 所以计算 F_s 时需要试算。可先假定 $F_s = 1$, 代入式 (8-82) 的右边, 计算出 F_s ; 再用此 F_s 代入式 (8-82) 的右边, 计算新的 F_s 。如此反复迭代, 直到假定的 F_s 和算出 F_s 足够接近为止。根据计算经验, 通常只要 3~4 次就可满足精度要求。

如果不考虑孔隙水压力, 则可得总应力法公式:

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n [c'_i b_i + W_i \tan \varphi'_i]}{m_{ai}} \quad (8-83)$$

$$\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i$$

$$m_{ai} = \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \varphi_i}{F_s} \quad (8-84)$$

8.3.5 Janbu 条分法

当边坡位于倾斜的基岩面之上或坡体内部有软弱夹层时, 滑动面将呈非圆弧形。此时, 可采用 Janbu 提出的适用于任意形状滑动面的条分法, 该法假定: 忽略 $V_i - V_{i+1}$ 的影响 (与简化 Bishop 法相同), 即设 $V_{i+1} = V_i$; 作用于土条间水平方向的力, 作为整体是平衡的, 即

$$\sum_{i=1}^n (H_{i+1} - H_i) = 0 \quad (8-85)$$

列土条 i 的竖向平衡方程, 有

$$T_i \sin \alpha_i + (N'_i + u_i l_i) \cos \alpha_i = W_i$$

将式 (8-75) 代入上式得

$$N'_i = \frac{1}{m'_{ai}} \left(W_i - \frac{c'_i l_i}{F_s} \sin \alpha_i - u_i l_i \cos \alpha_i \right) \quad (8-86)$$

列土条 i 的水平向平衡方程, 有

$$T_i \cos \alpha_i - (N'_i + u_i l_i) \sin \alpha_i = H_{i+1} - H_i$$

考虑到式 (8-85), 有

$$\sum_{i=1}^n [T_i \cos \alpha_i - (N'_i + u_i l_i) \sin \alpha_i] = \sum_{i=1}^n (H_{i+1} - H_i) = 0$$

将式 (8-75) 和式 (8-86) 代入上式, 可得

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n [c'_i b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \varphi'_i]}{\frac{m'_{ai} \cos \alpha_i}{\sum_{i=1}^n W_i \tan \alpha_i}} \quad (8-87)$$

8.3.6 Morgenstern-Price 条分法

针对滑动面为任意形状的边坡, Morgenstern 和 Price(1965) 取微分土条为研究对象, 首先推导出满足所有力及力矩平衡条件的微分方程, 然后假定条间力符合下列关系:

$$\frac{V(x)}{H(x)} = \lambda f(x) \text{ 或 } V = \lambda f(x) H \quad (8-88)$$

根据整个滑动土体的边界条件求出问题的解答。式(8-88)中 λ 为待定常数, $f(x)$ 为某个假定的函数, 很显然, 上式等于定义了条间力的方向。

土坡的坡面线、侧向孔隙水压力推力线、侧向有效应力推力线、滑动线分别为 $y=z(x)$, $y=h(x)$, $y=y_i'(x)$, $y=y(x)$ (图 8-26)。考虑微分土条的受力情况, 分别根据力矩(对土条底部中点取矩)平衡条件、土条底部法线和切线方向力的平衡条件, 可得

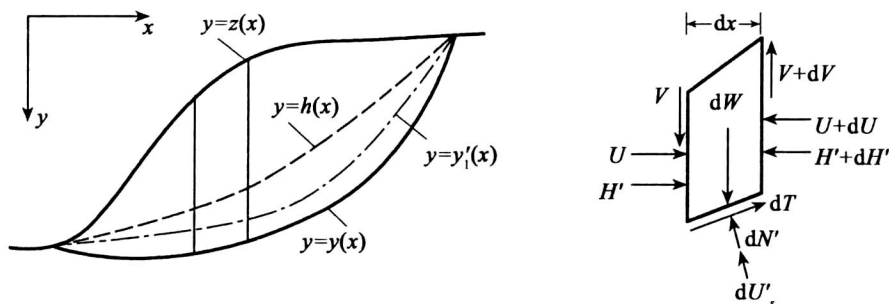


图 8-26 Morgenstern-Price 条分法

$$V = \frac{d(H'y_i')}{dx} - y \frac{dH'}{dx} + \frac{d(Uh)}{dx} - y \frac{dU}{dx} \quad (8-89)$$

$$dN' + dU_s = dW \cos \alpha - dC V \cos \alpha - dH' \sin \alpha - dU \sin \alpha \quad (8-90)$$

$$dT = dH' \cos \alpha + dU \cos \alpha - dX \sin \alpha + dW \sin \alpha \quad (8-91)$$

根据式(8-75), dT 可表示为

$$dT = \frac{1}{F_s} (c' dx \sec \alpha + dN' \tan \varphi') \quad (8-92)$$

土条底面孔隙水压力增量 dU_s 可用孔隙水应力比 r_u 表示为

$$dU_s = r_u dW \sec \alpha \quad (8-93)$$

综合以上各式, 并消去 dT 和 dN' , 得

$$\begin{aligned} \frac{dE'}{dx} \left(1 - \frac{\tan\varphi' dy}{F_s dx} \right) + \frac{dV}{dx} \left(\frac{\tan\varphi'}{F_s} + \frac{dy}{dx} \right) = \frac{c'}{F_s} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + \frac{dU}{dx} \left(\frac{\tan\varphi' dy}{F_s dx} - 1 \right) + \\ \frac{dW}{dx} \left\{ \frac{\tan\varphi'}{F_s} + \frac{dy}{dx} - r_u \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{\tan\varphi'}{F_s} \right\} \end{aligned} \quad (8-94)$$

由于 dx 可以取得很小, 故在土条范围内, 滑动面 $y = y(x)$, dW/dx 以及式(8-88)中的 $f(x)$ 可以线性化为

$$y = Ax + B$$

$$\frac{dW}{dx} = px + q$$

$$f = kx + m$$

再考虑到土条侧面总法向力 H 及其作用点位置 y , 满足下述方程:

$$H = H' + U$$

$$Hy_i = H'y'_i + Uh$$

则式(8-89)和式(8-94)分别简化为

$$V = \frac{d(Hy_i)}{dx} - y \frac{dH}{dx} \quad (8-95)$$

$$(Kx + L) \frac{dH}{dx} + KH = Nx + P \quad (8-96)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} K &= \lambda k \left(\frac{\tan\varphi'}{F_s} + A \right) \\ L &= \lambda m \left(\frac{\tan\varphi'}{F_s} + A \right) + 1 - A \frac{\tan\varphi'}{F_s} \\ N &= p \left[\frac{\tan\varphi'}{F_s} + A - r_u (1 + A^2) \frac{\tan\varphi'}{F_s} \right] \\ P &= \frac{c'}{F_s} (1 + A^2) + q \left[\frac{\tan\varphi'}{F_s} + A - r_u (1 + A^2) \frac{\tan\varphi'}{F_s} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-97)$$

土条两侧的边界条件为

$$H = H_i \quad (\text{当 } x = x_i)$$

$$H = H_{i+1} \quad (\text{当 } x = x_{i+1})$$

对方程式(8-96)从 x_i 到 x_{i+1} 积分, 可得

$$H_{i+1} = \frac{1}{L + K\Delta x} \left(H_i L + \frac{N\Delta x^2}{2} + P\Delta x \right)$$

根据上式可以逐条求出水平向条间力 H , 再根据式(8-96)求出竖向条间力 V 。当滑动土体外部没有其他外力作用时, 对最后一土条必须满足:

$$H_n = 0 \quad (8-98)$$

土条侧面的力矩可由式(8-95)积分求出

$$M_{i+1} = H_{i+1} (y - y_1)_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(V - H \frac{dy}{dx} \right) dx$$

且必须满足

$$M_n = \int_{x_0}^{x_n} \left(V - H \frac{dy}{dx} \right) dx = 0 \quad (8-99)$$

上述算式中的 λ 和 F_s 是未知的, 计算时, 应先假定 λ, F_s , 然后逐条积分得到 H_n 和 M_n 。如果它们不为零, 再不断修正 λ, F_s , 直到式(8-98)和式(8-99)得到满足为止。至于函数 $f(x)$, 可直观地假定。根据 Morgenstem 等人的研究, 对于接近圆弧的滑动面, 安全系数对内力分布的反应是很不灵敏的, 取完全不同的 $f(x)$, 得到的安全系数却相当接近。必须指出, 任何关于条间力的假定必须使求出的条间力不违背破坏准则, 即由切向条间力得出的平均剪应力不大于平均抗剪强度, 一般条间也不允许出现拉力。

Morgenstem 法是土坡稳定分析中最一般的方法, 通过引入假定可简化为其他条分法, 如 $f(x)=0$ 时相当于简化 Bishop 法。由于一般情况下 $f(x)$ 的选择有一定困难, 加之计算上的困难, Morgenstem 法应用并不很广泛。

8.3.7 有关问题说明

8.3.7.1 渗透力的影响

当土坡中发生渗流时, 将有渗透力作用于土骨架之上(图 8-27(a))。通常将渗透力作为滑动力, 而不考虑其对抗滑作用的影响。取滑体浸水部分内孔隙水为脱离体, 其受力有滑动面上的静水压力 P_1 、坡面上的静水压力 P_2 、坡外水位线以下部分的孔隙水重与土粒浮力的反力之和 W_1 、坡外水位线以上部分的孔隙水重与土粒浮力的反力之和 W_2 、渗流产生的土粒对水的反作用力 T 。 T 与渗透力的合力大小相等, 方向相反。

由于 P_1 以及无渗流时的 P'_1 通过滑动圆心 O , 故由图 8-27(b) 可知, W_1 与 P_2 对圆心的力矩相平衡。从而 W_2 和 T 对圆心的力矩相平衡, 或者说渗透力的力矩等于 W_2 的力矩。取土骨架为分析对象, 将渗透力矩加在滑动力矩即分母上, 则瑞典条分法安全系数为

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n c'_i l_i + \sum_{i=1}^n (\gamma h_{1i} + \gamma' h_{2i} + \gamma' h_{3i}) b_i \cos \alpha_i \tan \varphi'_i}{\sum_{i=1}^n (\gamma h_{1i} + \gamma' h_{2i} + \gamma' h_{3i}) b_i \sin \alpha_i} \quad (8-100)$$

式中 h_{1i} 为土条 i 浸润线以上部分的高度; h_{2i} 为浸润线以下、坡外水位线以上部分的高度; h_{3i} 为坡外水位线以下部分的高度。

8.3.7.2 滑动面搜寻

用极限平衡法进行边坡稳定性分析, 首先要确定滑面的形状和位置, 对于直接由边坡体内的软弱结构面控制的滑面, 可由工程地质的方法确定其位置和形状; 对于无软弱结构控制的或部分受软弱结构面控制的边坡滑面, 其最危险滑面的确定就成了关键问题。

寻找最危险滑面, 实际上是找出安全系数最小的潜在滑面, 即找出函数 $F(X_i)$ 的最小值, 则

$$F_{\min} = \min \{ F(X_i) \} \quad (8-101)$$

式中, F_{\min} 为最小安全系数; $F(X_i)$ 为潜滑面的安全系数, 是滑面几何尺寸的函数, X_i 是 N 维向量, $X_i = \{ X_1, X_2, \dots, X_N \}$, 控制着第 i 个滑面的几何形状和位置。

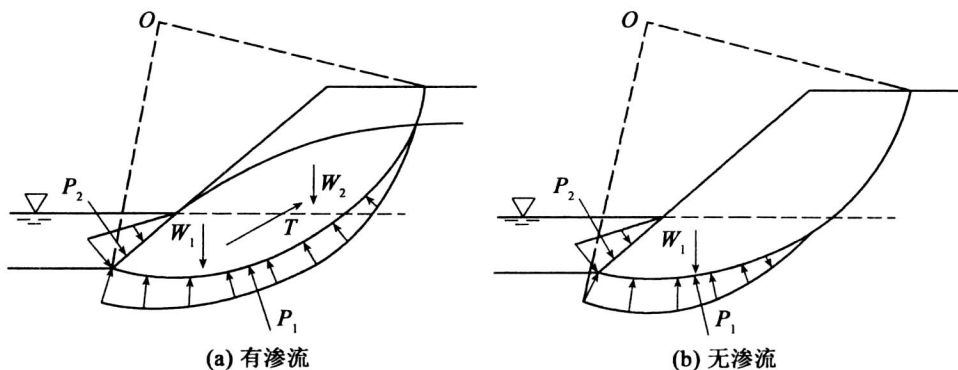


图 8-27 渗透力影响

寻找潜滑面问题是典型的优化问题,目前已有很多学者进行了这方面的研究,提出了很多解决办法,常见的有枚举搜索法、单纯形搜索法和随机搜索方法。在此仅对单纯形搜索法作一简介,其他方法参见相关文献。

单纯形的基本思想是根据一定的单纯形,比较不同自变量的目标函数,确定最优的搜索方向,最终找到最小值。其计算步骤可归纳为:

1. 建立初始单纯形

对某一初始变量 z^0 ,按下面模式构筑 n 个向量 $z^i (i=1,2,\dots,n)$,组成 $n+1$ 个顶点,则

$$\begin{aligned} z^1 &= [z_1^0 + p, z_2^0 + p, \dots, z_n^0 + q]^T \\ z^2 &= [z_1^0 + q, z_2^0 + q, \dots, z_n^0 + q]^T \\ &\vdots \\ z^n &= [z_1^0 + q, z_2^0 + q, \dots, z_n^0 + p]^T \end{aligned} \quad (8-102)$$

式中,

$$p = \frac{\sqrt{(n+1)} + n - 1}{n\sqrt{2}}a, q = \frac{\sqrt{(n+1)} - 1}{n\sqrt{2}}a$$

其中, a 为初始步长,可根据实际情况决定。

2. 确定搜索方向

计算单纯形 $n+1$ 个顶点的目标函数值,比较其大小,从中找出目标函数最大点 z_H (最坏点)、次大点 z_C (次坏点)和最小点 z_L (最好点),然后按下式确定下一步的搜索方向,即

$$z_{n+2}^m = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n z_i^m - z_H^m \right] \quad (8-103)$$

式中, m 为迭代次数。

显然,在 z_H^m 和 z_{n+2}^m 方向,目标函数是下降的。因此,以 z_H^m 和 z_{n+2}^m 两点的连线为搜索方向。

3. 优化计算

(1) 反射:沿搜索方向 z_H^m 和 z_{n+2}^m 点方向前进一步,步长为 $\alpha(z_{n+2}^m - z_H^m)$,到达 z_{n+3}^m 点,即

$$z_{n+3}^m = z_{n+2}^m + \alpha(z_{n+2}^m - z_H^m) \quad (8-104)$$

z_{n+3}^m 点称为反射点, $\alpha > 0$ 称为反射系数。计算反射点的目标函数, 并根据其大小决定下一步的走向。

(2) 扩张: 如果反射点的函数值小于最好点 z_L 点的函数值, 即

$$F(z_{n+3}^m) < F(z_L^m) \quad (8-105)$$

则表明反射后情况有所改善, 沿搜索方向 z_H^m, z_{n+2}^m 还可试探是否可以走得更远, 即是否可扩张至 z_{n+4}^m 点, 则

$$z_{n+4}^m = z_{n+2}^m + \gamma(z_{n+3}^m - z_{n+2}^m) \quad (8-106)$$

式中, γ 为扩张系数。

如果 $F(z_{n+4}^m) < F(z_L^m)$, 则以 $F(z_{n+4}^m)$ 点代替原来的最坏点 z_H , 构成新的单纯形, 进行收敛判断。

如果 $F(z_{n+4}^m) \geq F(z_L^m)$, 则以 $F(z_{n+3}^m)$ 点代替原来的最坏点 z_H , 构成新的单纯形, 进行收敛判断。

(3) 收缩: 如果反射点的函数值大于次坏点 z_C 点的函数值, 即

$$F(z_{n+3}^m) > F(z_C^m) \quad (8-107)$$

则表明反射点走得太远, 需要收缩回去, 按下式计算:

$$z_{n+5}^m = z_{n+2}^m + \beta(z_{n+3}^m - z_{n+2}^m) \quad (8-108)$$

式中, $0 < \beta < 1$, 为扩张系数。

然后用 z_{n+5}^m 点代替原来的最坏点 z_H , 构成新的单纯形, 进行收敛判断。

(4) 缩小边长: 如果反射点函数值大于最坏点函数值, 即 $F(z_{n+3}^m) > F(z_H^m)$, 则缩小单纯形边长, 以最好点 z_L 为顶点, 其他各顶点向 z_L 移近一半距离, 即按下式计算:

$$z_i^m = z_L^m + 0.5(z_i^m - z_L^m), i = 1, 2, \dots, n \quad (8-109)$$

得新的单纯形。

4. 收敛判断

按照一定的方式通过反射、扩张和收缩, 使单纯形不断更新逼近极值点。收敛准则为

$$\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [F(z_i^m) - F(z_{i+2}^m)]^2} \leq \varepsilon \quad (8-110)$$

式中, ε 为要求的计算精度。

如式(8-110)满足, 则结束计算, 并以 z_L^m 作为极小点; 否则, 置 $m = m + 1$, 转到上一步, 重复计算。

据已有经验, 可取 $\alpha = 1.0, 0.4 \leq \beta \leq 0.6, 2.0 \leq \gamma \leq 3.0$ 。

8.3.7.3 方法的精度

一般地, 考虑条间力的影响, 可使安全系数提高, 例如, 与更精确的分析方法相比, Fellenius 法的误差为 5% ~ 20%, 但偏于安全。简化 Bishop 法的误差不超过 7%, 在 2% 左右且偏于安全。但要注意, 对 φ 等于零或很小的软黏土, 滑面底部的正应力对有效抗剪强度影响较小, 采用 Fellenius 法并不一定比其他方法来得保守。

8.4 岩土地下工程

8.4.1 概述

为各种目的修建在地层之中的中空巷道或中空硐室,统称为地下工程,包括矿山坑道、铁路及公路隧道、水工隧洞、地下发电站厂房、地下铁道及地下停车场、地下储油库及储气库、地下弹道导弹发射井、地下飞机库以及地下核废料密闭储藏库等。虽然它们规模不等,但都有一个共同的特点,就是都要在岩体内开挖出具有一定横断面积和尺寸,并有较大延伸长度的硐室,所以周围岩土体的稳定性就决定着地下工程的安全和正常使用条件。

地下工程所处的环境条件与地面工程是截然不同的,地下工程的设计与实施具有更多的复杂性。但长期以来都是沿用适用于地面工程的理论和方法来解决地下工程所遇到的各类问题,因而常常不能正确地阐明地下工程中出现的各种力学现象和过程,地下工程长期处于“经验设计”和“经验施工”的局面。因此,人们都在努力寻求用于解决地下工程问题的新理论和新方法。

地下工程学科具有很强的实践性,该学科的发展与岩土力学的发展有着密切的关系。岩土力学的发展促使松散地层围岩稳定和围岩压力理论的发展,而岩土力学的发展促使围岩压力和地下工程理论的进一步飞跃。20 世纪 50 年代以来,围岩弹性、弹塑性和黏弹性解答逐渐出现,锚杆与喷射混凝土一类新型支护的出现和与此相应的新奥法(NATM)的兴起,终于形成了以岩土力学原理为基础的、考虑支护与围岩共同作用的地下工程现代理论。

地下工程围岩是指地壳中受地下工程开挖影响的那一部分岩体,其范围通常等于地下工程横剖面中最大尺寸的 3~5 倍。岩体是一种经历地质构造运动而发生变形与破坏的十分复杂的介质。在地下工程建设中,无论怎样仔细地研究,都不可能把工程区域内岩体的力学性质的细节完全搞清楚。因此,根据地下工程的性质与要求,将围岩体的某种或某些属性加以概略划分,称为围岩分类或围岩分级。围岩分类的目的在于整理和传授复杂的岩石环境中开挖地下工程的经验,是将以地质条件为主的分散的实践经验加以概略量化的一种骨架,是应用前人经验进行支护设计、选择施工方法的桥梁,是计算工程造价和投资的依据。

目前,国内外提出了许多地下工程围岩分类方法,有的已在实践中得到广泛应用。纵观国内外地下工程围岩分类,20 世纪 70 年代以前的围岩分类多数为单一因素(或少数因素)的定性分类或半定量分类,其局限性比较明显。20 世纪 70 年代后,逐渐过渡到能考虑各种重要因素、定性描述与定量评价相结合的分类阶段。在多因素综合分类中,最为成熟、简便且应用最广的是确定性模型。

地下工程包括的类型很多,从不同的角度区分,可得到不同的分类方法。最合理的地下工程分类必须与其周围岩体应有的稳定性、安全程度联系起来,同时取决于地下工程的用途。

8.4.1.1 Barton 分类

1974 年,挪威地质学家 Barton、Lien 和 Lunde 将地下工程分为:

- (1) 临时性矿山坑硐;
- (2) 竖井;
- (3) 永久性矿山坑硐、水电工程的引水隧洞(不包括高水头涵洞)、导挖隧道、平巷和大型开挖工程的导坑;
- (4) 地下储藏室、污水处理站、公路和铁路支线的隧道、水电工程的调压室及进出隧道;
- (5) 地下电站主硐室、公路和铁路干线的隧道、人防硐室、隧道入口及交叉点;
- (6) 地下核电站、地铁车站、地下体育场及公共设施、地下厂房。

8.4.1.2 按地下工程埋置深度分类

按地下工程埋置深度分类,可借鉴隧道工程的划分方案。我国经典的隧道工程著作根据埋深,将隧道划分为深埋隧道和浅埋隧道两大类,现行的铁路隧道设计规范和公路隧道设计规范在计算围岩压力时,也都采用该划分方案。深埋隧道和浅埋隧道的临界深度(H_p)可按荷载等效高度值,并结合地质条件、施工方法等因素综合判定。按荷载等效高度的判定式为

$$H_p = (2.0 \sim 2.5) h_q$$

式中, H_p 为深埋与浅埋地下工程分界深度; h_q 为荷载等效高度, $h_q = q/\gamma$, q 为深埋地下工程垂直均布压力(kN/m^2), γ 为围岩容重(kN/m^3)。

在矿山法施工的条件下,I ~ II类围岩取 $H_p = 2.5h_q$;IV ~ VI类围岩取 $H_p = 2.0h_q$ 。

根据上述方案,对于山岭区地下工程,一般埋深超过50m的基本上都可以划分为深埋地下工程。

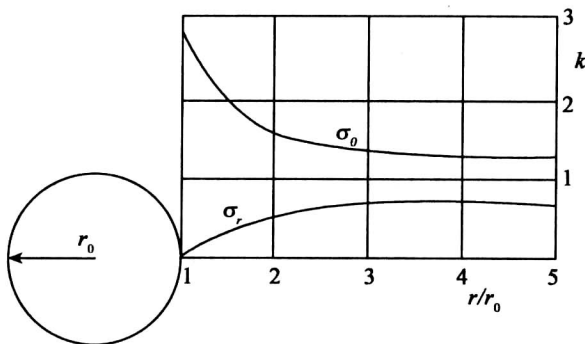
另外,地下工程按用途,可分为交通地下工程(如公路及铁路隧道、水底隧道、地下铁道、航运隧道、人行隧道等)、水工地下工程(如引水及尾水隧洞、导流隧洞、排沙隧洞等)、市政地下工程(如给排水隧道、人防硐室等)及矿山地下工程等;按地下工程所处位置,可分为山地(区)地下工程、城市地下工程及水下地下工程;按所处地层,可分为岩石(软岩、硬岩)地下工程、土质地下工程等。

8.4.2 地下工程围岩应力

地下工程开挖之前,岩体在原岩应力条件下处于平衡状态,开挖后,地下洞室周围岩体发生卸荷回弹和应力重分布。根据垂直应力(通常为主应力)和水平应力的关系,对于具有一定尺寸的地下工程来说,其垂直剖面上各点的原始应力大小是不等的,地下洞室在岩体内将处在一种非均匀的初始应力场中。

地下工程的开挖,破坏了岩体原有的应力平衡状态,围岩内各质点在回弹应力的作用下,均将力图沿最短距离向消除了阻力的自由表面方向移动,直至达到新的平衡。围岩应力重分布的主要特征是径向应力随着向自由表面的接近而逐渐减小,至洞壁处变为零;而切向应力的变化则有不同的情况,在一些部位越接近自由表面,切向应力越大,并于洞壁达最高值,即产生所谓的压应力集中,在另一些部位,越接近自由表面,切向应力越低,有时甚至于洞壁附近出现拉应力,即产生所谓的拉应力集中。图8-28是侧压力系数(指原岩水平应力与垂直应力的比值) $\lambda = 0.25$ 时围岩应力集中系数 k (指同一点开挖后重分布应力与原岩应力的比值)分布图。显然,洞壁处的应力集中现象最明显。地下工程的开挖在围岩内引起

强烈的主应力分异现象,使围岩内的应力差越接近自由表面越增大,至地下工程周边达到最大值。理论与实验表明,地下工程围岩应力重分布的特点主要取决于地下工程的形状和岩体的初始应力状态。



σ_θ —切向应力; σ_r —径向应力; r_0 —圆洞半径; r —任一点半径

图 8-28 围岩应力集中系数

8.4.2.1 圆形地下工程围岩应力

1. 围岩应力的弹性分析

在研究过程中,假定岩体连续、完全弹性、均匀、各向同性和微小变形,即满足古典弹性理论的全部假定。由于地下开挖体在长度方向的尺寸通常总比横截面尺寸大得多,在不考虑掘进影响时,可采用平面应变的假定。

对于裂隙不多的坚硬岩体,一般认为可应用线弹性理论分析;对于裂隙岩体或软弱岩体,如果围岩应力不高,围岩有可能处于弹性状态。线弹性分析是围岩压力理论研究十分重要的内容,是弹塑性、黏弹性、黏弹塑性及弱面体力学分析的基础。

设在距地表 H 深处开挖一半径为 a 的圆形洞室,且 $H > (3 \sim 5)a$ 。根据以上假定,可把在岩体中开挖洞室后围岩应力分布问题视为双向受压无限大平板中的孔口应力分布问题,如图 8-29 所示。在距圆形洞室中心为 r 的某点取一单元体 $A(r, \theta)$ (θ 为 OA 与水平轴的夹角),采用极坐标求解围岩应力。圆形洞室的应力一般可按基尔西公式求解,其求解应力的公式为

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2}(1+\lambda)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{P}{2}(1-\lambda)\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2}(1+\lambda)\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{P}{2}(1-\lambda)\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{P}{2}(1-\lambda)\left(1+2\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta\end{aligned}\quad (8-111)$$

则点 (r, θ) 处的主应力:

$$\text{最大主应力: } \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \left[\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

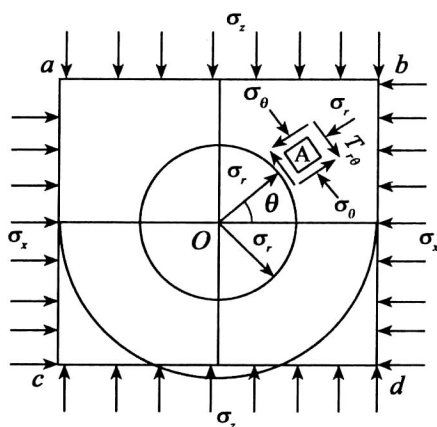


图 8-29 圆形洞室围岩中的应力分布

最小主应力:
$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \left[\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

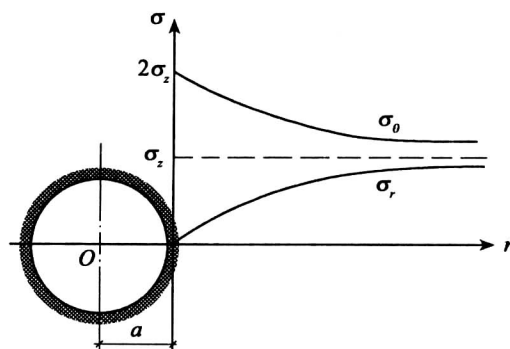
主应力对径向的倾角:
$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan^{-1} \left[\frac{2 \tau_{r\theta}}{(\sigma_\theta - \sigma_r)} \right] \quad (8-112)$$

式中, σ_r 为岩体任意一点 A 的径向应力; σ_θ 为岩体任意一点 A 的切向应力; $\tau_{r\theta}$ 为任意一点 A 的剪应力; p 为作用在岩体上的原岩垂直应力; λ 为侧压力系数。

(1) 当 $\lambda=1$ 时, 围岩处于静水应力状态, 式(8-111)简化为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= P \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (8-113)$$

由式(8-113)可以看出, 径向应力 σ_r 和切向应力都随径向间距 r 变化(图 8-30)。当 $r=a$ 时, $\sigma_r=0$, $\sigma_\theta=2P$; 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_r=P$, $\sigma_\theta=P$, 而 $\tau_{r\theta}$ 恒等于零。可见, 在洞室周边处的应力差最大, 由它所派生的剪应力也最大, 说明在洞室周边容易发生破坏。

图 8-30 $\lambda=1$ 时圆形洞室的围岩应力分布曲线

(2) 当 $\lambda \neq 1$ 时, 根据式(8-111), 可得到在 $r=a$ 处的应力:

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \sigma_\theta = P(1+2\cos 2\theta) + \lambda P(1-2\cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (8-114)$$

由式(8-114)可知, 在洞室周边处, 切向应力 σ_θ 最大, 径向应力 $\sigma_r = 0$, 剪应力 $\tau_{r\theta} = 0$, 所以 σ_θ 为主应力。同时还可以看出, σ_θ 值不仅与 p 值及 λ 值有关, 而且与 θ 值有关。 λ 值的变化对洞室周边切向应力分布起着决定性的作用。

(3) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ (或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$), $r=a$ 时, 由式(8-111)可得

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2} [2(1+\lambda) - 4(1-\lambda)] = P(3\lambda - 1) \quad (8-115)$$

由此可见, 在洞室的顶部和底部, σ_θ 不出现负值(拉力)的条件是 $\lambda > \frac{1}{3}$ 。由于最大的拉应力往往出现在洞室开挖边缘的顶部和底部, 所以 $\lambda > \frac{1}{3}$ 是圆形洞室不出现拉应力的条件。

2. 围岩应力的弹塑性分析

地下工程开挖后, 如果围岩应力小于岩体的屈服极限, 则围岩仍处于弹性状态; 如果围岩局部区域的应力超过岩体强度, 则岩体物性状态发生改变, 围岩进入塑性或破坏状态。围岩的塑性或破坏状态有两种情况: 一是围岩局部区域的拉应力达到了抗拉强度, 产生局部受拉分离破坏; 二是局部区域的剪应力达到了岩体抗剪强度, 从而使这部分围岩进入塑性状态, 但其余部分围岩仍然处于弹性状态。

目前, 地下工程塑性区的应力、变形及其范围大小的计算仍以弹塑性理论所提出的基本观点作为研究和计算的依据, 即无论是应力、变形以及位移, 都认为是连续变化的。塑性区应力状态的解析解, 只能解出 $\lambda = 1$ 的圆形洞室(即轴对称问题), 并且认为岩体是均质的、各向同性的弹性体。因此, 这里只对轴对称条件下的围岩应力进行弹塑性分析。

(1) 平衡方程。轴对称条件下, 应力及变形均仅是 r 的函数, 而与 θ 无关, 且塑性区为一等厚圆, 在塑性区中假设 c 、 φ 值为常数, 在弹性区与塑性区交界处既满足弹性条件又满足塑性条件。在不考虑体力时, 得平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (8-116)$$

(2) 塑性条件。在塑性区, 应力除满足平衡方程外, 还需满足塑性条件。所谓塑性条件, 就是岩体中应力满足此条件时, 岩体便呈现塑性状态。根据莫尔强度理论, 当岩体的强度曲线与岩体内各点的应力 σ_θ 与 σ_r 值作出的莫尔圆相切时, 岩体就进入了塑性状态, 故塑性条件就是莫尔强度理论中的强度条件, 根据图 8-31, 在 $\triangle ABM$ 中

$$\begin{cases} \sin\varphi = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}}{c \cdot \cot\varphi + \frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{2}} \\ \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \left(c \cdot \cot\varphi + \frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{2} \right) \sin\varphi \\ \sigma_\theta - \sigma_r = 2 \left(c \cdot \cot\varphi + \sigma_r \right) \frac{\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \end{cases} \quad (8-117)$$

即

$$\frac{\sigma_r^p + c \cdot \cot\varphi}{\sigma_\theta^p + c \cdot \cot\varphi} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (8-118)$$

式(8-118)即为塑性区岩体应满足的塑性条件,上标 p 表示塑性区的分量。

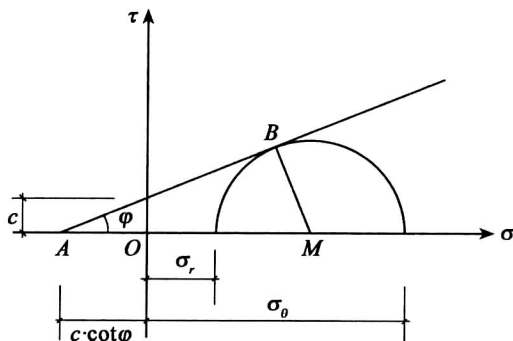


图 8-31 塑性区内应力圆与强度曲线的关系

(3) 塑性区的应力。联立解式(8-116)及式(8-117)或式(8-118),即可得到极限平衡状态下塑性区的应力,即

$$\ln(\sigma_r^p + c \cdot \cot\varphi) = \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \ln r + C_1 \quad (8-119)$$

式中, C_1 为积分常数,由边界条件确定。

当有支护时,支护与围岩接触面($r=a$)上的应力边界条件为 σ_r^p 应等于支护抗力 P_i ,所以有

$$\begin{aligned} \ln(P_i + c \cdot \cot\varphi) &= \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \ln a + C_1 \\ C_1 &= \ln(\sigma_r^p + c \cdot \cot\varphi) - \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \ln r \end{aligned} \quad (8-120)$$

代入式(8-117)及式(8-119)可得到塑性区应力,即

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_r^p + c \cdot \cot\varphi) &= \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \ln r + \ln(c \cdot \cot\varphi + P_i) - \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \ln a \\ &= \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} (\ln r - \ln a) + \ln(c \cdot \cot\varphi + P_i) \end{aligned}$$

$$= \ln \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} (P_i + c \cdot \cot\varphi) \right]$$

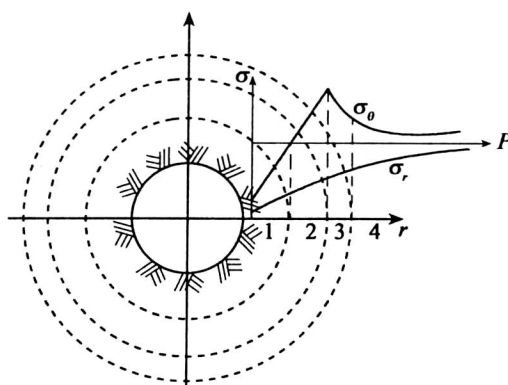
$$\sigma_r^p + c \cdot \cot\varphi = (P_i + c \cdot \cot\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$$

所以,

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= (P_i + c \cdot \cot\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} - c \cdot \cot\varphi \\ \sigma_\theta^p &= (P_i + c \cdot \cot\varphi) \left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} - c \cdot \cot\varphi \end{aligned} \quad (8-121)$$

式(8-121)为轴对称问题塑性区内次生应力的计算公式,即修正的芬涅尔公式。塑性应力随着 c 、 φ 及 P_i 的增大而增大,而与原岩应力 P 无关。

(4) 围岩应力变化规律。图 8-32 绘出了从洞室周边沿径向方向上诸点应力的变化规律,可以看出,当围岩进入塑性状态时, σ_θ 的最大值从洞室周边转移到弹、塑性区的交界处。随着向岩体内部延伸,围岩应力逐渐恢复到原岩应力状态。在塑性区内,由于塑性区的出现,切向应力 σ_θ 从弹、塑性区的交界处向洞室周边逐渐降低。



1—松动区;1~2—塑性区;3~4—弹性区;4—原岩应力区

图 8-32 塑性区围岩应力分布状态

根据围岩变形状态,可将洞室周围的岩体从周边开始逐渐向深部分为四个区域,各区域的变形特征如下:

①松动区。区内岩体已被裂隙切割,越靠近洞室周边越严重,其内聚力 c 趋近于零,内摩擦角 φ 亦有所降低,岩体强度明显削弱。因区内岩体应力低于原岩应力,故称应力降低区。

②塑性强化区。区内岩体呈塑性状态,但具有较高的承载能力,岩体处于塑性强度阶段。区内岩体应力大于原岩应力,最大的应力集中由围岩周边转移到弹性区与塑性区的交界面上。

③弹性变形区。区内岩体在次生应力作用下仍处于弹性变形状态,各点的应力均超过

原岩应力,应力解除后能恢复到原岩应力状态。

④原岩应力区。未受开挖影响,岩体仍处于原岩应力状态。

8.4.2.2 非圆形开挖体的围岩应力

1. 半圆直墙断面洞室的围岩应力

半圆直墙断面是应用较广的一种洞形。徐干成、白洪才、郑颖人等根据平面弹性力学问题中的复变函数法,计算出了半圆直墙断面洞室在上覆岩体厚度(H)等于2.5倍洞跨自重作用下的洞周应力分布(图8-33),可以看出:

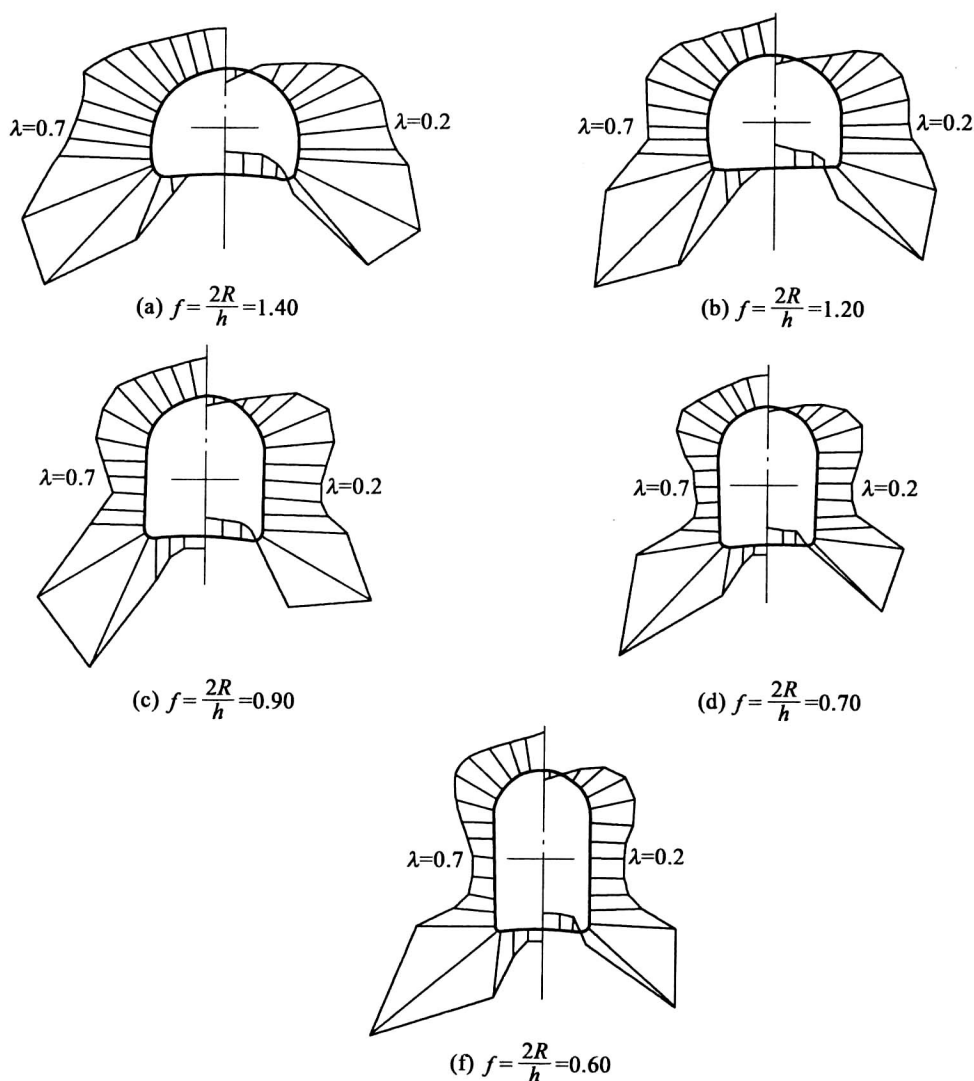


图8-33 洞周切向应力分布($H=5R$, H 为覆盖层厚度)

(1)当侧压力系数 λ 值较小时,如 $\lambda=0.2$,洞顶底出现拉应力;当 λ 值由小变大时,洞

顶、底拉应力趋于减小,直至出现压应力,且压应力随着 λ 值的增加而增加;而两侧的压应力则趋于减小。

(2) 随着跨高比 $f=2R/h$ 的减小,洞顶及洞底中部拉应力趋于减小,压应力趋于增大;而洞室两侧,压应力趋于减小。 $\lambda < 1$ 时,跨高比减小对围岩受力有利; $\lambda > 1$ 时,跨高比很小的洞形围岩受力不利。

(3) 随着跨高比的依次减小,只是相应地增大了洞壁高度,而洞顶和洞底的形状并无变化。与此相应,洞顶及洞底应力值的变化幅度远小于洞壁部分的幅度。

2. 椭圆形断面洞室的围岩应力

设椭圆形断面洞室长半轴为 a ,短半轴为 b ,作用在洞室围岩上的垂直均布应力为 p ,水平应力为 λp ,如图 8-34 所示。根据弹性理论,按椭圆孔复变函数可解得洞室周边上任一点的切向应力 σ_θ 、径向应力 σ_r 和剪应力 $\tau_{r\theta}$ 值的大小。

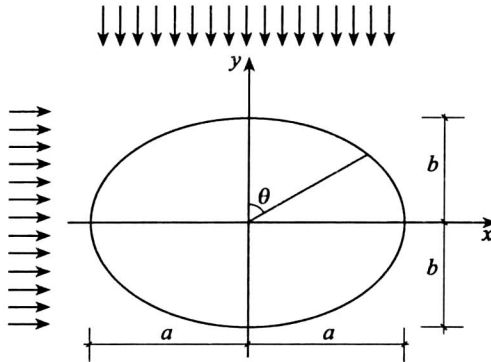


图 8-34 椭圆形洞室

$$\sigma_\theta = \frac{P(k^2 \sin^2 \theta + 2k \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \lambda P(\cos^2 \theta + 2k \cos^2 \theta - k^2 \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}$$

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad (8-122)$$

式中, k 为椭圆轴比, $k=b/a$; θ 为洞室周边某一计算点和椭圆中心连线与垂直轴的夹角。

可以看出,椭圆形断面洞室周边应力和两个应力极值仍然在水平轴($\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$) 和垂直轴($\theta=0$ 或 $\theta=\pi$) 上。

(1) 当 $\lambda=0$ 时,即仅在垂直方向有荷载 p 时,有

$$\sigma_\theta = P \frac{k^2 \sin^2 \theta + 2k \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta} \quad (8-123)$$

在两侧 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 和 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 处, $\sigma_\theta = P\left(1+\frac{2}{k}\right)$ 应力集中系数为 $1+\frac{2}{k}$, 当 $k < 1$ 时,两侧点会出现较高的应力集中。

主洞顶 $\theta=0$ 处, $\sigma_\theta = -P$, 即 σ_θ 为常数。

(2) 当 $\lambda=1$ 时,原岩应力呈轴对称分布,有

$$\sigma_{\theta} = \frac{2kP}{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta} \quad (8-124)$$

在洞室两侧 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 处, $\sigma_{\theta} = \frac{2}{k}P$, 应力集中系数为 $\frac{2}{k}$; 在洞顶 $\theta = 0$ 处, $\sigma_{\theta} = 2kP$, 应力集中系数为 $2k$ 。当 $k < 1$ 时, 两侧应力集中高于洞顶; 反之亦然。理论分析和数值计算表明, 当 $\lambda = 1$ 时, 围岩不会出现拉应力。

3. 方形-矩形断面洞室的围岩应力

方形-矩形断面围岩应力的计算方法比较复杂, 这里不作具体介绍。由实验和理论分析可知, 方形-矩形断面洞室围岩应力的大小与侧压系数和方形-矩形的高宽比有关。

方形-矩形洞室周边上最大压应力集中均产生于角点上, 而且这些角点上的最大压应力集中系数随洞室宽高比 (B/H) 的不同而变化, 在不同的应力场中 (λ 值不同时), 大体上都是方形或近似于方形的洞室上的最大压应力集中系数为最低; 随着宽高比的增大或减小, 洞室角点上的最大压应力集中系数则线性或近似于线性地增大。

方形-矩形断面洞室是直线形周边, 最易出现受拉区, 所以受力状态较差, 尤其是当洞室断面长轴与原岩最大主应力垂直时, 会出现较大的拉应力, 使洞室周边遭到破坏, 不利于地下工程的稳定。

8.4.3 围岩压力与控制

岩石地下工程一般埋深较大, 穿越的地层复杂, 地应力和对地下结构作用的传递情况也很复杂, 因此, 围岩压力的计算并仍是一个没有完全解决的问题。

狭义的地压 (Ground Pressure) 是指围岩作用在支架上的压力, 但是这一概念并不完整。地下岩体因开挖所引起的力学效应有多种形式, 如巷道顶、底或两帮的移近 (也称为收敛 (Convergence))、底臌 (Floor Heaving)、围岩的微观或宏观破裂、岩层移动、片帮冒顶、支架破坏、采场垮落等, 这些也都是地压表现。

早期的古典地压理论可以通过非常简单的初等计算给出支护压力的大小, 但是无法回答变形问题。20 世纪 50、60 年代, 由弹塑性力学方法引出的共同作用理论曾一度在岩土力学界占据主导地位, 但是实践证明, 基于连续介质的小变形弹塑性理论, 在解决岩石强度峰值后的性态问题上, 至今还非常乏力, 远达不到能进行支护设计的程度。另外, 处在峰前区的岩石具有较好的自稳能力。因此, 解决峰后情况的稳定问题, 是许多岩土力学工作者所关心的一个重要课题。

8.4.3.1 围岩与支护的共同作用

支护所受的压力及其变形来自于围岩在自身平衡过程中的变形或破裂导致的对支护的作用, 因此, 围岩性态及其变化状况对支护的作用有重要影响。另外, 支护以自己的刚度和强度抑制岩体变形和破裂的进一步发展, 而这一过程同样也影响支承结构自身的受力。于是, 围岩与支护形成一种共同体; 共同体两方面的耦合 (Coupling) 作用和互为影响的情况称为围岩-支护共同作用 (Interaction Between Rock and Supports)。

岩石地下工程的支护可能有以下两种极端情况:

(1) 当岩体内应力达列峰值前, 支护已经到位, 岩体的进一步变形 (包括其剪胀或扩容)

破碎受支护阻挡,构成围岩与支护共同体,形成相互间的共同作用。如果支护有足够的刚度,则共同体是稳定的,并且,围岩和支护在双方力学特性的共同作用下形成岩体和支护内各自的应力、应变状态;否则,共同体将失稳。

(2)当岩体内应力达到峰值时,支护未及架设,甚至在岩体破裂充分发展,支护仍未起作用,从而导致在隧道顶板或两帮形成冒落带,并出现危险部位的冒落或沿破裂面的滑落,此时的岩石工程将整体失稳。如这时有架设好的支护,则它将承受冒落岩体传递来的压力,而冒落的岩石还将承受其外部围岩传来的作用。

处在这两种极端情况之间的是,岩体应力到达强度峰值以后,岩体变形的发展在未完全破裂前,支护开始作用。这时,也可进入围岩-支护共同作用状态。由于支护受到的只是剩余部分的变形作用,因此,此时支护所受到的作用要比第一种极端情况有利。但是,并非支护时间越晚越好,因为可能因支护作用过晚而转入第二种极端情况,甚至发生岩体垮落而失去支护的意义。

对于第一种极端情况,可以采用共同体共同作用的原理进一步分析。对于第二种情况,将归结到古典的和现代的“地压学说”上去。但如果岩体在地压与支护作用下,尽管已经发生破裂,仍互相挤压,且不发生破裂面间的滑动,这时采用第一种情况的处理方法,应该仍是可行的。要注意的是,这些破裂围岩的基本力学性质已经与原来的完整岩体有所区别。

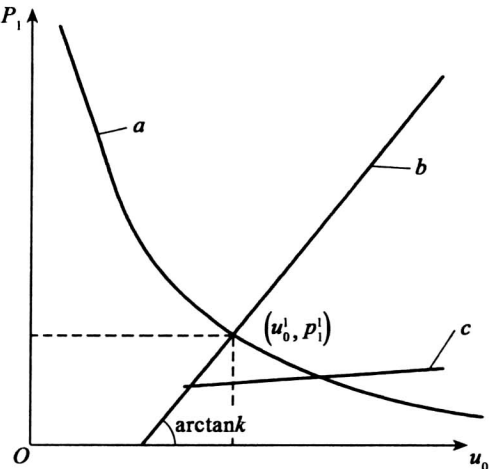
可见,充分利用共同作用原理,发挥围岩的自承能力,对维持地下工程稳定和减少对支护的投入是十分有利的,这也是岩土力学在地下岩石工程稳定问题中的一个基本思想。

下面来分析一种最简单情况。由轴对称圆形巷道周边的弹塑性位移计算公式,可得

$$u_0 = \frac{\sin\varphi}{2G} R_0 (p_0 + c \cot\varphi) \left[\frac{(p_0 + c \cos\varphi)(1 - \sin\varphi)}{P_1 + c \cos\varphi} \right]^{\frac{1 - \sin\varphi}{\sin\varphi}} \quad (8-125)$$

式中, P_1 为支护结构反力; p_0 为原岩应力; R_0 为隧道半径; c, φ 分别为围的内聚力与内摩擦角。

式(8-125)表示周边位移和支护反力成反变关系,绘成 P_1-u_0 曲线如图 8-35 中曲线 a , 此即围岩特性曲线。



a 为围岩特性曲线, b 为支护工作曲线

图 8-35 围岩支护共同作用曲线

一般的支护都可以根据计算或实验获得它的作用与位移关系曲线。例如,轴对称圆形隧道内修建圆形衬砌(图 8-36),则可将圆形衬砌视为受均匀外压 P 的厚壁圆筒。如圆筒的内、外径和材料弹性常数分别用 a 、 R_0 、 E_1 、 μ_1 表示,则根据厚壁圆筒公式,可得圆筒外缘的径向位移为

$$u_0 = \frac{P_1 R_0 (1 + \mu_1)}{E_1 (R_0^2 - a^2)} \left(1 - 2\mu_1 + \frac{a^2}{R_0^2} \right) \quad (8-126)$$

式(8-126)表明,周边位移 u_0 和支护作用 P_1 成正比关系,同样,绘在 P - u_0 曲线上,即为一支护特性曲线(图 8-35 中(b)线)。

将式(8-125)和式(8-126)联立,可求得具体条件下支护压力 P_1 和衬砌壁面位移 u_0 的解,即 p_1 - u_0 图上两线的交点(工况点)的坐标。围岩特性曲线和支护特性曲线构成了共同作用关系。

由图看出,如果改变支护的刚度,就可以改变支护的受力状态。例如,支护刚度变小(直线的斜率变小),支护受力也减小,巷道周边径向位移就增加。根据这一原理,在隧道施工中就有柔性支护与刚性支护的区别,以及支护“让压”的说法,也就是允许隧道有一定的变形,从而减小支护的受力,保证支护安全和没有过大的投入。

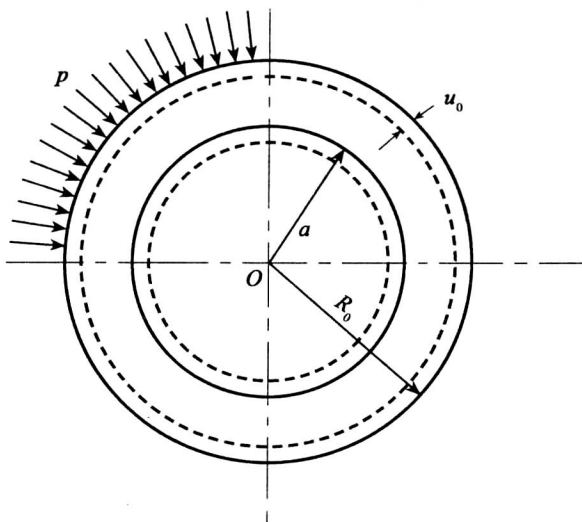


图 8-36 圆形衬砌外压力和外缘位移 u_0

图 8-35 还反映了岩体力学性质和支护时间对共同作用的影响。岩体性质越软,围岩特性曲线越向外移动,变形也越大;而支护时间越迟,支护曲线的起点离坐标原点也越远,支护工作压力也越低。

上述分析反映了围岩稳定与支护相互作用的某些基本原理,为确定支护的内应力及其变形位移选定支护结构、尺寸提供了基本思路。

8.4.3.2 围岩压力计算

地下工程围岩压力的计算,可借鉴隧道工程的围岩压力计算方法。

1. 深埋地下工程围岩压力计算

地下工程围岩压力的确定,目前有三种方法:第一种是直接测量法;第二种是工程模拟法,即根据大量实际资料分析统计和总结,按不同围岩类别提出围岩压力的经验数值(经验公式),作为后建地下工程确定围岩压力的依据;第三种是在实践的基础上从理论上研究围岩压力的估算方法。由于影响围岩压力的因素很多,企图建立一种完善的和适合客观实际情况的围岩压力理论及计算方法较为困难。

限于当前的测试设备及技术水平,目前采用直接测量法仍很不普遍,第三种方法则由于地质条件千变万化,难以达到准确的要求,因此,采用工程模拟法估算围岩压力较为普遍。

当地下工程深埋时,作用在支护结构上的围岩压力,从松动压力的概念看,实际为洞室周边某一破坏范围内岩体的重量。理论和实践证明,围岩越好,则洞室就越稳定,洞室开挖所影响区域就越小,围岩压力值也较小;相反,围岩越差,则压力值相应就越大;在围岩类别相同的条件下,跨度越大,洞室的稳定性就越差,压力值也就越大,说明围岩压力的大小与洞室跨度成正比。

(1) 普氏理论。为了确定作用在支护结构物上的围岩压力,苏联普洛托季雅克诺夫(1907)提出了基于坍落拱的计算原理。他认为,所有地层都可视为具有一定黏结力的“松散介质”,引入了似摩擦系数 f_w 的概念,即在具有一定黏结力的松散介质中开挖隧道后,其上方会形成一抛物线状的自然拱,这实质上就是在松散介质、裂隙岩层中开挖坑道时的破坏范围,而作用在支护结构上的竖向压力就是这个破坏范围(天然拱)以内的松动岩体的重量。因此,问题归结于如何确定出天然拱(即坍落拱)的尺寸,如图 8-37 所示。

在松散介质中开挖坑道,其上方形成坍落拱。该坍落拱外缘为一质点拱(即厚度很薄的拱),如图 8-38 所示,其存在条件有两个:

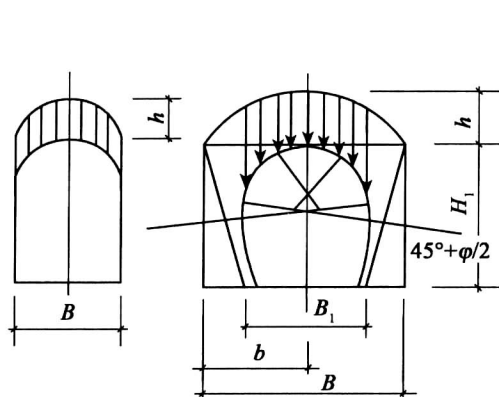


图 8-37 坍落拱

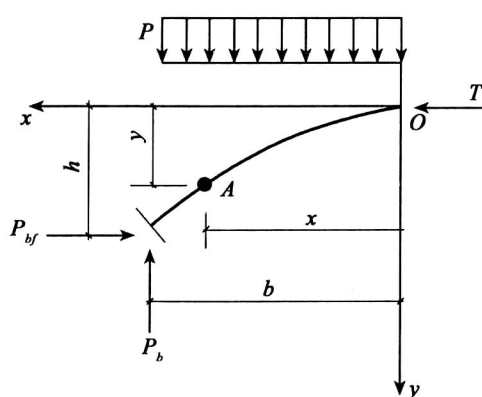


图 8-38 质点拱

- ①在任何一截面上无弯矩作用;
- ②拱脚能保持稳定而不致产生滑动。

由上述第一个条件,对 A 点取矩 $\sum M_A = 0$, 则 $TY = \frac{px^2}{2} = 0$, 有

$$y = \frac{px^2}{2T} \quad (8-127)$$

式中, T 为拱顶推力, P 为作用在“天然拱”上的竖向均布压力; x, y 为质点拱上任意一点 A 的坐标。

令 $x=b, y=h$, 代入上式, 得

$$T = \frac{pb^2}{2h} \quad (8-128)$$

式中, b 为坍落拱半跨度; h 为坍落拱高度。

由式(8-127)及式(8-128)可见, 坍落拱的外缘曲线为二次抛物线。

由第二条件可知, 要保持拱脚稳定而不滑动, 拱脚处水平摩阻力必须大于该处的推力 T , 取安全系数为 2, 则有

$$\frac{P_h f_{up}}{T} = 2 \quad (8-129)$$

将式(8-128)代入式(8-129), 则可得

$$h = \frac{b}{f_{up}} \quad (8-130)$$

式中, f_{up} 为普氏系数。

作用在支护结构上竖直均布压力为

$$q = \gamma h \quad (8-131)$$

作用在支护结构上的侧压力也视为均匀分布, 可按一般土力学原理, 由下式计算:

$$e = \left(q + \frac{1}{2} \gamma H \right) \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (8-132)$$

式中, H 为坑道高度; q 为水平均布围岩压力 (kN/m^2); φ 为围岩的似摩擦角。

按普氏地压理论计算的竖向压力, 对于软土质地层偏小, 对于硬土质和坚硬质地层则偏大。一般在松散、破碎围岩中较为适用。

(2) K. Terzaghi 理论。K. Terzaghi (1942) 把隧道围岩视为散粒体。他认为, 坑道开挖后, 其上方围岩将形成卸落拱, 如图 8-39 所示。假定坑道上方岩体因坑道变形而下沉, 并产生错动面 OAB , 假定作用在任何水平断面上的竖向压应力 σ_v 是均布的, 相应的水平压应力 σ_h 与 σ_v 的比值为 K , 即 $K = \sigma_h / \sigma_v$ 。在距地面深度 h 处, 取出一厚度为 dh 的水平条带, 考虑其平衡条件 $\sum V = 0$, 得出

$$\frac{d\sigma_v}{\gamma - K\sigma_v \tan \frac{\varphi}{b}} - dh = 0 \quad (8-133)$$

式中, φ 为围岩似摩擦角; b 为松动宽度之半。

将式(8-133)积分, 并引进边界条件 $h=0, \sigma_v=0$, 得

$$\sigma_v = \frac{\gamma b}{K \tan \varphi} (1 - e^{-K \tan \varphi \frac{h}{b}}) \quad (8-134)$$

随着隧道埋深 h 的增大, 式中 $e^{-K \tan \varphi \frac{h}{b}}$ 趋近于零, 则 σ_v 趋近于某一个固定值, 且

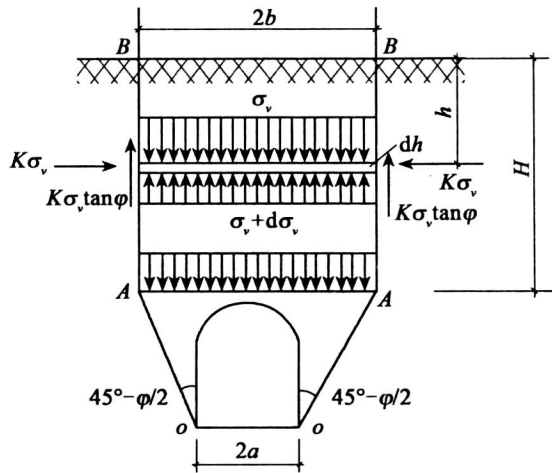


图 8-39 压力计算图式

$$\sigma_v = \frac{\gamma b}{K \tan \varphi} \tag{8-135}$$

K. Terzaghi 根据实验结果,得出 $K=1.0 \sim 1.5$,取 $K=1.0$,则

$$\sigma_v = \frac{\gamma b}{\tan \varphi} \tag{8-136}$$

如以 $\tan \varphi=f$ 代入式(8-136),则

$$\sigma_v = \frac{\gamma b}{f} = \gamma h \tag{8-137}$$

此时便与普氏理论一致。

(3)我国有关部门推荐的围岩压力计算方法。我国公(铁)路部门以工程模拟法为基础,统计分析了我国数百公(铁)路隧道的坍塌方调查资料,统计出围岩竖直均匀压力的计算公式。我国《公路隧道设计规范》(JTG70—2004)亦推荐此计算方法,即

$$q=0.45 \times 2^{s-1} \times \gamma \omega \tag{8-138}$$

式中, q 为围岩竖直均布压力(kN/m^2); s 为围岩类别,如属 V 类围岩,则 $s=5$;如果属第 II 类围岩,则 $s=2$; γ 为围岩容重(kN/m^3); ω 为宽度影响系数, $\omega=1+i(B-5)$; i 为以 $B=5\text{m}$ 的围岩竖直均布压力为基准, B 每增减 1m 时围岩压力的增减率,当 $B<5\text{m}$ 时,取 $i=0.2$;当 $B>5\text{m}$ 时,取 $i=0.1$ 。

式(8-138)的适用条件为: $H/B<1.7$, H 为隧道开挖高度(m), B 为隧道宽度(m),不产生显著偏压力及膨胀力的一般围岩。

围岩水平均布压力可按表 8-5 中的经验公式计算,其适用条件同式(8-138)。

表 8-5 围岩水平均布压力 (kN/m^2)

围岩类别	I、II	III	IV	V	VI
水平均布压力 e	0	$<0.15q$	$(0.15 \sim 0.3)q$	$(0.3 \sim 0.5)q$	$(0.5 \sim 1.0)q$

W_1 , 未扰动岩体对整个滑动体的阻力为 F , 当岩体 $EFHG$ 下沉, 两侧受到的阻力为 T 或 T' 。

表 8-7 各类围岩的 θ 角

围岩类别	$\geq \text{IV}$	III	II
$\theta_{\text{值}}$	0.9φ	$(0.7 \sim 0.9)\varphi$	$(0.5 \sim 0.7)\varphi$

由图 8-40 中可见, 作用在 HC 面上的垂直压力总值为

$$\theta_{\text{浅}} = W - 2T' = W - 2T \sin \theta \quad (8-140)$$

三棱体自重为

$$W_1 = \frac{1}{2} \gamma h \frac{h}{\tan \beta} \quad (8-141)$$

式中: γ 为岩体容重; h 为坑道底部到地面的距离; β 为破裂面与水平面的夹角。

在图 8-40 中, 按正弦定律得

$$T = \frac{\sin(\beta - \varphi_g) W_1}{\sin[90^\circ - (\beta - \varphi_g + \theta)]} \quad (8-142)$$

将式(8-141)代入式(8-142)得

$$T = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\lambda}{\cos \theta} \quad (8-143)$$

式中, λ 为侧压力系数。

$$\lambda = \frac{\tan \beta - \tan \varphi_g}{\tan[1 + \tan \beta (\tan \varphi_g - \tan \theta) + \tan \kappa_g \tan \theta]}$$

$$\tan \beta = \tan \varphi_g + \sqrt{\frac{(\tan^2 \varphi_g + 1) \tan \varphi_g}{(\tan \varphi_g - \tan \theta)}}$$

至此, 极限最大阻力 T 值可求得。得到 T 值后, 代入式(8-140), 可求得作用在 HC 面上的总垂直压力, 即

$$\theta_{\text{浅}} = W - 2T \sin \theta = W - \gamma h^2 \lambda \tan \theta \quad (8-144)$$

由于 GC 、 HD 与 EG 、 FH 相比往往较小, 而且衬砌与土之间的摩擦角也不同, 前面分析时均按 T 计算。当中间土块下滑时, 由 FH 及 GE 面传递, 考虑压力稍大些对设计的结构也偏于安全, 因此, 摩擦阻力 T 不计隧道部分而只计洞顶部分, 即在计算中用埋深 H 代替 h , 这样, 式(8-144)则为

$$\theta_{\text{浅}} = W - \gamma H^2 \lambda \tan \theta$$

由于 $W = B_i H \gamma$, 故

$$\theta_{\text{浅}} = B_i H \gamma - \gamma H^2 \lambda \tan \theta = \gamma H (B_i - H \lambda \tan \theta) \quad (8-145)$$

式中, B_i 为坑道宽度; H 为洞顶至地面的距离, 即埋深; λ 为侧压力系数; γ 为围岩容重。

换算为作用在支护结构上的均布荷载如图 8-41 所示, 即

$$q_{\text{浅}} = \frac{Q_{\text{浅}}}{B_i} = \gamma H \left(1 - \frac{H}{B_i} \lambda \tan \theta \right) \quad (8-146)$$

作用在支护结构两侧的水平侧压力为

$$e_1 = \lambda \gamma H$$

$$e_2 = \lambda \gamma h$$

侧压力视为均布压力时为

$$e = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \quad (8-147)$$

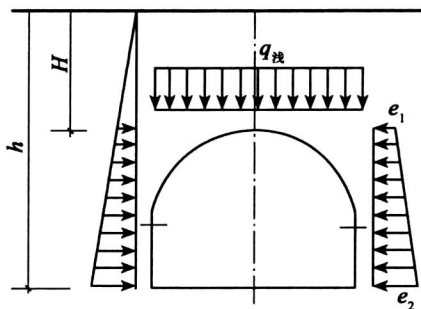


图 8-41 支护结构上均布荷载

8.4.3.3 围岩压力控制

当围岩压力较大,围岩不能自稳时,就需借助于支护和围岩加固手段以控制围岩,维护岩石地下工程的稳定,实现安全施工,并满足在服务年限内的运行和使用要求。

岩石地下工程稳定所涉及的因素比较多,尤其在一些复杂地质条件下,更是一个困难的问题。地下工程往往受条件制约,必须面对复杂的地质环境、围岩结构,决定了其维护工作的困难性。但是,即使如此,工程中总还有一些可控或可调节的因素,因此在岩石地下工程的设计与施工中,就要根据其稳定的基本原则,充分利用有利条件,采取合理措施,保证在经济的原则下,实现工程稳定。

从前面的分析可知,充分发挥围岩的自承能力,是实现岩石地下工程稳定的最经济、最可靠的方法,所以岩体内的应力及其强度是决定围岩稳定的主要因素。当岩体应力超过强度而设置支护时,支护应力与支护强度便成了岩石工程稳定的决定性因素。因此,维护岩石地下工程稳定的出发点和基本原则就是合理解决这两对矛盾。

1. 合理利用和充分发挥岩体强度

地下的地质条件相当复杂,软岩的强度可以在 5MPa 以下,而硬岩石可达 300MPa 以上。即使在同一岩层中,岩性的好坏也会相差很大,其强度甚至可以相差十余倍。岩石性质的好坏是影响稳定最根本、最重要的因素。因此,应在充分比较施工和维护稳定两方面经济合理性的基础上,尽量将工程位置设计在岩性好的岩层中。

避免岩石强度的损坏。工程经验表明,在同一岩层中,机械掘进的巷道寿命往往比爆破施工长得多,这是因为爆破施工破坏了岩石的原有强度。资料表明,不同爆破方法可以降低岩石基本质量指标 10% ~ 34%,围岩的破裂范围可以达到巷道半径 33% 之多。另外,被水软化的岩石强度常常要降低五分之一以上,有时甚至完全被水崩裂潮解。特别是一些含蒙

脱石等成分的泥质岩石,还有遇水膨胀等问题。因此,施工中要特别注意加强防、排水工作。采用喷射混凝土的方法封闭岩石,防止其软化、风化,也是维护巷道的有效措施。

充分发挥岩体的承载能力。通过围岩与支护共同作用原理的分析已经清楚,围岩在地下岩石工程中起到举足轻重的作用。因此,在围岩承载能力允许的范围内,适当的围岩变形可以增加围岩的内应力,使其更多地承受地压作用,减少对支护结构的强度和刚度要求,这对实现工程稳定及其经济性有双利的效果。

加固岩体。当岩体质量较差时,可以采用锚固、注浆等方法加固岩体,提高岩体强度及其承载能力。岩体结构面、破碎带等结构破坏的影响往往是强度被削弱的主要原因。因此,采用加固岩体的锚喷支护、注浆等经济的方法,可能会收到意想不到的效果。

2. 改善围岩的应力条件

(1) 选择合理的隧道断面形状和尺寸。岩石怕拉耐压,岩石的应力状态也影响岩石强度大小。因此,确定隧道断面形状应尽量使围岩均匀受压。如果不易实现,也应尽量不使围岩出现拉应力,使隧道的高径比和地应力场匹配,这就是前面讨论的等压轴比和零应力轴比的意义。当然,也应避免围岩出现过高的应力集中,造成超过强度的破坏。

(2) 选择合理的位置和方向。岩石工程的位置应选择在避免受构造应力影响场地;如无法避免,则应尽量弄清楚构造应力的方向、大小、方向等情况。国外特别强调使隧道轴线方向和最大主应力方向一致,尤其要避免与之正交。实践还表明,顺层隧道围岩的稳定性往往较穿层隧道差。支护应特别注意这种地压的不均匀性。

(3) “卸压”方法。近几年,国内外开展“卸压”支护方法研究,它是在一些应力集中的区域,通过钻孔或爆破,甚至专门开挖洞室,改变围岩应力的不利分布,也可以避免高应力向不利部位传递。所以,“卸压”方法常作为解决煤矿采区巷道底臃的一种有效措施。

3. 合理支护

合理的支护包括支护的形式、支护刚度、支护时间、支护受力情况的合理性以及支护的经济性。支护应该是隧道稳定的加强性措施。因此,支护参数的选择仍应着眼于充分改善围岩应力状态,调动围岩的自承能力和考虑支护与岩体的相互作用的影响;在此基础上,注意提高支护的能力和效率。例如,锚杆支护能起到意想不到的效果,就因为它是一种可以在内部加固岩体的支护形式,它有利于岩石强度的充分发挥。另外,当地压可能超过支护构件能力时,使支护具有一定的可缩性,也是利用围岩支护共同作用机理来实现围岩稳定,并保证支护不被破坏的经济有效方法。

4. 强调监测和信息反馈

由于隧道地质条件复杂且难以完全预知,岩体的力学性质具有许多不确定性因素,因此,岩石地下工程施工所引起的岩体效应就不能像“白箱”那样操作,容易获得一个确定性的结果。所以,通过围岩在施工中的反应,判断其“黑箱”中的有关内容和推测以后可能出现的变化规律,就成为控制隧道稳定最现实的方法,目前国内外普遍强调监测和信息反馈技术,通过施工过程和后期的监测,结合数学和力学的现代理论,获得预测的结果或用于指导设计和施工的一些重要结论,例如,国际流行的“新奥法”支护技术的一项重要措施就是监测与反馈。

8.5 深部岩体力学问题

随着经济建设与国防建设的不断发展,地下空间开发不断走向深部,如逾千米乃至数千米的矿山(如金川镍矿和南非金矿等),水电工程埋深逾千米的引水隧道,核废料的深层处置,深层地下防护工程(如700m防护岩层下的北美防空司令部),等等。伴随着深部岩体工程,发生了一系列新的岩体力学问题,这与浅部岩体工程相比具有较大的差异,而用传统的连续介质力学理论无法圆满解决,引起了全世界岩土力学工程领域专家学者的极大关注,成为当前研究的热点。

8.5.1 深部岩体的特点

深部岩体由于其结构、变形、高应力、高温、结构与材料储能等特点,其物理力学性状与浅部岩体相比有显著的不同,主要为:

(1)深部岩体具有非均匀、非连续特点。深部岩体作为地质体,是由地质构造破碎带、裂隙和节理纵横交割为尺寸大小不同的岩块。把深部岩体作为具有不同尺寸等级岩块构造的块系集合来研究,这个块系集合的尺度存在着自相似规律。分析深部岩体的变形与破坏时,首先必须掌握工程场地的岩体宏观至细观的结构特点。

(2)深部岩体变形具有非协调、非连续特点。岩体变形由岩块变形和岩块边界面(结构面)附近区域以及岩体弱化区(裂缝处)的变形组成,而后者占岩体变形的主要部分。岩块变形可以是协调的,也可由于微裂纹的产生、扩展而变成非协调、非连续的。岩体结构面的变形往往是非协调、非连续的。岩体的破坏和失稳可以是岩体弱化区(裂缝处)剪切带的形成、岩桥的贯穿、裂隙群的扩张,也可以是完整岩块中裂纹的产生、扩展引起的破坏,一般前者是主要的,因此,需要采用非协调、非连续、非线性的弹塑性力学分析方法进行研究。

(3)深部岩体具有非常高的应力状态。一些区域处于由稳定向不稳定发展的临界应力状态,即不稳定的临界平衡状态,这种高应力状态不但存在于岩块内,也存在于结构面处。当外部施加一定扰动时(包括开挖洞室和巷道、地下爆破或爆炸、水库充水等),岩体可能由渐进蠕变发展到破坏,即局部交替碎裂现象,也可能由动力突变产生破坏,表现为岩爆、岩块冲击地震、突水或瓦斯突出,或者产生自组织现象进入新的岩体结构和平衡状态。这方面研究的重点是搞清楚临界状态发展成不稳定的渐进或突变的条件,或者变形和自组织现象的条件。研究的数学模型和方法必须考虑材料的几何性质以及变形的不可逆性、耗散性和非连续性。

(4)深部岩体具有储能特点。由于深部岩体材料黏结力、内摩擦和剪胀性及结构面的摩擦和黏结,在地质构造运动和自重应力作用下积累了弹性变形能和位能。此时的岩体宏观能量平衡是在一定的约束条件下维持的,当扰动破坏约束条件改变时,变形能可以转化为动能。研究岩体平衡的约束条件以及变形能的转化条件和形式,必须采用储能材料和储能结构数学模型,此时材料单元采用能反映内摩擦、黏性和剪胀特性的组合结构单元,平衡变形和运动方程必须能反映变形与微变形、应力与微应力、宏观能量平衡和微观能量平衡的特点,这构成深部岩体力学分析的另一个方面。

(5) 深部岩体具有块系结构特点。变形的非协调、非连续特点、高应力状态特点以及介质的储能特点充分反映深部岩体在动载作用下的动力反应特性,包括岩体变异反应现象、宽频谱慢速摆动波系的产生、超常的岩体低摩擦现象、岩体的低频拟共振现象等,这就要求更准确地模拟岩体块系的相互作用,更准确地描述块系的变形和运动、岩块材料变形,建立精确反映深部岩体诸特点的变形、动力和运动方程及其数学模型,从而能解释上述动力现象,并给出产生这些动力现象的条件,以便在矿山工程、地震工程、地下工程中利用这些现象或者预防产生这些现象。

8.5.2 深部岩体工程力学特性

8.5.2.1 分区破裂化现象

在深部岩体中开挖洞室或巷道时,其两侧和工作面前的围岩中会产生交替的破裂区和不破裂区,称这种现象为分区破裂化现象。从很多的深部工程实例可以归纳出如下的分区破裂化现象的规律性:围岩中的分区破裂化现象大致发生在深部岩体围岩中的初始垂直地应力 $\sigma_{\text{地}}$ 大于岩体单轴压缩强度极限 R_c 的情况下;分区破裂化现象中破裂区的数量取决于 $\sigma_{\text{地}}/R_c$ 比值,比值越大,破裂区越多,反之则越少;分区破裂化现象既可发生在巷道钻爆法施工时,也可发生在巷道机械化掘进时;巷道机械法掘进时,开始发生分区破裂化时的岩体初始地应力一般高于钻爆法掘进时开始发生分区破裂化时相应初始地应力,这意味着,卸载速度对分区破裂化现象的产生也有一定的影响。

8.5.2.2 岩爆与冲击动力现象

自 18 世纪以来,人们在矿山工程中已熟悉了以岩块弹射和岩块冒落为表现形式的岩爆现象,岩块弹射的速度可达 10m/s,足以损伤人员和设备。这一类的岩爆主要发生在开挖面,但在围岩内部以及岩体深部,也会发生冲击动力现象,其本质都是相同的,即岩体失稳导致岩体位移和运动。虽然岩爆和岩体冲击的机理目前尚未十分清楚,但是关于岩体中的高地应力以及岩体内部储存的大变形能是其发生的必要内部因素,已取得了广泛的共识,即 Cook 提出的岩爆发生的能量过剩原理(Energy Excess)。据此不难理解:为什么岩爆发生于深部地下矿区;水库诱发地震的震源为什么位于地下 1000 ~ 3000m 的深度;为什么地下爆破诱发地震的能量会超过爆破炸药的总能量。例如,1989 年俄罗斯在基洛夫地区矿山实施的 230t 当量($10^8 \sim 10^9$ J)地下爆破,其诱发的地震能量为 10^{12} J。随着对深部岩体中动力现象发生机理研究的不断深入,又取得了一系列相关成果。当动力冲量作用于岩体时,由于岩体的振动,岩石间的相对压紧程度会随时间变化。可以设想,在某些时刻,当岩块间相对疏松时,岩石间的摩擦力和摩擦系数会大大降低(降低达数倍),这就是所谓的岩体的超低摩擦效应。由于超低摩擦效应,岩块的运动更加容易产生。由于摩擦系数的降低,平衡的约束条件被破坏,岩体的临界平衡条件变化导致岩块的运动;还有岩体拟共振现象,由于超低摩擦效应是与岩块系的振动同时产生的现象,所以其大小应是随时间而变化的,即具有频率特性,当激动力冲量的频率与其相应时,可以预期岩块的运动(振动)会加剧,这种岩体的拟共振现象在实验室和野外测试中都已经观察到。俄罗斯某些油田利用地面激振法在油井的采油末期,提高采油量 50% ~ 100%,其原理就是利用了超低摩擦效应和拟共振现象。

由上述的深部岩体工程力学特性可见,深部岩体工程与浅部岩体工程相比具有显著不

同,也与基于连续介质弹塑性力学的分析有所不同。按照传统的连续介质弹塑性力学的概念,由于巷道的开挖、应力集中及应力重分布,在巷道围岩中形成了不同的区域,在这些区域内,岩石处于不同的应力、变形状态,由巷道周边从表到里分别为破裂区、塑性区和弹性区。而在深部岩体工程围岩中,则出现破裂区和非破裂区多次交替的现象。因此,分区破裂现象是深部岩体工程响应的特征和标志,在分析深部岩体工程围岩的变形、破裂和稳定性时,必须考虑分区破裂现象及破裂区的残余强度,它是深部岩体工程的开挖、支护设计和施工的关键。根据分区破裂现象来界定深部岩体工程,就可以得到深部岩体工程明确的概念。当然,对于深部岩体的工程地质和岩体力学条件,不可能得到“深部”这个词的具体量值,由上面所介绍的分区破裂现象可知,分区破裂现象的出现与深部岩体工程所在地的地应力值有关,与巷道或洞室开挖引起的应力集中系数有关,即与巷道形状有关,还应与巷道(洞室)开挖引起的力学特性(极限强度、变形模量等)有关。但是,由于分区破裂现象目前尚处于定性分析阶段,还没有达到定量分析的精确阶段,所以,尚没有一个定量界定“深部”的具体公式,这也成为今后深部岩体力学研究的一个任务。俄罗斯学者在假定 $\sigma_{\text{地}}=\gamma H$ 后,曾经推出了一个界定“深度”的公式,该公式包含了应力集中系数、岩体单轴压缩强度、岩体弹性模量、拉伸与压缩模量以及岩石的极限拉伸变形,但是由于推导该公式的分区破裂化机理不全面,因此该公式在实践中并没有得到承认和推广。

8.5.3 深部岩体工程施工设计特点

深部岩土力学关于岩爆、大变形以及分区破裂化的机理和发生发展规律目前仍是一个正在研究的课题,因此,关于岩爆、大变形以及分区破裂化条件下的设计计算理论尚未形成。

(1)对浅部地下工程,地应力水平低,按照传统的岩土力学弹塑性理论,洞室周围依次出现塑性区(松动圈)、弹性应力区和未扰动区。地下工程设计理论就是及时支护,与围岩共同作用,使围岩应力小于岩石强度,允许围岩变形,防止围岩破坏,所以在岩石应力-应变曲线上该部分工作在峰值强度前加荷段上。对深部地下工程,地应力水平高,一旦开挖卸荷,围岩即破坏。围岩工作在岩石应力-应变全过程曲线的峰值强度后下降段,部分围岩中形成剪切滑移线,裂缝开裂,产生所谓的局部化变形,该部分工作在残余强度。所以,深部地下工程的设计计算是建立在非连续、非协调的非线性岩土力学基础上,是研究计算围岩中的局部化变形及其应力状态。

(2)浅部地下工程开挖后,围岩一般不会破坏,因此采用一次支护即可实现工程的稳定性,而深部开挖后,围岩即破坏,因此一次支护就不能满足工程稳定性要求,必须采用二次支护或多次支护才能实现工程的稳定性。

(3)深部地下工程施工设计特点:采用二次支护稳定性控制设计理论;大变形支护的主要特点是柔性屈服支护;调动深部围岩强度,控制深部大变形隧道地压;缩小开挖断面;按照分区破裂化设置不同深度锚杆,调动不同深度未破裂区围岩强度。

第9章 岩土力学数值分析方法

9.1 概 述

岩土不仅仅是一般材料,更是一种地质结构体,岩土具有非均质、非连续、非线性以及复杂的加载、卸载条件和边界条件,这使得岩土力学问题通常无法用解析方法简单地求解。相比之下,数值法具有较广泛的适用性,它不仅能模拟岩土体的复杂力学与结构特性,也可很方便地分析各种边值问题和施工过程,并对工程进行预测和预报。因此,岩土力学数值分析方法是解决岩土工程问题的有效工具之一。

9.1.1 岩土工程问题的基本特点

1. 工程类型的多样性

土木建筑、水利水电、交通、矿山、能源、港口与航道以及国防等多行业广泛应用岩土工程学科的内容,其涉及的工程类型复杂且多样。各类工程的设计施工时,尽管不同地基或不同地质环境、不同的工程类型各有特点,其关键技术问题的侧重点可能不同,但原则上都必须考虑稳定或平衡问题、应力变形与固结问题、地下水与渗流问题、水与土(岩)相互作用问题、土(岩)与结构相互作用问题以及土(岩)的动力特性问题等。

2. 材料性质的复杂性

岩土材料是一种天然地质体,它既可能以松散堆积物的形式存在,也可能以相对完整的岩体存在。而岩体一般存在各种裂隙,有时很难区分其是属于岩体还是土体。岩土体往往是非均匀介质,有时还呈现空间不连续性以及几何形状的任意性;岩土材料一般不是线性材料,其应力应变关系远比单纯的线弹性关系复杂,同时,往往表现为强烈地域性特征;岩土材料变形与强度还可能随时间变化,即流变性质;岩土材料一般是三相体,处于饱和或非饱和时,又往往表现出性质的差异,尤其对于某些特殊土更是如此。为了如实地表达不同区域的岩土工程问题,必须进行必要的勘察、试验,使用一些能够描述各种岩土材料基本性质的非线性或弹塑性本构模型。

3. 荷载条件的复杂性

不同的工程因其型式、使用要求不同或者施工方式不同等,其荷载条件也不同,且复杂多样,包括静力和动力荷载。例如,房屋建筑对地基的作用以建筑物荷载、风荷载为主;基坑开挖、隧洞开挖主要是应力解除;土石坝施工是逐级加载,以自重为主,而土石坝运行期则是水压力和渗流为主;地震、爆炸是突加动力荷载等。

4. 初始条件与边界条件的复杂性

工程地质和水文地质条件不同、周边环境不同,造成各种问题的初始条件和边界条件不同,有时甚至比较模糊。典型的例子是土体的初始应力或初始变形往往很难准确确定。边界条件的确定有时也难以完全符合实际,这就要求设计计算者进行适当的简化或近似处理。求解工程问题和进行数值模拟时应综合考虑各方面因素,要比较确切地反映各种复杂的初始条件与边界条件。

5. 相互作用问题

相互作用包括两种类型:一是土(岩)水相互作用;二是土(岩)与结构或颗粒(岩块)间相互作用。岩土体中水的存在和流动对其性质将产生影响,有时这种影响是巨大的,不可忽视。水的存在除了产生浮力、水压力等静水力学特征外,当发生渗流时,将对岩土体产生超静孔隙水应力和渗流力。岩土体与结构处于一个共同作用系统。由于岩土体,尤其是土体,与结构的性质有很大不同,它们在共同作用的过程中相互间力图彼此变形协调,其间发生力的相互传递并最终达到变形协调,因此,势必存在岩土体与结构的相互作用问题,例如,地基、基础、上部结构的相互作用;土石坝防渗墙与地基及坝体的相互作用;桩、挡土墙、锚杆、加筋材料等与土的相互作用;裂隙岩体的岩块间相互接触,在受力过程中发生的相互作用等。

9.1.2 岩土工程数值分析方法的类型

数值分析方法是随着计算机技术发展而形成的一种计算分析方法,已有多种岩土工程数值分析方法。20世纪60年代后逐步发展的数值分析方法主要有有限元法(Finite Element Method, FEM),有限差分法(Finite Different Method, FDM),边界元法(Boundary Element Method, BEM),离散元法(Discrete Distinct Element Method, DEM),非连续变形分析法(Discontinuous Deformation Analysis, DDA),流形元法(Numerical Manifold Method, NMM)等。此外,随着人们对提高数值计算精度的期望以及现场测试水平和计算技术的提高,岩土参数反演分析法(Inverse Analysis Method, IAM)或反分析法(Back Analysis Method, BAM)也同时得到了充分重视和发展。有理由相信,不但现有的方法将会进一步完善,而且还有可能产生各种新的数值方法,如复合问题多变量的耦合方法。

有限元法基于最小总势能变分原理,能方便地处理各种非线性问题,能灵活地模拟岩土工程中复杂的施工过程,因而成为岩土力学领域中应用最广泛的数值分析方法。

边界元法以表述拜特(Betti)互等定理的积分方程为基础,建立了直接法的基本方程,而基于叠加原理建立了间接法的总体方程;因其前处理工作量少、能有效模拟远场效应而普遍应用于无界域或半无界域问题的求解。

有限差分法是将问题的基本方程和边界条件以简单、直观的差分形式来表述,使得其更易于在工程实际中应用,尤其是近年来FLAC程序在国内外的广泛应用,使得有限差分法在解决岩土力学问题时又获得新生。

离散单元法是康德尔(Cundall, 1971)以刚性离散单元为基本单元,根据牛顿第二定律,提出的一种动态分析方法。随后又将其发展为变形离散单元(简单变形离散单元和充分变形离散单元),使之既能模拟块体受力后的运动,又能模拟块体本身受力变形状态。自20

世纪 80 年代中期引入我国后,在边坡工程、隧道工程、采矿工程及基础工程等方面都有重要应用。

流形方法是由石根华等人(1992,1996)发展的一种新的数值分析方法。这种方法以拓扑学中的拓扑流形和微分流形为基础,在分析域内建立可相互重叠、相交的数学覆盖和覆盖材料全域的物理覆盖,在每一物理覆盖上建立独立的位移函数(覆盖函数),将所有覆盖上的独立覆盖函数加权求和,即可得到总体位移函数。然后,根据总势能最小原理,建立可以用于处理包括非连续和连续介质的耦合问题、小变形、大位移、大变形等多种问题的求解格式。它是一种具有一般形式的通用数值分析方法,有限元法和不连续变形分析法(DDA)都可看做是它的特例。

岩土工程问题本身是一个高度复杂的不确定和不确知系统,其物性参数、本构模型、计算边界条件等通常无法准确确定。而从量测信息(位移、应力、温度等)出发,用反分析的方法来确定各类计算模型参数的反分析方法得到了迅速的发展,目前已成为解决复杂岩土力学问题的重要方法,在岩石坝基、高速公路路基、基坑、高边坡、地下洞室围岩和支护等诸多领域都有广泛应用。

反分析法越是广泛应用和发展,就越要强调试验研究(包括现场观测)的作用和地位。试验结果一方面能够提供数值分析所需要的参数或部分参数,另一方面又能够检验和评价各种解答的可行性、精度。试验是进一步完善理论的重要依据,能够推动理论的发展和研究的深入。试验研究是不可替代的,特别是对于某些重要工程和特别工程环境。

所有这些数值方法的共同特点是:将带有边值条件的常微分方程或偏微分方程离散为线性代数方程组,采用适当的求解方法解方程组,获得基本未知量,进而根据几何方程和物理方程,求出研究范围内的其他未知量。

还有不少其他的数值分析方法和各种数值方法的相互耦合方法。同时,由于实际岩土体具有模糊性、随机性和各种不确定性,因此,非确定性数值分析方法也有长足的进展。

由于篇幅所限,本章仅简要介绍有限元法、边界元法、有限差分法和离散元法的基本内容。

9.2 有限元法

有限元法(Finite Element Method)是目前已广为应用的岩土工程与结构分析的有力工具,该法是把一个实际的结构物或连续体用一种由多个彼此相联系的单元体所组成的近似等价物理模型来代替。通过结构及连续体力学的基本原理及单元的物理特性建立起表征力和位移关系的方程组,解方程组求其基本未知物理量,并由此求得各单元的应力、应变以及其他辅助量值。有限元法按其所选未知量的类型,即以节点位移作为基本未知量,或以节点力作为基本未知量,或二者皆有,可分为位移型的、平衡型的和混合型的有限元法。由于位移型有限元法在计算机上更易实现复杂问题的系统化,且便于电算求解,更易推广到非线性和动力效应等其他方面,所以,位移型有限元法比其他类型有限元法应用更为广泛。因此,本节以平面三节点三角形单元为例,简单介绍位移型有限元法的基本方程。

9.2.1 有限元法的基本方程

9.2.1.1 单元位移函数及插值函数

如图9-1所示的典型三节点三角形单元,其三个节点的总体编号为 i, j, k 。为了使推导出的计算公式具有一般性,现引入节点的局部编号为1,2,3。在总体坐标系中,各节点的位置坐标分别是 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 和 (x_3, y_3) 。规定在节点1处沿 x 轴方向的位移分量是 u_1 ,沿 y 轴方向的位移分量是 v_1 ;同理,节点2的位移分量是 u_2, v_2 ,节点3的位移分量是 u_3, v_3 。

根据单元位移模式应具有完备性和协调性的要求,即要求单元的位移函数必须能够满足刚体位移和常应变状态,在单元内部及相邻单元的边界上位移必须连续,作为三节点三角形单元的近似位移函数 $u(x, y), v(x, y)$ 可写为

$$\begin{cases} u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases} \quad (9-1)$$

将三个节点的坐标值和位移值代入式(9-1),得到6个方程,联立求解获得系数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$,将它们再代入式(9-1)得到

$$\begin{cases} u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 \\ v(x, y) = N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 \end{cases} \quad (9-2)$$

或写为

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} \quad (9-3)$$

式中, $\{\delta\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$ (单元节点位移列阵)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

称为形状函数矩阵,其中

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad i = 1, 2, 3 \quad (9-4)$$

为形状函数或插值函数,具有如下两个特性:

(1) $N_i(x, y)$ 在 i 节点处的值为1,在其他 j 节点处的值为0,即

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1, i = 1, 2, 3 \\ N_i(x_j, y_j) = 0, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (j \neq i) \quad (9-5)$$

(2) 全部形状函数之和等于1,即

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x, y) = 1 \quad (9-6)$$

系数 a_i, b_i, c_i 分别为

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, a_j = x_m y_i - x_i y_m, a_m = x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_m, b_j = y_m - y_i, b_m = y_i - y_j \\ c_i &= x_m - x_j, c_j = x_i - x_m, c_m = x_j - x_i \end{aligned} \quad (9-7)$$

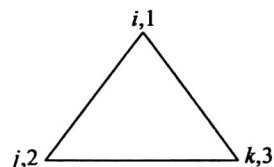


图9-1 三角形单元

Δ 是三角形单元的面积, 即

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - \frac{1}{2} (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)$$

9.2.1.2 单元应变矩阵和单元应力矩阵

确定了单元位移函数后, 可以很方便地利用几何方程和物理方程求得单元应变和应力。根据几何方程, 单元应变为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = (L)(N) \{\delta\}$$

记 $(B) = (L)(N)$

$$\text{则} \quad \{\varepsilon\} = (B) \{\delta\} \quad (9-8)$$

式中, (B) 称为单元应变矩阵, 即几何矩阵, (B) 可写为分块形式, 即

$$(B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} = (B_1 \quad B_2 \quad B_3) \quad (9-9)$$

式中,

$$(B_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix} \quad i=1,2,3 \quad (9-10)$$

为一常数矩阵。

由 $\{\varepsilon\} = (B) \{\delta\}$ 可知, 三角形平面单元内应变列阵是常数列阵, 通常称三角形单元是常应变单元。由此可见, 用该单元分析问题, 若在该问题应变梯度较大 (也即应力梯度较大) 的部位, 单元划分应适当加密; 否则, 将不能反映应变的真实变化而导致较大的误差。

将式(9-8)及式(9-9)代入物理方程, 可得单元应力为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} = (D)(B) \{\delta\} = [S] \{\delta\} \quad (9-11)$$

式中,

$$[S] = [D][B] = (D)[B_1 \quad B_2 \quad B_3] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3] \quad (9-12)$$

称为应力矩阵,其中,[D]为弹性矩阵;[S_i]的分块矩阵,可表示为

$$[S_i] = [D][B_i] = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)\Delta} \begin{pmatrix} b_i & \nu_0 c_i \\ \nu_0 b_i & c_i \\ \frac{1-\nu_0}{2} c_i & \frac{1-\nu_0}{2} b_i \end{pmatrix} \quad (9-13)$$

式中, E_0, ν_0 为材料常数。

对于平面应力问题:

$$E_0 = E, \nu_0 = \nu \quad (9-14)$$

对于平面应变问题:

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (9-15)$$

与几何矩阵[B]相同,应力矩阵[S]也是常数矩阵,即单元中各点的应力是相同的。

9.2.1.3 单元刚度方程及总体刚度方程

设岩土体或结构物发生虚位移,单元节点的虚位移为 $\{\delta^*\}$,相应的虚应变为 $\{\varepsilon^*\}$,则根据虚功原理有

$$\iint_{A_n} \{\delta^*\}^T [N]^T [\bar{F}] t dA + \int_{\partial A_n} \{\delta^*\}^T [N]^T [\bar{P}] t ds = \iint_{A_n} \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} t dA \quad (9-16)$$

式中, A_n 是单元 n 的面积; t 是单元厚度;左边第一项积分是体力在虚位移上所作的虚功,第二项积分是面力在虚位移上所作的虚功,如果计算单元 n 不是边界单元或在边界上没有面力的作用,则第二项积分为零。

将上式化简,得

$$\{\delta^*\}^T \{F\} = \{\delta^*\}^T \left(\iint_{A_n} [B]^T [D] [B] t dA \right) \{\delta\} = \{\delta^*\}^T [k] \{\delta\} \quad (9-17)$$

式中,

$$[k] = \iint_{A_n} [B]^T [D] [B] t dA = [B]^T [D] [B] t \Delta \quad (9-18)$$

称为单元刚度矩阵。

由于 $\{\delta^*\}$ 的任意性,等式两边与其相乘的矩阵相等,则有

$$\{F\} = [k] \{\delta\} \quad (9-19)$$

设弹性体剖分成 n 个单元,总应变能等于各单元应变能之和;总外力虚功应等于单元外力虚功之和。根据虚功方程

$$\sum_{i=1}^n \left(\{\delta^*\}^T \{F\} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\{\delta^*\}^T [k] \{\delta\} \right) \quad (9-20)$$

改写上式,并令等式两边与虚位移相乘的矩阵相等,得到

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (9-21)$$

式中, $\{U\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \cdots \ u_{n_2} \ v_{n_2}]^T$ 称为总体位移列阵; $[K]$ 称为总体刚度矩阵,由各单元的单元刚度矩阵 $[k]$ 组装而成; $\{P\}$ 称为总体荷载列阵,由各单元的节点荷载列阵组装而成; n_2 为结点总数。

式(9-21)称为总体刚度方程。引入边界约束条件对总体刚度方程进行修正后,求解得到总体位移列阵 $\{U\}$, 然后由几何方程和本构关系计算各单元的应变和应力分量。

9.2.1.4 等参数单元分析

以上以三角形单元为例,给出了有限元法基本方程的建立过程。对于平面任意四边形单元,节点位移列阵 $\{\delta\}$ 可表示为

$$\{\delta\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \cdots \ u_m \ v_m]^T$$

式中, u_i, v_i 表示单元 e 的第 i 个节点的两个位移分量。

如前所述,单元体内的位移向量可表示为式(9-3)的形式。而插值函数 $[N]$ 可以表示为

$$[N] = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_m \end{pmatrix} \quad (9-22)$$

对于不同的单元类型具有不同的插值函数。平面四边形 4 节点等参单元的形状如图 9-2 所示,其形状函数为

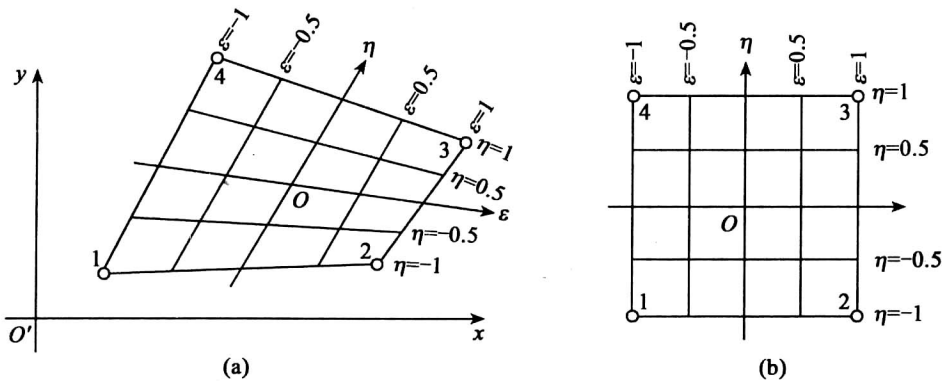


图 9-2

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (9-23)$$

根据几何关系,可将单元应变表示为

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\} = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m] \{\delta\} \quad (9-24)$$

式中,

$$[B_i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \quad i=1,2,\dots,m \quad (9-25)$$

在采用图 9-2 所示自然坐标系时, $[B_i]$ 中各元素可由对 ξ - η 坐标系的坐标求导得出,即

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (9-26)$$

$$\det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i - \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i$$

式中, $[J]$ 称为雅可比矩阵。

$$x = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) y_i$$

由以上公式,根据虚位移原理可得到四边形有限单元法的基本方程,其中单元的刚度矩阵为

$$\begin{aligned} [k] &= \iint_{A_n} [B]^T [D] [B] t dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t \det J d\xi d\eta \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m ([B]^T [D] [B])_{lp} t \det J W_l W_p \end{aligned} \quad (9-27)$$

式中, W_l, W_p 为高斯积分中的加权因子; m 为高斯积分点数。

由以上分析可知,基本方程的建立与三角形单元基本方程建立的过程完全相同,所不同的是,形状函数的获取是在自然坐标系中对母单元依据形状函数的两个特性建立,在建立各种公式的过程中,注意自然坐标系与笛卡儿坐标系之间的相互关系和导数关系。同时,单元刚度矩阵形成时一般要进行数值积分。

9.2.2 初始地应力与等效节点力

初始地应力是指处于天然状态的岩体,在工程开挖之前已存在的应力,它包括由于上覆

岩(土)层的重量引起的自重应力及由于地质作用产生的“构造应力”等,是数值计算的一个重要的原始条件。由于岩土工程的开挖使开挖边界裸露,这些边界点(如地下巷道的周边)原来处于一定的初始(原始)应力状态,开挖使这些边界点的应力“释放”,从而引起围岩应力场和位移场的重新分布。模拟这一开挖效果目前普遍采用邓肯(J. M. Duncan)提出的“反转应力释放法”,即在开挖边界上作用一“等效释放荷载”,这一等效释放荷载等价于原来作用在该边界上的初始地应力,但方向相反。岩体由于开挖所引起的位移和应力的变化,正是由于这一等效释放荷载所引起的。

岩体的初始地应力的分布形式非常复杂,且多种多样。但在工程涉及范围内仍可假定其按线性分布或抛物线分布。若假设地应力分布形式为 x, y 的线性函数,则对应满足相容方程的应力函数为

$$\varphi = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 y^3 \quad (9-28)$$

设工程区域内的平均(或加权平均)容重为 γ , 并且沿 y 方向,则由弹性理论知

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \gamma y, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$

将式(9-28)代入上式化简得到初始地应力 $\{\sigma_0\}$ 为

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0} &= S_1 + S_4 x + S_7 y \\ \sigma_{y_0} &= S_2 + S_5 x + S_8 y \\ \tau_{xy_0} &= S_3 + S_6 x - S_4 y \end{aligned} \quad (9-29)$$

式中,

$$\begin{aligned} S_1 &= 2a_3, S_2 = 2a_1, S_3 = -a_2 \\ S_4 &= 2a_6, S_5 = 6a_4, S_6 = -(2a_5 + \gamma) \\ S_7 &= 6a_7, S_8 = 2a_5 \end{aligned} \quad (9-30)$$

将式(5-29)写成矩阵形式

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x_0} & \sigma_{y_0} & \tau_{xy_0} \end{Bmatrix}^T = [\Phi] \{S\} \quad (9-31)$$

式中,

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-32)$$

$$\{S\} = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8\}^T \quad (9-33)$$

其中, $\{S\}$ 称为表征初始地应力分布函数的系数列阵。

对于均匀初始地应力情况, $[\Phi]$ 为三阶单位矩阵, 且

$$\{S\} = \{S_1 \ S_2 \ S_3\}^T = \{\sigma_0\} \quad (9-34)$$

根据前述释放荷载的概念,对于开挖问题,边界荷载的等效节点力是由预定的开挖边界面上的初始地应力形成的。设预开挖边界上的应力分布如图 9-3 所示,采用“反转应力释放法”,对于开挖边界上的第 i 点的“释放荷载”等效节点力为

$$P_{xi} = \frac{1}{6} [2\sigma_{x,i}(b_1 + b_2) + \sigma_{x,i-1}b_1 + \sigma_{x,i+1}b_2 + 2\tau_{xy,i}(a_1 + a_2) + \tau_{xy,i-1}a_1 + \tau_{xy,i+1}a_2] \quad (9-35)$$

$$P_{yi} = \frac{1}{6} [2\sigma_{y,i}(a_1 + a_2) + \sigma_{y,i-1}a_1 + \sigma_{y,i+1}a_2 + 2\tau_{xy,i}(b_1 + b_2) + \tau_{xy,i-1}b_1 + \tau_{xy,i+1}b_2]$$

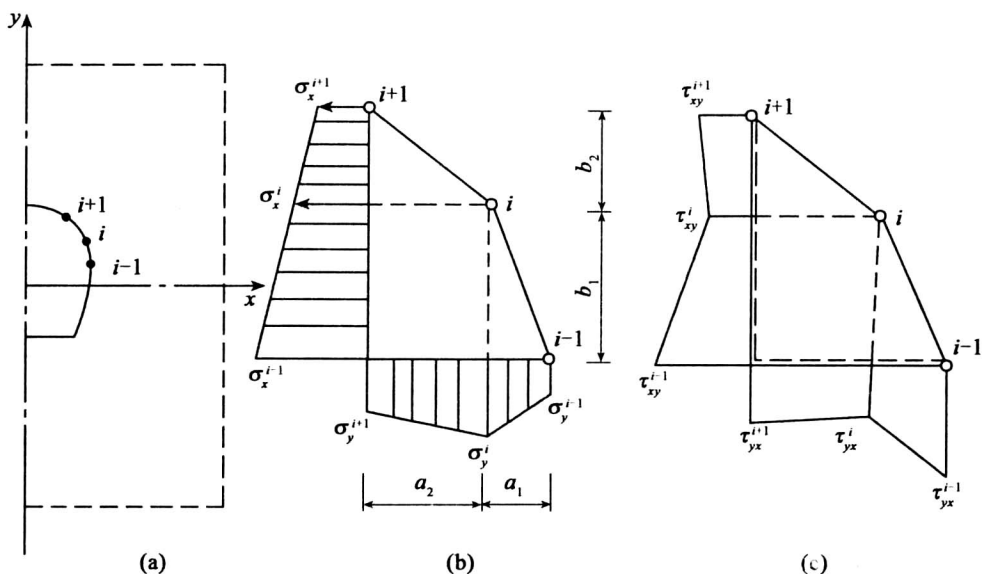


图 9-3 开挖边界上的应力分布

式中,

$$a_1 = x_{i-1} - x_i, a_2 = x_i - x_{i+1}, b_1 = y_i - y_{i-1}, b_2 = y_{i+1} - y_i \quad (9-36)$$

将式(9-35)写成矩阵形式,并将 $i-1, i, i+1$ 各点应力用式(9-31)表示,化简后得到

$$\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & P_{14} & 0 & P_{16} & P_{17} & 0 \\ 0 & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{26} & 0 & P_{28} \end{pmatrix}_i \{S\} \quad (9-37)$$

式中,

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2), P_{13} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \\ P_{16} &= \frac{1}{6}[a_1 x_{i-1} + 2(a_1 + a_2)x_i + a_2 x_{i+1}] \\ P_{17} &= \frac{1}{6}[b_1 y_{i-1} + 2(b_1 + b_2)y_i + b_2 y_{i+1}] \\ P_{22} &= P_{13}, P_{23} = P_{11} \\ P_{24} &= -P_{17}, P_{25} = P_{16} \\ P_{26} &= \frac{1}{6}[b_1 x_{i-1} + 2(b_1 + b_2)x_i + b_2 x_{i+1}] \\ P_{28} &= \frac{1}{6}[a_1 y_{i-1} + 2(a_1 + a_2)y_i + a_2 y_{i+1}] \\ P_{14} &= P_{26} - P_{28} \end{aligned} \quad (9-38)$$

对开挖边界点,每点均按式(9-37)写出其等效节点力,按节点编号顺序整理形成总体等效节点力列阵为

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ \vdots \\ P_{xn} \\ P_{yn} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* & \cdots & P_{18}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* & \cdots & P_{28}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{2n-1,1}^* & P_{2n-1,2}^* & \cdots & P_{2n-1,8}^* \\ P_{2n,1}^* & P_{2n,2}^* & \cdots & P_{2n,8}^* \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_8 \end{Bmatrix} \quad (9-39)$$

式中, n 为开挖边界点的总数。把上式简化写为

$$\{P\} = [P_1^* \ P_2^* \ P_3^* \ \cdots \ P_8^*] \{S\} = [P^*] \{S\} \quad (9-40)$$

式中, $[P_1^* \ P_2^* \ P_3^* \ \cdots \ P_8^*]$ 分别为式(9-37)中的第 1, 2, \cdots , 8 列元素组成的列阵, 其物理意义是, 任一系列元素 P_j^* 为当系数 S_j 为 1、其余系数均为零时释放荷载的等效节点力列阵。

式(9-40)就是开挖边界上释放荷载的等效节点力列阵。

在模拟开挖的数值计算中, 形成释放荷载的等效节点力还常采用直接积分方法, 即

$$\{P\} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} [B]_i^T (\sigma_0) dV \quad (9-41)$$

式中, \sum 表示对开挖边界临空单元求和(如图 9-4 所示, ①~⑩单元为边界临空单元); N 为开挖边界临空单元的总数目; V_i 为第 i 个单元的体积; $[B]_i^T$ 为第 i 个单元的几何矩阵的转置。

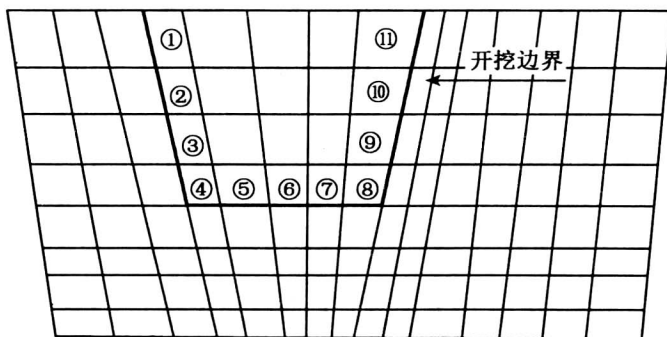


图 9-4 临空单元 1~11

将式(9-31)代入式(9-41), 得

$$\{P\} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} [B]_i^T [\partial l]_i dV \{S\} \quad (9-42)$$

记

$$[P^*] = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} [B]_i^T [\partial l]_i dV$$

并将其写成高斯数值积分形式, 即

$$[P^*] = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m ([B]_i^T [\Phi]_i t \det J)_{lp} \cdot W_l W_p \quad (9-43)$$

式中, m 为高斯积分点数; $(\)_{lp}$ 中为在高斯积分点 (ξ_l, η_p) 处圆括弧内的计算值; W_l, W_p 为相应积分点的加权因子; t 为平面单元的厚度。

$[\Phi]_i$ 由式(9-32)表述, 且式中各变量为

$$x = \sum_{i=1}^{IP} N_i(\xi, \eta) x_i, y = \sum_{i=1}^{IP} N_i(\xi, \eta) y_i$$

式中, ξ, η 为母单元局部坐标; IP 为单元节点数。

对于三角形单元, $[B]_i$ 为常数矩阵, 单元 $\{\sigma_0\}$ 为均匀应力, 则式(9-41)可写为

$$\{P\} = \sum_{i=1}^N [B]_i^T \{\sigma_0\}_i t_i \Delta_i \quad (9-44)$$

式中, $[B]_i, \{\sigma_0\}_i, t_i$ 和 Δ_i 分别是单元 i 的几何矩阵、初始地应力或应力向量、厚度和面积。

将等效释放荷载的等效节点力式(9-40)、式(9-42)或式(9-44)代入式(9-21), 可求出由于开挖所引起的位移 $\{U\}$ 。

9.2.3 施工过程的模拟

上节所述岩土工程因开挖导致沿开挖边界各点产生应力释放, 由此形成等效释放节点力, 加载求解所获工程岩体产生新的应力和位移, 这实际上就是对开挖施工效果的有限元法模拟。对于岩土工程, 不仅开挖, 而且各种支护(加固)施工过程均对周围岩土体产生一定的作用和力学效应, 同时, 支护结构形式也随着施工过程不断变化, 因此, 在进行有限元分析前, 确定离散化网格时, 就应充分考虑施工过程的各种变化。

9.2.3.1 开挖、衬砌(回填)的模拟

如图9-5所示一地下硐室, 开挖及支护分上、下两部分进行, 施工步骤如图中的数字所示。模拟该硐室施工过程的有限元网格如图9-6所示。对于每一步开挖, 释放荷载模拟了开挖的力学效应, 而开挖掉的单元改变了工程结构的形式。因此, 对于每一次开挖, 除按前节方法计算等效释放荷载外, 还将其变为“空单元”, 即令开挖单元的刚度接近于零; 每一步

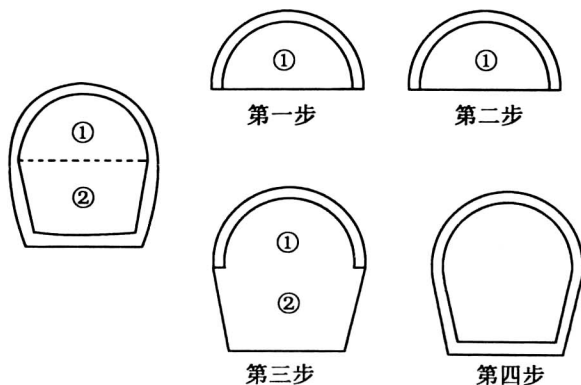


图9-5 某地下硐室施工步骤示意图

衬砌施工或回填,都将这些部位所对应的单元赋予衬砌(或回填)材料的力学参数。同时,在形成有限元方程进行求解时,应重视考虑空间效应的影响。在开挖瞬时,开挖荷载一般只释放50%~80%,若衬砌或回填(或喷射砼)紧跟掌子面,则支护施工后,仍有20%~50%的开挖释放荷载,具体荷载释放系数的大小要根据实际施工情况而定。本例全部计算分四步完成,叠加每一步的模拟结果可得最终分析结果。

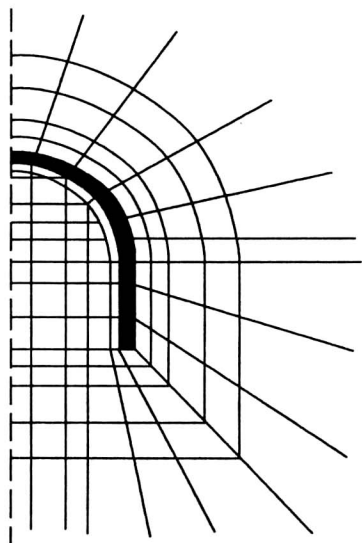


图 9-6 有限单元网格图

喷射砼通常是紧跟掘进工作面及时施工的,因此,可以把它与围岩作为一体来考虑,也可采用梁单元来模拟。采用梁单元的优点是可以得出喷层的轴力、剪力和弯矩,并根据各截面的内力计算出喷层外边缘的应力,以此对喷层所处的状态做出判断。此外,由于梁单元与围岩的连续体平面单元具有不同的节点自由度,在软件编制中需做适当处理。

对于很薄的喷层,考虑到实际喷层主要是受轴向压应力的特点,也可以近似地用轴力杆单元模拟。

9.2.3.2 锚杆支护的模拟

锚杆支护是岩土工程中广泛应用的重要支护形式之一。常见的锚杆类型有两种:一类是点锚固锚杆,这类锚杆通常在安装时施加一定的预应力;另一类是全粘结式锚杆。对于点锚固锚杆,可把预应力作为作用在锚固点处的一对集中荷载加以考虑,在两端锚固点之间的锚杆则以一个轴力杆单元来模拟;全粘结式锚杆则可按锚杆全长分为若干个小单元进行模拟(见图9-7)。

同时,由于锚杆作用改善了锚固区的岩体的力学性态,将使其内聚力 C 和内摩擦角的值提高,这一点需通过实验来确定。在没有进行充分的实验研究之前,可以把锚杆的抗剪强度平均到每一根锚杆所支护的岩石单元上。这些方案只能认为是很简略的近似处理。

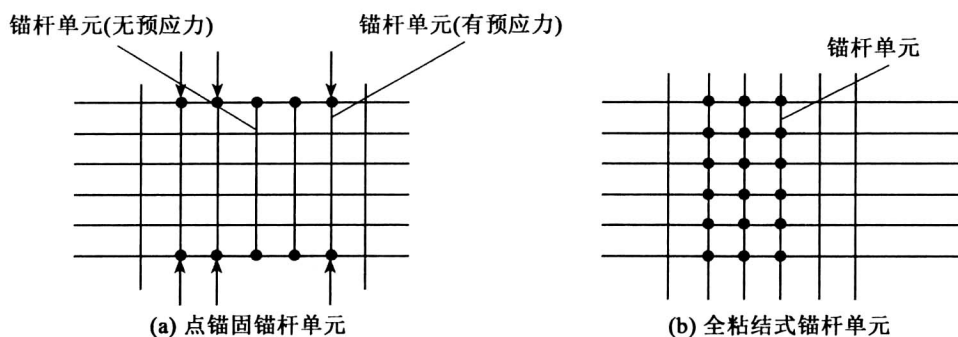


图 9-7 锚杆支护模拟分析

对于支护结构受力情况,需根据实际的施工工序和掌子面的空间效应情况进行处理。

9.2.4 岩体力学中的有限元法特点

9.2.4.1 节理单元

自然岩体具有各种结构面,如节理、断层等。在进行有限元分析中,对那些与工程结构尺寸相当或更大尺寸的断层和节理,应采用“节理单元”。目前,国内外已提出多种节理单元,其中古德曼(Goodman)节理单元是提出最早、应用最广的一种,如图9-8所示。

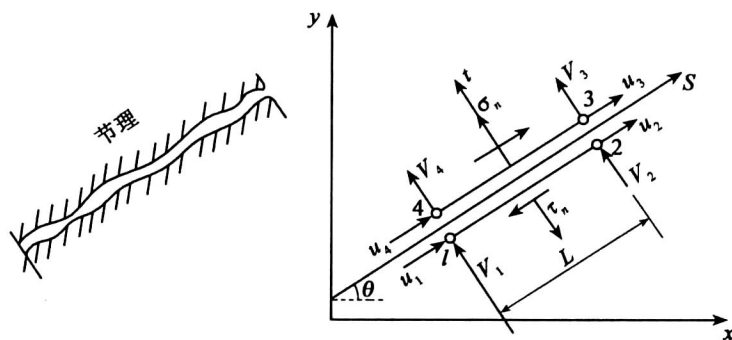


图 9-8 古德曼节理单元

如果规定单元的位移和应力均以单元中心为代表,则单元中心上下两侧相对位移定义为

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{u_3 + u_4}{2} - \frac{u_1 + u_2}{2} \\ \Delta v = \frac{v_3 + v_4}{2} - \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \Delta w = \frac{v_3 - v_4}{l} - \frac{v_2 - v_1}{l} \end{cases} \quad (9-45)$$

将式(9-45)写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (9-46)$$

即

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e$$

即认为

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w\}^T \quad (9-47)$$

本构关系为

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tau \\ \Delta \sigma \\ \Delta M \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & K_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{4} K_n \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = [D] \{\Delta \varepsilon\} \quad (9-48)$$

则古德曼单元的刚度矩阵为

$$[k]^e = \int [B]^T [D] [B] dv$$

式中, $[B]$, $[D]$ 分别如式(9-46)和式(9-48)所示。对于位移沿节理单元线性变化或二次变化的情况,可参考文献建立刚度矩阵和基本方程。

9.2.4.2 无拉力分析

岩石的“不抗拉”特性可看做是塑性性态的一种表现形式。若略去很低的抗拉强度,按照“无拉力模型”所得到的解答将是在任一点都不存在拉应力的无拉力平衡状态。如果不能获得这样的平衡状态,则表明这一系统是不安全的,必须考虑适当的“加固”措施。这种考虑岩石不抗拉特性的非线性分析,习惯上称为“无拉力”分析。“无拉力”分析可采用与通常的弹塑性分析相同的过程进行,只是用它的拉破坏条件代替弹塑性分析中的屈服条件即可。具体的分析过程为:某单元在某方向出现拉应力,将该方向的应力降低为零,转化为等效节点力施加于总体方程,进行迭代计算,直到各单元都无拉应力。

9.2.4.3 非线性分析

非线性分析包括几何非线性和材料非线性两种。几何非线性具有非线性的几何关系,而材料非线性则具有非线性的应力应变方程。岩土力学问题大多是材料非线性问题。对于非线性问题,必须经过线性化处理,才能进行有限元分析模拟。常用线性化处理有直接迭代法、牛顿-辛普森法和增量-附加荷载法(混合法)。

1. 直接迭代法(割线模量法)

这是一种全量分析法,在每次迭代中,系统受全部载荷作用,并取与前一次迭代终了时的应力状态相对应的割线刚度,即每次迭代后以新的应力状态来修正刚度矩阵,然后进行下一次迭代,直至前后两次迭代所得结果充分接近为止。在图 9-9 中,两次结果的差值小于任意正数,即趋于无穷小。

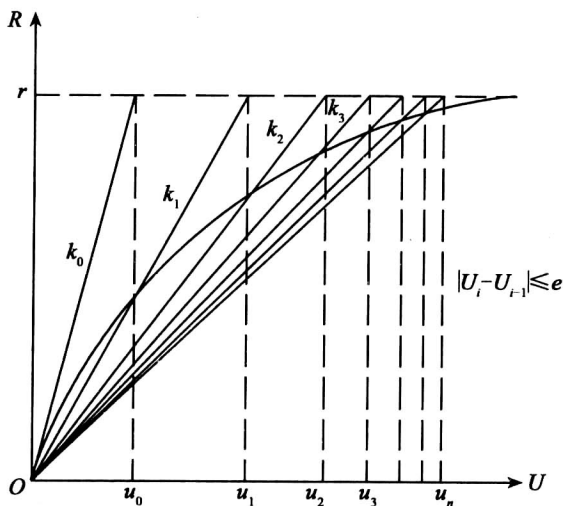


图 9-9 直接迭代法

对于材料非线性问题,由于是小变形问题,平衡方程与几何关系依然成立,即

$$\sum \int [B]^T \{\sigma\} dv = \{R\} \quad (9-49)$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u^e\} \quad (9-50)$$

但物理方程(本构方程)是非线性的,可以写成

$$\{\sigma\} = [D(\varepsilon)] \{\varepsilon\} \quad (9-51)$$

由于应力与应变的非线性,应力与位移之间也是非线性的,所以

$$\{\sigma\} = [D(\varepsilon)] [B] \{u^e\} \quad (9-52)$$

代入式(9-49)得

$$\sum \int [B]^T [D(\varepsilon)] [B] \{u^e\} dv = \{R\} \quad (9-53)$$

简写成

$$[K][U] = \{R\} \quad (9-54)$$

其中,

$$[K] = \sum \int [B]^T [D(\varepsilon)] [B] dv$$

将式(9-54)写成迭代公式,即

$$[K]_{n-1} [U]_n = \{R\} \quad (9-55)$$

直接迭代法的求解步骤如下:

(1) 首先取 $\{U\}_0 = 0$, 算出 $[K(\{U\}_0)] = [K]_0$ (初始刚度矩阵), 并将其代入式 (9-55), 解出 $\{U\}_1 = [K]_0^{-1} \{R\}$ 作为第一次近似。

(2) 从已知的 $\{U\}_1$, 由式 (9-50)、式 (9-51) 及式 (9-54) 中计算出 $[K]_1$, 代入式 (9-55), 解出 $\{U\}_2$ 。

(3) 重复第二步, 经若干次迭代, 直至 $\{U\}_n \approx \{U\}_{n+1}$ 为止。 $\{U\}_n$ 即是非线性方程组 (9-54) 的解。

直接迭代法的特点是: 简单易行, 收敛性也较好; 对于理想弹塑性、应变软化材料不适用 (σ - ε 不能一一对应); 一次施加全部载荷, 不能反映加载过程中应力及应变的变化与发展过程; 每次迭代都必须形成新的单元刚度矩阵及总体刚度矩阵, 计算耗时长。

2. Newton-Raphson 法 (N-R 法)

N-R 法也称为切线刚度法, 如图 9-10 所示, 它始终以切线刚度代入总体方程进行求解。在初始求解时, 系统受全部的载荷作用, 得到位移、应变、应力以后, 以当前应力状态相对应的切线刚度和系统不平衡力 $\{\Delta R\} = \{R\} - \{R\}$, 进行下一次迭代计算, 直到 $\{\Delta R\} \rightarrow 0$ 为止。

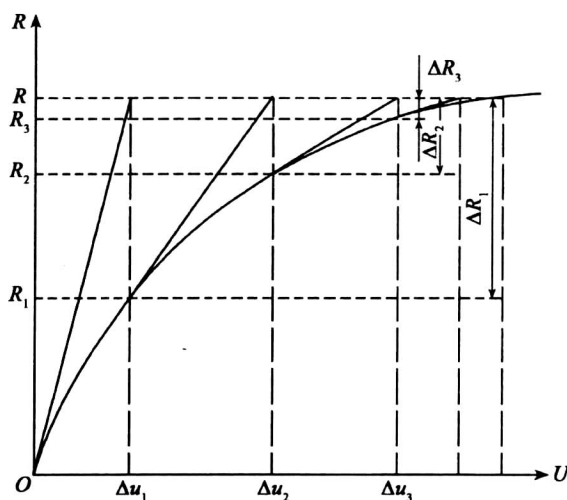


图 9-10 N-R 法

按照上述过程, 利用材料的应力-应变关系增量形式:

$$d\{\sigma\} = [D_T(\varepsilon)] d\{\varepsilon\} \quad (9-56)$$

可以求解非线性问题。式中, $[D_T(\varepsilon)]$ 为切线弹性矩阵。

将式 (9-49) 改写为

$$\{\psi(\{U\})\} = \sum \int [B]^T \{\sigma\} dv - \{R\} = 0 \quad (9-57)$$

因为 $\{U\}$ 的变化不会引起 $\{R\}$ 的改变, 所以

$$d\{\psi\} = \sum \int [B]^T d\{\sigma\} dv \quad (9-58)$$

将式(9-56)代入式(9-58),得

$$d\{\psi\} = \left(\sum \int [B]^T [D_T(\varepsilon)] [B] dv \right) d\{U\} = [K_T] d\{U\} \quad (9-59)$$

式中,

$$[K_T] = \sum \int [B]^T [D_T(\varepsilon)] [B] dv \quad (9-60)$$

称为切线刚度矩阵。将式(9-59)写成增量形式,即

$$[K_T]_i \{\Delta U\}_{i+1} = \{\Delta \psi\}_i \quad (9-61)$$

由图 9-10 可知, $\{\Delta \psi\}_i = \{\Delta R\}_i$, 即

$$\{\Delta \psi\}_i = \{R\} - \{R\}_i = \{R\} - \sum \int [B]^T \{\sigma\} dv \quad (9-62)$$

于是

$$\{U\}_{i+1} = \{U\}_i + \{\Delta U\}_{i+1} \quad (9-63)$$

N-R 法迭代步骤如下:

- (1) 若已知位移的第 i 次近似值 $\{U\}_i$, 由式(9-50)计算出 $\{\varepsilon\}_i$;
- (2) 通过当前的应力应变状态 $\{\sigma\}_i$ 、 $\{\varepsilon\}_i$ 得到切线弹性矩阵 $[D_T(\varepsilon)]$;
- (3) 将 $[D_T(\varepsilon)]$ 代入式(9-60), 计算出 $[K_T]_i$, 并由式(9-62)得到 $\{\Delta \psi\}_i$;
- (4) 将 $[K_T]_i$ 及 $\{\Delta \psi\}_i$ 代入式(9-61), 求解线性方程组, 获得 $\{\Delta U\}_{i+1}$;
- (5) 利用式(9-63)得出位移列阵的第 $i+1$ 次近似值 $\{U\}_{i+1}$;
- (6) 重复上述步骤, 经过若干次迭代, 直至 $\{\Delta R\} \rightarrow 0$ 为止。

上述的迭代求解, 每一次都需要以新的切线斜率(刚度)进行计算, 相当于每一步迭代都必须重新组集刚度矩阵, 比较费时, 效率较低。

一种新的修正方法(见图 9-11)是在每一步迭代中都采用不变的初始刚度 $[K_0]$, 省去大量的重复计算、组集刚度矩阵的时间, 相应的迭代次数将有所增加, 但是总的计算时间会明显减少。

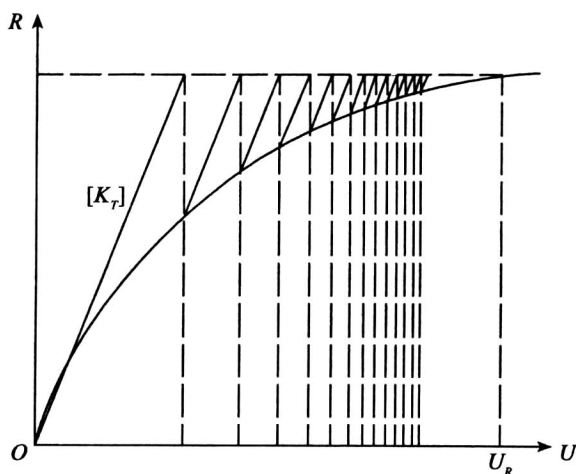


图 9-11 修正的 N-R 法

修正的 N-R 法,其迭代公式为

$$[K_0] \{\Delta U\}_{i+1} = \{\Delta \psi\}_i \quad (9-64)$$

$$\{\Delta U\}_{i+1} = \{U\}_i + \{\Delta U\}_{i+1} \quad (9-65)$$

3. 增量-附加载荷法(混合法)

增量-附加载荷法(见图 9-12)是在增量加载的条件下,在每一级增量载荷内使用修正的 N-R 法,通过与非线性形态相对应的“等效附加载荷”来考虑非线性的影响。这种方法在求解非线性问题中是一种有效的方法(初应力法、初应变法即属于这一类型)。

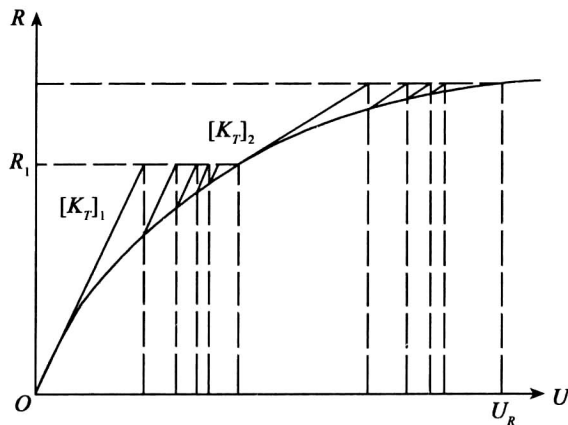


图 9-12 增量-附加载荷法

9.2.5 有限元法求解岩土力学问题的步骤及实例

(1) 确定计算模型。根据对称性、材料性质和所关心部位的边界尺寸等确定计算模型。例如,对于一圆拱型隧道,若其受力、几何形状及材料性质均对称于 y 轴,则可取其 $1/2$ 作为研究对象,而外边界可根据隧道的跨度和高度确定。通常,外边界左右取跨度的 $3 \sim 5$ 倍,上下取高度的 $3 \sim 5$ 倍。在所取范围之外可认为不受开挖等施工因素的影响,即在这些边界处可忽略开挖等施工所引起的应力和位移。同时,保证模型不出现刚体位移及转动。

选择计算参数的途径有三种:一是根据实验确定。实验室确定的参数不能直接采用,通常需进行折减,这是因为实验室试验一般确定的是岩块的力学参数,而数值计算需要的则是岩体的力学参数。大量的研究资料表明:岩体的力学参数应是岩块的力学参数的 $1/2 \sim 1/20$ 。二是现场实验和实测参数。这些由现场所获得的参数一般也需进行数学上的处理之后才可使用。三是利用量测位移进行反分析确定。

(2) 划分单元。根据上面所确定的模型,在比较规则的区域划分四边形单元,在复杂区域可选择任意四边形和三角形单元。划分时不能出现同一单元跨过两种材料,避免出现钝角。对于断层、节理,应划分为岩体的“节理单元”。单元编号时,应使同一单元的编号的最大差值为最小。应力集中的区域和重点研究的区域单元应加密。

(3) 选择位移函数。依据单元的类型,选择对应的位移插值函数,相同类型单元取同一

插值函数。

- (4)建立单元刚度矩阵,并进行坐标转换。
- (5)形成总体刚度矩阵。
- (6)荷载等效移置,确定节点力列阵。
- (7)列出有限元基本方程,并根据已知位移对方程进行修正。
- (8)求解总体方程,可获得节点位移。
- (9)利用几何关系和物理方程计算单元的应变和应力。

(10)绘制计算结果图,以便直观了解分析结果,给出定量的评价。利用有限元法计算结果画出破坏区(塑性区)、应力和位移等值线、应力场和位移场矢量图及所需要某一截面的应力分布曲线和位移分布曲线等。

目前,已有不少大型岩土力学有限元通用程序,如 ANSYS、MARC、GEO-SLPOE、ADINA 等。若有条件能用通用程序计算分析岩土力学与工程问题,则只需了解通用程序的使用说明和前述第(1)、(2)步,其余步骤均由通用程序自动完成。

例 9-1 如图 9-13(a) 所示的平面应力状态受拉伸平板,一端固定,一端受均布拉力 $q=1\text{kN/cm}^2$ 作用,板的两侧受法向位移约束。已知材料弹性模量 $E=10^4\text{kN/cm}^2$,泊松比 $\nu=0.3$,板厚 $t=1\text{cm}$ 。试用三节点三角形平面应力单元计算板的位移和应力。

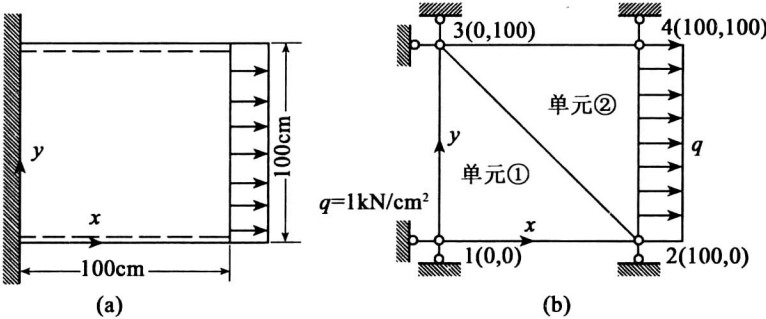


图 9-13 平板均匀受拉计算模型

解:(1)将板进行单元剖分和节点编号,如图 9-13(b)所示。位移边界条件为

$$u_1=v_1=0, v_2=0$$

$$u_3=v_3=0, v_4=0$$

单元数据见表 9-1。

表 9-1 单元材料信息

单元号	节点号(坐标值)	E	ν	t
1	1(0,0), 2(100,0), 3(0,100)	10^4	0.3	1
2	4(100,100), 3(0,100), 2(100,0)	10^4	0.3	1

(2) 计算单元刚度矩阵。

先计算单元①的单刚矩阵：

$$b_1 = y_2 - y_3 = -100$$

$$b_2 = y_3 - y_1 = 100$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 0$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = -100$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = 0$$

$$c_3 = x_2 - x_3 = 100$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - \frac{1}{2}(x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3) = 0.5 \times 10^4$$

应变矩阵 $[B]$ 和弹性矩阵 $[D]$ 分别为

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} = \frac{10^4}{0.91} \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{pmatrix}$$

单元刚度矩阵为

$$[k^1] = [B]^T [D] [B] t \Delta = \frac{10^4}{1.82} \begin{pmatrix} 1.35 & 0.65 & -1.00 & -0.35 & -0.35 & -0.30 \\ 0.65 & 1.35 & -0.30 & -0.35 & -0.35 & -1.00 \\ -1.00 & -0.30 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.30 \\ -0.35 & -0.35 & 0.00 & 0.35 & 0.35 & 0.00 \\ -0.35 & -0.35 & 0.00 & 0.35 & 0.35 & 0.00 \\ -0.30 & -1.00 & 0.30 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

同理, 可求得单元②的单元刚度矩阵 $[k^2]$ 。由计算结果得 $[k^2] = [k^1]$ 。

(3) 将全部单元刚度矩阵组集成总体刚度矩阵 $[K]$ 。已知各单元的局部自由度编码与总体自由度编码关系, 见表 9-2, 可以根据编码法原理得到总体刚度矩阵 $[K]$ 。

$$[k^1] = \frac{10^4}{1.82} \begin{pmatrix} 1.35 & 0.65 & -1.00 & -0.35 & -0.35 & 0.30 & 0.00 & 0.00 \\ 0.65 & 1.35 & -0.30 & -0.35 & -0.35 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & -0.30 & 1.35 & 0.00 & 0.00 & 0.65 & -0.35 & -0.35 \\ -0.35 & -0.35 & 0.00 & 1.35 & 0.65 & 0.00 & -0.30 & -1.00 \\ -0.35 & -0.35 & 0.00 & 0.65 & 1.35 & 0.00 & -1.00 & -0.30 \\ -0.30 & -1.00 & 0.65 & 0.00 & 0.00 & 1.35 & -0.35 & -0.35 \\ 0.00 & 0.00 & -0.35 & -0.30 & -1.00 & -0.35 & 1.35 & 0.65 \\ 0.00 & 0.00 & -0.35 & -1.00 & -0.30 & -0.35 & 0.65 & 1.35 \end{pmatrix}$$

表 9-2

单元拓扑信息

单元号	单元局部自由度编码	1	2	3	4	5	6
①	对应总体自由度编码	1	2	3	4	5	6
②	对应总体自由度编码	7	8	5	6	3	4

(4) 计算单元荷载列阵,并组集成总体荷载列阵 $\{R\}$ 。

板中只有单元②受面力 q 作用,则单元荷载列阵 $\{F^2\}$ 为

$$\{F^2\} = \frac{1}{2} \times 1 \times 100 \cdot [1.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 1.0 \quad 0.0]^T$$

按编码法原理,组集成总体荷载列阵 $\{P\}$ 为

$$\{P\} = [R_{x1} \quad R_{y1} \quad 50.0 \quad R_{y2} \quad R_{x3} \quad R_{y3} \quad 50.0 \quad R_{y4}]^T$$

式中, $R_{x1}, R_{y1}, R_{y2}, R_{x3}, R_{y3}, R_{y4}$ 分别是节点1,2,3,4的未知支座反力。

(5) 根据位移边界条件,对总体刚度方程组进行零位移约束修正,即画去有关行和列,得

$$\frac{10^4}{1.82} \begin{pmatrix} 1.35 & -0.35 \\ -0.35 & 1.35 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50.0 \\ 50.0 \end{Bmatrix}$$

求解上述方程组得

$$u_2 = u_4 = 0.91 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

其他节点位移分量由位移边界条件可知

$$u_1 = v_1 = v_2 = u_3 = v_3 = v_4 = 0.0$$

(6) 计算单元应力。

先计算单元①:

$$\{\sigma^1\} = [D][B]\{\delta^1\} = \frac{10^2}{0.91} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.30 & 0.00 \\ 0.30 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0091 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-2} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

同理,求得单元②的应力列阵 $\{\sigma^2\} = [10 \quad 3 \quad 0]^T \text{ MPa}$ 。

本例得到的位移和应力值与解析解完全一样,这是因为用常应变单元来计算常应变场的板。如果采用常应变单元计算不均匀应变场的板,则由于单元假定位移场与实际位移场不一致而带来计算误差,要增加计算精度,必须增加单元数目。

9.3 边界元法

边界元法(Boundary Element Method)是在 20 世纪 60 年代发展起来的求解边值问题的一种数值方法。它是把边值问题归结为求解边界积分方程问题,在边界上划分单元,求边界积分方程的数值解,进而可求出区域内任意点的场变量,故又称为边界积分方程法,由于它与有限元法相比,具有降低维数(将三维问题降为二维问题,将二维问题降为一维问题),输入数据准备简单,计算工作量少,精度较高等优点,故已在许多领域内得到了具体应用,尤其是对均质或等效均质围岩的地下工程问题的分析更为方便。但其不足之处是对于非连续多介质、非线性问题,不如有限元法灵活、有效。

边界元法有直接法和间接法两种,直接边界元法是以互等功原理为基础建立起来的,而间接边界元法则是以叠加原理为基础建立基本方程。本节分别对这两种方法作简略介绍。

9.3.1 直接边界元法基本方程

考虑同一结构在两种不同荷载情况下的弹性变形状态。设第一种情况下的边界力、体力与位移场分别为 t^*, b^*, u^* , 第二种情况下的边界力、体力与位移场分别为 t, b, u , 则根据功的互等定理知:第一种状态的力在第二种状态的相应位移上所作的功等于第二种状态的力在第一种状态的相应位移上所作的功,可表示为

$$\int_{\Gamma} t^* u \, ds + \int_{\Omega} b^* u \, d\Omega = \int_{\Gamma} t u^* \, ds + \int_{\Omega} b u^* \, d\Omega$$

将功互等定理用于无限弹性体,取两种荷载情况,如图 9-14 所示。

第一种情况,在无限域 Ω 的 i 点,沿 l 方向施加单位集中力,用 Δ_l^i 表示。相应地,在轮廓线 Γ 任一点, k 方向的应力为 P_{kl}^* ; 在 Ω 内及 Γ 上,任一点在 k 方向的位移为 u_{kl}^* (即所谓开尔文(Kelvin)解)。

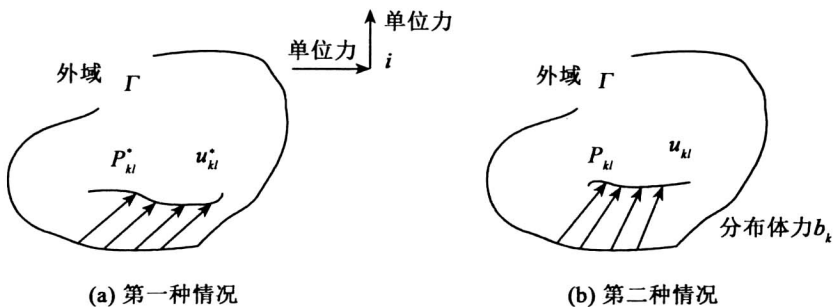


图 9-14 两种荷载状况

第二种情况,在无限域 Ω 内沿 k 方向有分布体力 b_k , 在轮廓 Γ 上沿 k 方向有表面荷载 P_k 。在 Ω 内及 Γ 上,任一点 k 方向由 b_k 和 P_k 引起的位移为 u_k , 而在 i 点 l 方向(当 i 点在 Ω 内时)的位移为 u_l^i 。则根据互等功原理,可写出

$$\int_{\Omega} \Delta_i^i u_k d\Omega + \int_{\Gamma} P_{kl}^* u_k ds = \int_{\Gamma} u_{kl}^* P_k ds + \int_{\Omega} u_{kl}^* b_k d\Omega \quad (9-66)$$

式中, Δ_i^i 为在 i 点沿 l 方向施加的单位集中力, 称为 Dirac Delta 函数, 其性质为

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta_i^i d\Omega = \begin{cases} 0, & i \text{ 点在 } \Omega \text{ 外} \\ \frac{1}{2} f(x_i), & i \text{ 点在 } \Gamma \text{ 外} \\ f(x_i), & i \text{ 点在 } \Omega \text{ 内} \end{cases}$$

根据 Dirac Delta 函数的性质, 式(9-66)左边第一项可表示为

$$\int_{\Omega} \Delta_i^i u_k d\Omega = C^i u_l^i \quad (9-67)$$

式中,

$$C^i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i \text{ 点在边界 } \Gamma \text{ 上} \\ 1, & i \text{ 点在区域 } \Omega \text{ 内} \end{cases}$$

若不考虑体力, 则方程式(9-67)变为

$$C^i u_l^i + \int_{\Gamma} P_{kl}^* u_k ds = \int_{\Gamma} u_{kl}^* P_k ds \quad (k = 1, 2 \quad l = 1, 2) \quad (9-68)$$

该式即是开挖问题需要满足的支配方程, 也是直接边界元法的基础方程。

应该指出的是, 在式(9-68)中, 当 $l=1$ 时, 表示单位力作用于 i 点的 x 方向; 当 $l=2$ 时, 表示单位力作用于 i 点的 y 方向。式(9-68)实际上表示两个方程。

将边界 Γ 划分成 n 个线段单元, 在单元内将边界值 u_k 与 P_k 简化为均匀分布函数, 于是, 式(9-68)变成

$$C^i u_l^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} P_{kl}^* ds \right) u_k^j = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} u_{kl}^* ds \right) P_k^j \quad (9-69)$$

写成矩阵形式为

$$C^i [I] \{u\}^i + \sum_{j=1}^n [P]_j^i \{u\}^j = \sum_{j=1}^n [U]_j^i \{P\}^j \quad (9-70)$$

式中, $[I]$ 为二阶单位矩阵:

$$[P]_j^i = \int_{\Gamma_j} [P^*]^T ds \quad (9-71)$$

$$[U]_j^i = \int_{\Gamma_j} [u^*]^T ds \quad (9-72)$$

而且

$$[P^*]^T = \begin{pmatrix} P_{11}^* & P_{21}^* \\ P_{12}^* & P_{22}^* \end{pmatrix}, [u^*]^T = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix}$$

为计算方便, 将 $[P^*]$, $[u^*]$ 的开尔文解代入式(9-71)和式(9-72), 先在各单元的局部坐标系中进行上述积分, 积分结果分别记为 $[P']_j^i$ 和 $[U']_j^i$ 。

$[U']_j^i$ 中各元素的表达式为

$$\left. \begin{aligned} U'_{11} &= -A(3-4\nu) \left((a_i - x') Lnr_1 + (x' + a_i) Lnr_2 \right) \\ &\quad + 4(1-\nu) \cdot y' \cdot (\theta_1 - \theta_2) \\ U'_{21} &= U'_{12} = -A \cdot y' \cdot (Lnr_1 - Lnr_2) \\ U'_{22} &= -A(3-4\nu) \left((a_i - x') Lnr_1 + (x' + a_i) Lnr_2 \right) \\ &\quad + 2(1-2\nu) \cdot y' \cdot (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (i \neq j) \quad (9-73)$$

$$\left. \begin{aligned} U'_{11} &= U'_{22} = -2A(3-4\nu) a_i Lna_i \\ U'_{21} &= U'_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = j) \quad (9-74)$$

式中, $A = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$; ν 为泊松比; $G = \frac{E_0}{2(1+\nu)}$; $\theta_1 = \arctan \frac{y'}{x' - a_i}$, $\theta_2 = \arctan \frac{y'}{x' + a_i}$; $r_1 = \sqrt{(x' - a_i)^2 + y'^2}$; $r_2 = \sqrt{(x' + a_i)^2 + y'^2}$; x', y' 为第 i 个单元局部坐标中 j 点的坐标; a_i 为第 i 个单元半长。上述各量的几何关系如图 9-15 所示。

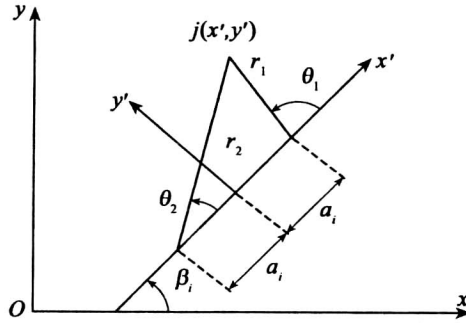


图 9-15 局部坐标系与整体坐标系关系

$[P']_j^i$ 中各元素的表达式为

$$\left. \begin{aligned} P'_{11} &= B[2(1-\nu)(\theta_1 - \theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_2)] \\ P'_{12} &= B[(1-2\nu)(Lnr_1 - Lnr_2) + (\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)] \\ P'_{21} &= B[-(1-2\nu)(Lnr_1 - Lnr_2) + (\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)] \\ P'_{22} &= B[2(1-\nu)(\theta_1 - \theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_2)] \end{aligned} \right\} \quad (i \neq j) \quad (9-75)$$

$$P'_{11} = P'_{22} = -\frac{1}{2}, P'_{21} = P'_{12} = 0 \quad (i = j) \quad (9-76)$$

式中,

$$\begin{aligned} B &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \\ \cos\theta_1 &= \frac{x' - a_i}{r_1}, \cos\theta_2 = \frac{x' + a_i}{r_2} \\ \sin\theta_1 &= \frac{y'}{r_1}, \sin\theta_2 = \frac{y'}{r_2} \end{aligned}$$

如图 9-15 所示, j 点在整体坐标系与局部坐标系中的坐标转换关系为

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_i & \sin\beta_i \\ -\sin\beta_i & \cos\beta_i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-c_x \\ y-c_y \end{Bmatrix} = [L_i] \begin{Bmatrix} x-c_x \\ y-c_y \end{Bmatrix}$$

式中, c_x, c_y 为 i 点在整体坐标系中的坐标值; 坐标转换矩阵

$$[L_i] = \begin{pmatrix} \cos\beta_i & \sin\beta_i \\ -\sin\beta_i & \cos\beta_i \end{pmatrix} \quad (9-77)$$

将 $[P']_j^i$ 和 $[U']_j^i$ 变换到总体坐标系中, 则有

$$[P]_j^i = [L_i] [P']_j^i [L_i]^T \quad (9-78)$$

$$[U]_j^i = [L_i] [U']_j^i [L_i]^T \quad (9-79)$$

若设 i 点为第 i 个边界单元的中点, 则方程式 (9-68) 即为第 i 个单元的中点方程式。罗列每个边界单元中点的方程式, 便形成方程组:

$$[H] \{u\} = [U] \{P\} \quad (9-80)$$

式中, $\{u\}$ 为边界位移列阵; $\{P\}$ 为边界应力列阵; $[H]$ 为边界应力影响系数矩阵; $[U]$ 为边界位移影响系数矩阵。

$$[H] = \begin{pmatrix} c_1 & & & & 0 \\ & c_1 & & & \\ & & c_2 & & \\ & & & c_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & c_n \\ 0 & & & & & & c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [P]_1^1 & [P]_1^2 & \cdots & [P]_1^n \\ [P]_2^1 & [P]_2^2 & \cdots & [P]_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [P]_n^1 & [P]_n^2 & \cdots & [P]_n^n \end{pmatrix} \quad (9-81)$$

$$[U] = \begin{pmatrix} [U]_1^1 & [U]_1^2 & \cdots & [U]_1^n \\ [U]_2^1 & [U]_2^2 & \cdots & [U]_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [U]_n^1 & [U]_n^2 & \cdots & [U]_n^n \end{pmatrix} \quad (9-82)$$

式 (9-80) 即为直接边界元法边界支配方程。

9.3.2 间接边界元法基本方程

间接法又可分为不连续应力法 (即虚荷载法) 和不连续位移法两种, 现以不连续应力法为例, 建立基本方程。

设 Γ 为无限平面上一条闭合曲线, 如图 9-16 所示, 沿曲线 Γ 作用有分布荷载 $P(x, y)$, 其分量为 $P_x(x, y), P_y(x, y)$ 在 Γ 上截取一个微弧段 ds , 则作用于该弧段的荷载为

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} \cdot ds = \{P\} ds$$

荷载 $\{P\} ds$ 在 Γ 外任一点 j 处所产生的位移和应力可用开尔文基本解计算。

根据叠加原理可以得到曲线 Γ 上所有荷载在 j 点产生的位移为

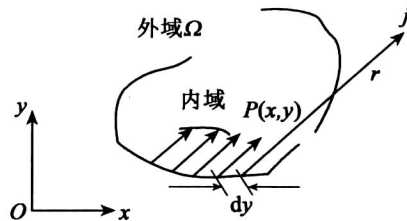


图 9-16 曲线段荷载分布形式

$$\{u\}^j = \int_{\Gamma} [u^*] \{P\} ds \quad (9-83)$$

同理, j 点的应力可表示为

$$\{\sigma\}^j = \int_{\Gamma} [S^*] \{P\} ds \quad (9-84)$$

式中,

$$[u^*] = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix}, [S^*] = \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \\ S_{31}^* & S_{32}^* \end{pmatrix}$$

其中, u_{kl}^* 为位移系数, 是 i 点 l 方向作用单位力时在 j 点 k 方向所产生的位移; S_{kl}^* 称为应力系数, 是 i 点 l 方向作用单位力时在 j 点 k 方向所产生的应力。

式(9-83)和式(9-84)一般难以求得解析解, 可把 Γ 划分为 n 个小段, 每段称为一个单元。在单元内把 $\{P\}$ 简化为均匀分布荷载, 这样, 式(9-83)和式(9-84)分别简化为

$$\{u\}^j = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} [u^*]_i^j ds \{P\}_i = \sum_{i=1}^n [U]_i^j \{P\}_i \quad (9-85)$$

$$\{\sigma\}^j = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} [S^*]_i^j ds \{P\}_i = \sum_{i=1}^n [S]_i^j \{P\}_i \quad (9-86)$$

式中, n 为单元数目; $\{P\}_i$ 是单元 i 的均布荷载向量; $[U]_i^j$ 是单元 i 对 j 点的位移系数矩阵; $[S]_i^j$ 是单元 i 对 j 点的应力系数矩阵。

$$[U]_i^j = \int_{\Gamma_i} [u^*]_i^j ds \quad (9-87)$$

$$[S]_i^j = \int_{\Gamma_i} [S^*]_i^j ds \quad (9-88)$$

为了简化上两式的积分计算, 先在各单元的局部坐标系中进行积分, 结果分别记为 $[U']_i^j$ 和 $[S']_i^j$, 略去详细推导过程给出结果如下。

$[S']_i^j$ 的各元素为

$$\begin{cases} S'_1 = -B[(3-2\nu)(Lnr_1 - Lnr_2) + (\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)] \\ S'_2 = B[2\nu(\theta_1 - \theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_2)] \\ S'_3 = B[(1-2\nu)(Lnr_1 - Lnr_2) + (\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)] \\ S'_{22} = B[2(1-\nu)(\theta_1 - \theta_2) - (\cos\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_2)] \\ S'_{31} = B[2(1-\nu)(\theta_1 - \theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_2)] \\ S'_{32} = -B[(1-2\nu)(Lnr_1 - Lnr_2) - (\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)] \end{cases} \quad (9-89)$$

而 $[U']_i$ 各元素如式(9-73)及式(9-74)所示。

将单元 i 上的均布荷载也改用局部坐标分量表示,即令

$$\{P'\}_i = \begin{Bmatrix} P'_{x'} \\ P'_{y'} \end{Bmatrix}_i$$

则该单元对 j 点的贡献为

$$\{u'\}_i^j = \{U'\}_i^j \{P'\}_i \quad (9-90)$$

$$\{\sigma'\}_i^j = \{S'\}_i^j \{P'\}_i \quad (9-91)$$

由于表面应力往往表达为表面法向应力和表面切向应力,表面位移也相应地表达为法向分量与切向分量,故将式(9-90)与式(9-91)变换到 j 单元的局部坐标系中,变换式为

$$\{\bar{u}\}_i^j = [\bar{L}] \{u'\}_i^j \quad (9-92)$$

$$\{\bar{\sigma}\}_i^j = [\bar{T}] \{\sigma'\}_i^j \quad (9-93)$$

式中, $\{\bar{u}\}_i^j$ 及 $\{\bar{\sigma}\}_i^j$ 为在 j 单元局部坐标系中给出的 j 点位移与应力; $[\bar{L}]$ 与 $[\bar{T}]$ 为在 i 单元处局部坐标系与 j 单元处的局部坐标系的转换矩阵,即位移转换矩阵

$$[\bar{L}] = \begin{pmatrix} \cos(\beta_j - \beta_i) & -\sin(\beta_j - \beta_i) \\ \sin(\beta_j - \beta_i) & \cos(\beta_j - \beta_i) \end{pmatrix} \quad (9-94)$$

应力转换矩阵

$$[\bar{T}] = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta_j - \beta_i) & \sin^2(\beta_j - \beta_i) & -\sin^2(\beta_j - \beta_i) \\ \sin^2(\beta_j - \beta_i) & \cos^2(\beta_j - \beta_i) & \sin^2(\beta_j - \beta_i) \\ \frac{1}{2}\sin^2(\beta_j - \beta_i) & -\frac{1}{2}\sin^2(\beta_j - \beta_i) & \cos^2(\beta_j - \beta_i) \end{pmatrix} \quad (9-95)$$

式中, β_j 及 β_i 如图9-17所示。将式(9-90)与式(9-91)分别代入式(9-92)与式(9-93)得

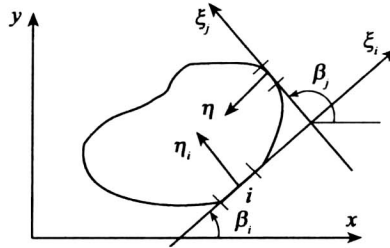
$$\{\bar{u}\}_i^j = [\bar{L}] [U']_i^j \{P'\}_i = [\bar{U}]_i^j \{P'\}_i \quad (9-96)$$

$$\{\bar{\sigma}\}_i^j = [\bar{T}] [S']_i^j \{P'\}_i = [S'']_i^j \{P'\}_i \quad (9-97)$$

把每个单元在 j 点产生的位移和应力叠加起来得到

$$\{\bar{u}\}^j = \sum_{i=1}^n [\bar{U}]_i^j \{P'\}_i \quad (9-98)$$

$$\{\bar{\sigma}\}^j = \sum_{i=1}^n [S'']_i^j \{P'\}_i \quad (9-99)$$


 图 9-17 i 点与 j 点的几何关系

若 j 点为区域边界元的中点,则式(9-98)和式(9-99)即为 j 单元中点的位移和应力,故罗列每个单元中点的位移和应力就可形成代数方程组,即

$$\{\bar{u}\} = [\bar{U}] \{P'\} \quad (9-100)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = [S''] \{P'\} \quad (9-101)$$

式中, $\{\bar{u}\}$ 为边界元表面位移的总体向量,包括每个单元中点法向和切向位移分量; $\{\bar{\sigma}\}$ 为边界元表面应力的总体向量,包括每个单元中点法向和切向应力分量; $[\bar{U}]$ 为位移影响系数矩阵; $[S'']$ 为应力影响系数矩阵。 $[\bar{U}]$ 中子块 $[\bar{U}]_i^j$ 由第 i 号单元对第 j 号点的位移影响系数组成,而 $[S'']_i^j$ 由第 i 号单元对第 j 号点的应力影响系数组成。

式(9-100)和式(9-101)共同支配着弹性体表面的状态,对于任意给定的 $\{P'\}$,表面位移满足式(9-100),而表面应力满足式(9-101)。从这些方程中消去 $\{P'\}$ 可得到

$$\{\bar{u}\} = [\bar{U}] \{S''\}^{-1} \{\bar{\sigma}\} = [K] \{\bar{\sigma}\} \quad (9-102)$$

式中,

$$[K] = [\bar{U}] \{S''\}^{-1}$$

由上述分析可见,实际问题与 $\{P'\}$ 无关,它只是为了推导公式而引用的中间参量,并不是真实荷载,而真实表面荷载是 $\{\bar{\sigma}\}$,故这一方法称为虚荷载法。式(9-102)即为间接边界单元法的基本方程。

9.3.3 边界元法求解平面问题的步骤

岩土力学与工程问题大多为无限域问题,若研究区域可假设为均匀介质,则用边界元法求解具有很多优点。对于常量边界单元直接法求解步骤为:

- (1) 在所求解问题的边界上划分边界单元,不考虑无穷远处的边界。平面问题划分为线单元,空间问题划分为面单元(平面或曲面)。
- (2) 将各单元的原岩应力反向作用于该单元上。
- (3) 用边界元法基本方程式(9-80)求解各边界单元上的作用力及位移,所得位移为边

界点的真实位移。

(4) 内点应力与位移求解。根据开尔文基本解和功的互等定理, 列出物体内任意点的位移与边界点的功的互等式。按照与基本方程导出过程相同的过程可建立基本方程, 由此可求出待求点的应力与位移, 所得位移即为实际位移, 而所得应力与原岩应力叠加后即可得真实应力。

对于多介质和含有不连续面的问题, 划分单元时, 不仅要实际边界划分为边界单元, 还需要把介质界面和不连续面也划分为边界单元; 对于有限域问题, 需将内、外边界全部划分为边界单元, 且内、外边界划分单元的转向相反, 有关这些方面更详细的介绍可查阅相关文献。

例 9-2 如图 9-18 所示的无限域, 在水平方向承受均匀拉应力。域内开一半径为 1 个单位的圆形孔洞。用直接边界单元法计算图 9-18 中给定域点的应力与位移。初始应力和材料常数如图所示。

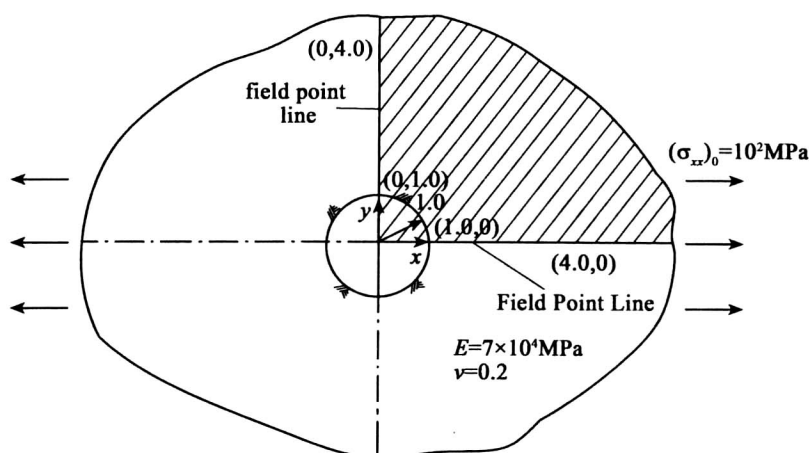


图 9-18 无限域开孔问题

解: (1) 由于问题的对称性, 取四分之一区域即可, 边界单元法计算模型如图 9-19 所示, 划分 6 个单元。采用自编 FORTRAN 程序 BEM. FOR 计算。

(2) 模型参数。

ELEMENT=NUMBER=6

YOUNG_MODULUS=0.7E+05

POISSON_RATIO=0.20

XX_FIELD_STRESS=0.1E+03

YY_FIELD_STRESS=0.0

XY_FIELD_STRESS=0.0

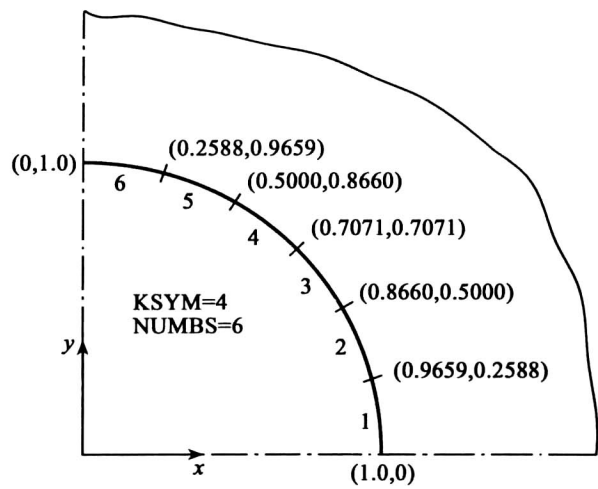


图 9-19 边界单元模型

(3)单元信息。

ELEMENT	KODE	X	Y	LENGTH	ANGLE	US	UN
1	1	0.9830	0.1294	0.2610	97.51	0.0000E+00	0.0.0000E+00
2	1	0.9160	0.3794	0.2610	112.50	0.0000E+00	0.0.0000E+00
3	1	0.7865	0.6036	0.2610	127.50	0.0000E+00	0.0.0000E+00
4	1	0.6036	0.7865	0.2610	142.50	0.0000E+00	0.0.0000E+00
5	1	0.3794	0.9160	0.2610	157.50	0.0000E+00	0.0.0000E+00
6	1	0.1294	0.9830	0.2610	172.50	0.0000E+00	0.0.0000E+00

(4)计算结果。

DISPLACEMENT AND STRESSES AT MIDPOINTS OF BOUNDARY ELEMENTS

ELEMENT	US	UN	UX	UY	SIGMA-S	SIGMA-N
1	-0.000477	-0.002649	0.002689	-0.000127	0.0	0.0
2	-0.001302	-0.002177	0.002509	-0.000377	0.0	0.0
3	-0.001778	-0.001359	0.002161	-0.000584	0.0	0.0
4	-0.001778	-0.000414	0.001663	-0.000754	0.0	0.0
5	-0.001302	-0.000404	0.001048	-0.000871	0.0	0.0
6	-0.000477	-0.000876	0.000358	-0.000931	0.0	0.0

DIPSPACEMENTS AND STRESSES AT SPECIFIED POINTS IN THE BODY

POINT	X	Y	UX	UY	SIGXX	SIGYY	SIGXY
1	1.5000	0.0000	0.002142	0.000000	19.2	-6.7	0.0
2	2.0000	0.0000	0.001691	0.000000	47.2	3.6	0.0
3	2.5000	0.0000	0.001384	0.000000	64.0	4.5	0.0
4	3.0000	0.0000	0.001167	0.000000	74.2	3.9	0.0
5	3.5000	0.0000	0.000886	0.000000	80.7	3.3	0.0
6	4.0000	0.0000	0.000000	0.000000	85.0	2.7	0.0
7	0.0000	1.5000	0.000000	-0.000947	153.2	34.4	0.0
8	0.0000	2.0000	0.000000	-0.000794	122.6	26.7	0.0
9	0.0000	2.5000	0.000000	-0.000667	112.2	19.3	0.0
10	0.0000	3.0000	0.000000	-0.000570	107.7	14.2	0.0
11	0.0000	3.5000	0.000000	-0.000496	105.3	10.8	0.0
12	0.0000	4.0000	0.002142	-0.000438	103.9	8.5	0.0

说明: KODE 描述边界条件的参数,取值方法:1—已知 σ_x 和 σ_n ;2—已知 u_x 和 u_n ;3—已知 u_x 和 σ_n ;4—已知 σ_x 和 u_n 。

9.4 有限差分法

有限差分法(Finite Difference Method)是求解给定初值和(或)边值问题的较早的数值方法之一。随着计算机技术的飞速发展,有限差分法以其独特的计算格式和计算流程显示出了该方法的优势与特点。有限差分法的主要思想是将待解决问题的基本方程组和边界条件(一般均为微分方程)近似地改用差分方程(代数方程)来表示,即用有一定规则的空间离散点处的场变量(应力、位移)的代数表达式代替。这些变量在单元内是非确定的,从而把求解微分方程的问题转化成求解代数方程的问题。

有限差分法和有限元法都产生一组待解方程组。尽管这些方程是通过不同方式推导出来的,但两者产生的方程是一致的。在有限元法中,常采用隐式、矩阵解算方法,而有限差分法则通常采用“显式”、时间递步法解算代数方程。“显式”是针对一个物理系统进行数值计算时所用的代数方程式的性质而言。在用显式法计算时,所有方程式一侧的量都是已知的,而另一侧的量只用简单的代入法就可求得。另外,在用显式法时,假定在每一迭代时步内,每个单元仅对其相邻的单元产生力的影响,而且时步应取得足够小,以使显式法稳定。在讲述有限差分法之前,先简要介绍弹性力学中常用的差分公式,它们是建立差分方程的基础。

9.4.1 有限差分基本方程

在弹性体上用相隔等间距 h 而平行于坐标轴的两组平行线划分成网格(图 9-20)。设 $f=f(x,y)$ 为弹性体内某个连续函数,它可能是某个应力分量或位移分量,也可以是应力函数、温度、渗流等。这些函数在平行于某轴的一根格线上,如图 9-20 所示,它只随该轴的坐标场函数变化而改变。在邻近节点 0 处,函数 f 可以展开为泰勒级数:

$$f=f_0+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0(x-x_0)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0(x-x_0)^4+\cdots \quad (9-103)$$

在节点 3 及节点 1, x 分别等于 x_0-h 及 x_0+h , 即, $x-x_0$ 分别等于 $-h$ 和 h 。将其代入式 (9-103), 得

$$f_3=f_0-h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0-\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0-\cdots \quad (9-104)$$

$$f_1=f_0+h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0+\cdots \quad (9-105)$$

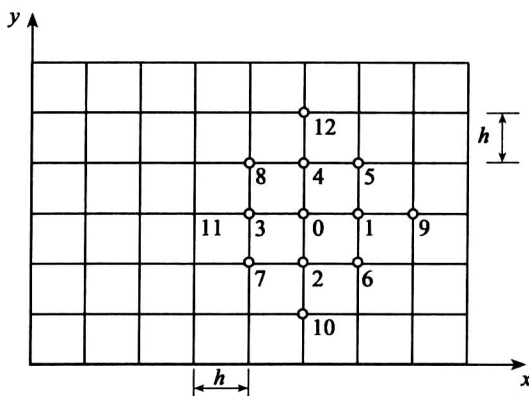


图 9-20 有限差分网格

假定 h 是充分小的, 因而可以不计它的三次幂及更高次幂的各项, 则式 (9-104) 及式 (9-105) 简化为

$$f_3=f_0-h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \quad (9-106)$$

$$f_1=f_0+h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \quad (9-107)$$

联立求解式 (9-106) 及式 (9-107), 得到差分公式:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\frac{f_1-f_3}{2h} \quad (9-108)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{h^2} \quad (9-109)$$

同样,可以得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{f_2 - f_4}{2h} \quad (9-110)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{h^2} \quad (9-111)$$

式(9-108)至式(9-111)是基本差分公式,通过这些公式可以推导出其他的差分公式,例如,利用式(9-108)和式(9-110),可以导出混合二阶导数的差分公式:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)_0 = \frac{1}{4h^2} [(f_6 + f_8) - (f_5 + f_7)]_0 \quad (9-112)$$

用同样的方法,由式(9-109)及式(9-112)可以导出4阶导数的差分公式。

应该指出,有限差分法不仅仅局限于矩形网格,Wilkins(1964)提出了推导任何形状单元的有限差分方程的方法,与有限元法类似,有限差分方法单元边界可以是任何形状,任何单元可以具有不同的性质和值的大小。

9.4.2 平面问题有限差分方程

对于平面问题,将具体的计算对象用四边形单元划分成有限差分网格,每个单元可以用两种方式再划成四个常应变三角形单元(图9-21),先对每个三角形单元做计算,叠加平均后获得该四边形单元的平均应力或应变值。三角形单元的有限差分公式用高斯发散量定理的广义形式推导得出(Malvern, 1969):

$$\int_s n_i f ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dA \quad (9-113)$$

式中, \int_s 为绕闭合面积边界积分; n_i 为对应表面 s 的单位法向量; f 为标量、矢量或张量; x_i 为位置矢量; ds 为增量弧长; \int_A 表示对整个面积 A 积分。

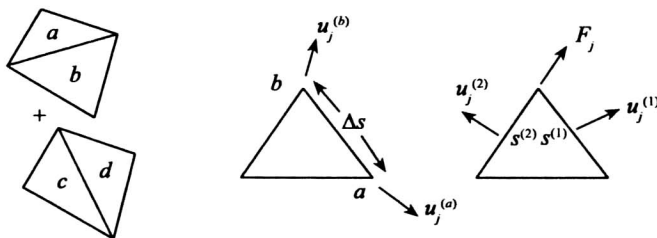


图9-21 有限差分单元划分示意图

在面积 A 上,定义 f 梯度平均值为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} dA \quad (9-114)$$

将式(9-113)代入上式,得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{A} \int_s n_i f ds \quad (9-115)$$

对一个三角形单元,式(9-115)的有限差分形式为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{A} \sum_j (f) n_i \Delta s \quad (9-116)$$

式中, Δs 是三角形的边长,求和是对该三角形的三个边进行; (f) 的值取该边的平均值。

平面问题有限差分法基于物体运动与平衡的基本规律。最简单的例子是物体质量 m 、加速度 $d\dot{u}/dt$ 与施加力 F 的关系,这种关系随时间而变化。牛顿定律描述的运动方程为

$$m \frac{d\dot{u}}{dt} = F \quad (9-117)$$

当几个力同时作用于该物体时,如果加速度趋于零,即 $\sum F = 0$ (对所有作用力求和),式(9-117)也表示该系统处于静力平衡状态。对于连续介质,式(9-117)可写成如下广义形式:

$$\rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (9-118)$$

式中, ρ 为物体的质量密度; t 为时间; x_j 为坐标矢量分量; g_i 为重力加速度(体力)分量; σ_{ij} 为应力张量分量。该式中,下标 i 表示笛卡儿坐标系中的分量。

利用式(9-116),将 f 替换成单元每边平均速度矢量,这样,单元的应变速率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 可以用节点速度的形式表述,即

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \approx \frac{1}{2A} \sum_s (\dot{u}_i^{(a)} + \dot{u}_i^{(b)}) n_j \Delta s \quad (9-119)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (9-120)$$

式中, (a) 和 (b) 是三角形边界上两个连续的节点。注意到,如果节点间速度按线性变化,式(9-119)平均值与精确积分是一致的。通过式(9-119)和式(9-120),可以求出应变张量的所有分量。

根据力学本构定律,可以由应变速率张量获得新的应力张量,即

$$\sigma_{ij} : = M(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, k) \quad (9-121)$$

式中, $M(\)$ 表示本构定律的函数形式; k 为历史参数,取决于特殊本构关系;“ $: =$ ”表示“由……替换”。

通常,非线性本构定律以增量形式出现,因为在应力和应变之间没有单一的对应关系。当已知单元旧的应力张量和应变速率(应变增量)时,可以通过式(9-121)确定新的应力张量。例如,各向同性线弹性材料本构定律为

$$\sigma_{ij} : = \sigma_{ij} + \left\{ \delta_{ij} \left(K - \frac{2}{3} G \right) \dot{\epsilon}_{kk} + 2G \dot{\epsilon}_{ij} \right\} \Delta t \quad (9-122)$$

式中, δ_{ij} 为 Kronecker 记号; Δt 为时间步; G, K 分别为剪切模量和体积模量。

在一个时步内, 单元的有限转动对单元应力张量有一定的影响。对于固定参照系, 此转动使应力分量有如下变化:

$$\sigma_{ij} : = \sigma_{ij} + (w_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}w_{kj})\Delta t \quad (9-123)$$

式中,

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (9-124)$$

在大变形计算过程中, 先通过式(9-123)进行应力校正, 然后利用式(9-122) (或本构定律式(9-121))计算当前时步的应力。

计算出单元应力后, 可以确定作用到每个节点上的等价力。在每个三角形子单元中的应力如同在三角形边上的作用力, 每个作用力等价于作用在相应边端点上的两个相等的力。每个角点受到两个力的作用, 分别来自各相邻的边(图 9-21)。因此,

$$F_i = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (n_j^{(1)} S^{(1)} + n_j^{(2)} S^{(2)}) \quad (9-125)$$

由于每个四边形单元有两组两个三角形, 在每组中对每个角点处相遇的三角形节点力求和, 然后将来自这两组的力进行平均, 得到作用在该四边形节点上的力。

在每个节点处, 对所有围绕该节点四边形的力求和 $\sum F_i$, 得到作用于该节点的纯粹节点力矢量。该矢量包括所有施加的荷载作用以及重力引起的体力 $F_i^{(g)}$

$$F_i^{(g)} = g_i m_g \quad (9-126)$$

式中, m_g 是聚在节点处的重力质量, 定义为联结该节点的所有三角形质量和的三分之一。如果四边形区域不存在(如空单元), 则忽略对 $\sum F_i$ 的作用; 如果物体处于平衡状态, 或处于稳定的流动(如塑性流动)状态, 在该节点处的 $\sum F_i$ 将视为零; 否则, 根据牛顿第二定律的有限差分形式, 该节点将被加速:

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \sum F_i^{(t)} \frac{\Delta t}{m} \quad (9-127)$$

式中, 上标表示确定相应变量的时刻。对大变形问题, 将式(9-127)再次积分, 可确定出新的节点坐标:

$$\dot{x}_i^{(t+\Delta t)} = \dot{x}_i^{(t)} + \dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} \Delta t \quad (9-128)$$

注意到式(9-127)和式(9-128)都是在时段中间, 所以中间差分公式的一阶误差项消失。速度产生的时刻, 与节点位移和节点力在时间上错开半个时步。

9.4.3 显式有限差分算法——时间递步法

我们期望对问题能找出一个静态解, 然而在有限差分公式中包含有运动的动力方程, 这样, 可以保证在被模拟的物理系统本身是非稳定的情况下, 有限差分数值计算仍有稳定解。对于非线性材料, 物理不稳定的可能性总是存在的, 如煤柱的突然垮塌。在实际问题中, 系统的某些应变能转变为动能, 并从力源向周围扩散。有限差分方法可以直接模拟这个过程, 因为惯性项包括在其中, 即动能产生与耗散; 相反, 不含有惯性项的算法必须采取某些数值

手段来处理物理不稳定。尽管这种做法可有效防止数值解的不稳定,但所取的“路径”可能并不真实。

图 9-22 是显式有限差分计算流程图。计算过程首先调用运动方程,由初始应力和边界力计算出新的速度和位移。然后,由速度计算出应变率,进而获得新的应力或力。每个循环为一个时步,图 9-22 中的每个图框是通过那些固定的已知值,对所有单元和节点变量进行计算更新。例如,从已计算出的一组速度计算出每个单元的新的应力。该组速度被假设为“冻结”在框图中,即新计算出的应力不影响这些速度。这样做似乎不尽合理,因为如果应力发生某些变化,将对相邻单元产生影响并使它们的速度发生改变。然而,如果选取的时步非常小,乃至在此时步间隔内实际信息不能从一个单元传递到另一个单元(事实上,所有材料都有传播信息的某种最大速度),因为每个循环只占一个时步,对“冻结”速度的假设得到验证,即相邻单元在计算过程中的确互不影响。当然,经过几个循环后,扰动可能传播到若干单元,正如现实中产生的传播一样。

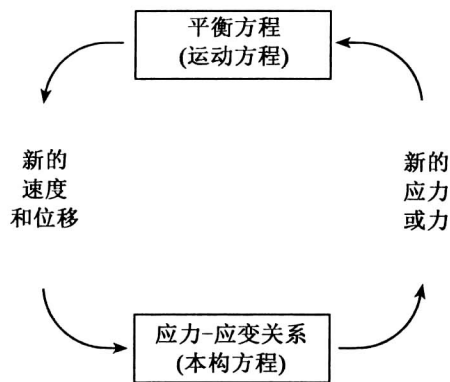


图 9-22 显式有限差分计算流程图

显式算法的核心概念是计算“波速”总是超前于实际波速。所以,在计算过程中的方程总是处在已知值为固定的状态。这样,尽管本构关系具有高度非线性,显式有限差分数值法从单元应变计算应力过程中无需迭代过程,这比通常用于有限元程序中的隐式算法有着明显的优越性,因为隐式有限元在一个解算步中,单元的变量信息彼此沟通,在获得相对平衡状态前,需要若干迭代循环。显式算法的缺点是时步很小,这就意味着要有大量的时步。因此,对于病态系统、高度非线性问题、大变形、物理不稳定等,显式算法是最好的;而对于模拟线性、小变形问题,则效率不高。

由于显式有限差分法无需形成总体刚度矩阵,可在每个时步通过更新节点坐标的方式,将位移增量加到节点坐标上,以材料网格的移动和变形模拟大变形,这种处理方式称为“拉格朗日算法”,即在每步过程中,本构方程仍是小变形理论模式,但在经过许多步计算后,网格移动和变形结果等价于大变形模式。

用运动方程求解静力问题,还必须采取机械衰减方法来获得非惯性静态或准静态解,通常采用动力松弛法,在概念上等价于在每个节点上联结一个固定的“黏性活塞”,施加的衰

减力大小与节点速度成正比。

前已述及,显式算法的稳定是有条件的,即“计算波速”必须大于变量信息传播的最大速度。因此,时步的选取必须小于某个临界时步。若用单元尺寸为 Δx 的网格划分弹性体,满足稳定解算条件的时步 Δt 为

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{C} \quad (9-129)$$

式中, C 是波传播的最大速度,典型的是 P -波 C_p :

$$C_p = \sqrt{\frac{K+4G/3}{\rho}} \quad (9-130)$$

对于单个质量-弹簧单元,稳定解的条件是

$$\Delta t < 2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (9-131)$$

式中, m 是质量; k 是弹簧刚度。在一般系统中,包含有各种材料和质量-弹簧联结成的任意网络,临界时步与系统的最小自然周期 T_{\min} 有关:

$$\Delta t < \frac{T_{\min}}{\pi} \quad (9-132)$$

下面,通过一个简单例子,说明显式有限差分法在解题过程的一些特点。如图 9-23 所示,一个一维杆件用数个等尺寸的有限差分网格划分,杆件的密度为 ρ ,杨氏模量为 E 。对于固体材料,微分形式的本构方程为

$$\sigma_{xx} = E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (9-133)$$

运动方程(或平衡方程)为

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (9-134)$$

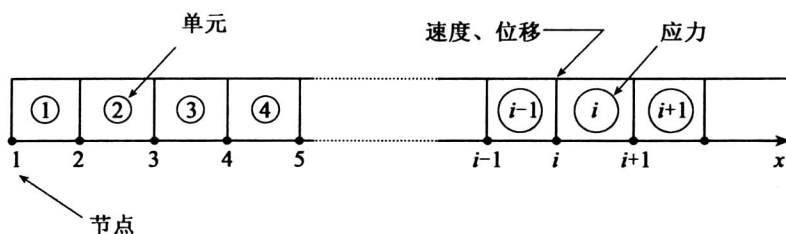


图 9-23 一维杆件的有限差分网格示意图

假设杆件无侧向约束。对于单元 j , 与式(9-133)对应的中间有限差分公式为

$$\sigma_{xx}^i(t) = E \frac{u_x^{i+1}(t) - u_x^i(t)}{\Delta x} \quad (9-135)$$

式中, (t) 表示其变量是在时刻 t 确定的; 上标 i 表示单元或节点编号。

同样, 对节点 i 的有限差分形式运动方程为

$$\frac{\rho}{\Delta t} \left\{ \dot{u}_x^i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \dot{u}_x^i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} = \frac{1}{\Delta x} \{ \sigma_{xx}^i(t) - \sigma_{xx}^{i-1}(t) \} \quad (9-136)$$

或写成

$$\dot{u}_x^i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \dot{u}_x^i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{ \sigma_{xx}^i(t) - \sigma_{xx}^{i-1}(t) \} \quad (9-137)$$

积分后得出位移

$$u_x^i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = u_x^i(t) + \dot{u}_x^i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t \quad (9-138)$$

在显式算法中,所有有限差分方程右端的值均是已知的。因此,必须先用式(9-135)算出所有单元的应力,然后再由式(9-137)和式(9-138)计算所有节点的速度和位移。在概念上,这个过程等价于对变量值“同时”更新,而不是像其他方法那样,方程右端混存有“新”、“旧”值,对变量值“依次”更新。

9.4.4 三维问题有限差分法方程

对于三维问题,先将具体的计算对象用六面体单元划分成有限差分网格,每个离散化后的立方体单元可进一步划分出若干个常应变三角棱锥体子单元,如图9-24所示。

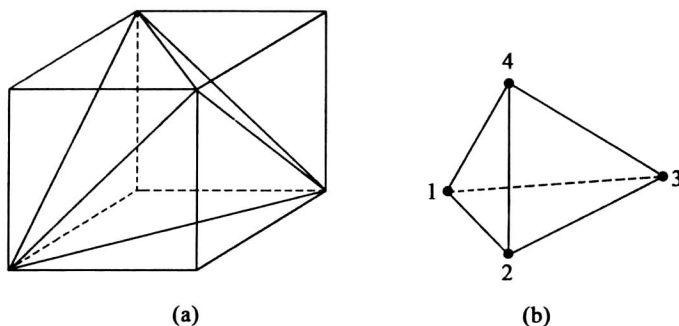


图9-24 立方体单元划分成5个常应变三角棱锥体单元

应用高斯发散定理于三角棱锥形体单元,可以推导出

$$\int_V v_{i,j} dv = \int_S v_i n_j ds \quad (9-139)$$

式中,积分分别是对棱锥体的体积和面积进行积分; n_j 是锥体表面的外法线矢量。

对于恒应变速率棱锥体,速度场是线性的,并且 n_j 在同一表面上是常数。因此,通过对式(9-139)积分,得到

$$V_{v(i,j)} = \sum_{f=1}^4 \int_S \bar{v}_i^f n_j^f ds^f \quad (9-140)$$

式中,上标 f 表示与表面 f 上的附变量相对应; \bar{v}_i^f 是速度分量 i 的平均值。

对于线性速率变分,有

$$\bar{v}_i^f = \frac{1}{3} \sum_{l=1, l \neq f}^4 v_i^l \quad (9-141)$$

式中,上标 l 表示关于节点 l 的值。

将式(9-141)代入式(9-140),得到节点和整个单元体的关系:

$$V_{v(i,j)} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^4 v_i^l \sum_{f=1, f \neq l}^4 \pi_j^f s^f \quad (9-142)$$

如果将式(9-139)中的 v_i 用 1 替换,应用发散定律,可得

$$\sum_{f=1}^4 \pi_j^f s^f = 0 \quad (9-143)$$

利用式(9-143),并用 V 除以式(9-142),得到

$$v_{i,j} = -\frac{1}{3V} \sum_{l=1}^4 v_i^l \pi_j^l s^l \quad (9-144)$$

同样,应变速率张量的分量可以表示成

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{6V} \sum_{l=1}^4 (v_i^l n_j^l + v_j^l n_i^l) s^l \quad (9-145)$$

三维问题有限差分法同样基于物体运动与平衡的基本规律,具体推导过程同式(9-117)至式(9-128)。

例 9-3 一土质边坡,高 10m,坡角 45° ,按平面应变建立计算模型,如图 9-25 所示。由于本例旨在说明基于有限差分法的 FLAC 应用方法,模型范围选择与实际应用范围有一定差异,对计算模型的边界作简化处理:底部固定,左右两侧水平约束,上部为自由边界;计算所用岩土体力学参数:重度 $\gamma=20\text{kN/m}^3$,体积弹性模量 $K=100\text{MPa}$,泊松比 $\mu=0.3$,黏结力 $c=0.35\text{kPa}$,内摩擦角 20° ;采用 Mohr-Coulomb 准则,初始应力场按自重应力场考虑;计算收敛准则为不平衡力比率满足 10^{-5} 的求解要求,计算时步止限为 30000steps。

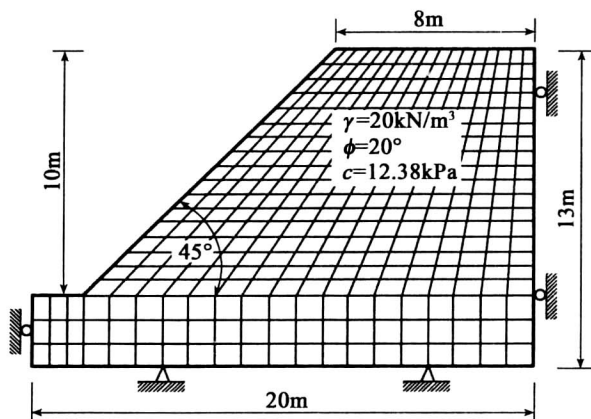


图 9-25 边坡计算模型

解:上述分析模型的安全系数强度折减法求解命令如下:

;NEW	;开始新的分析
; gen zone brick &	;建立网格模型
p0 0 0 0 p1 2 0 0 p2 0 0.5 0 p3 0 0 3 size 3 1 3	;生成块体区域,三个方向各自为3,1,3等份
gen zone brick &	;生成块体区域,三个方向各自为17,1,3等份
p0 2 0 0 p1 20 0 0 p2 2 0.5 0 p3 2 0 3 &	;其中 x 方向临近单元比率为1.03
size 17 1 5 ratio 1.03 1 1	
gen zone brick &	;生成块体区域,三个方向各自为17,1,3等份
p0 2 03 p1 20 0 3 p2 2 0.5 3 p3 12 0 13 &	;其中 x 方向临近单元比率为1.03
p4 20 0.5 3 p5 12 0.5 13 p6 20 0 13 &	
p7 20 0.5 13 size 17 1 17 ratio 1.03 1 1	
fix x y z range z -0.1 0.1	;固定模型底部边界的 x,y,z 方向速度
fix x range x 19.9 20.1	;固定模型边界 $x=20$ 面所有点 x 方向速度
fix x range x -0.1 0.1	;固定模型边界 $x=0$ 面所有点 x 方向速度
fix y	;固定模型边界所有点 y 方向速度
;初始地应力的生成	
model elas	;设置弹性本构关系
prop density 2000 bulk 3e9 shear 1e9	;设置弹性常数
set gravity 0 0 -10.0	;设置重力加速度
solve	求解,得初应力
ini xdisp 0 ydisp 0 zdisp 0	;位移场清零
inixvel 0 yvel 0 zvel 0	;速度场清零
;安全系数求解	
Model mohr	;设置摩尔-库仑本构模型
Prop density 2000 bulk 1.0e8 shear 3.0e7 &	;设置物理力学参数
coh 12380.0 tens1.0e6 fric 20 dila 20	
solve fos file slope3dfos.sav associated	;采用关联流动法则求解安全系数 fos
运行上述命令,键入命令:	
Plot fos cont ssi outline on vel red	;绘制安全系数、剪切应变增量及速度矢量图

所得模型安全系数、剪切应变增量云图及速度矢量图如图 9-26 所示。

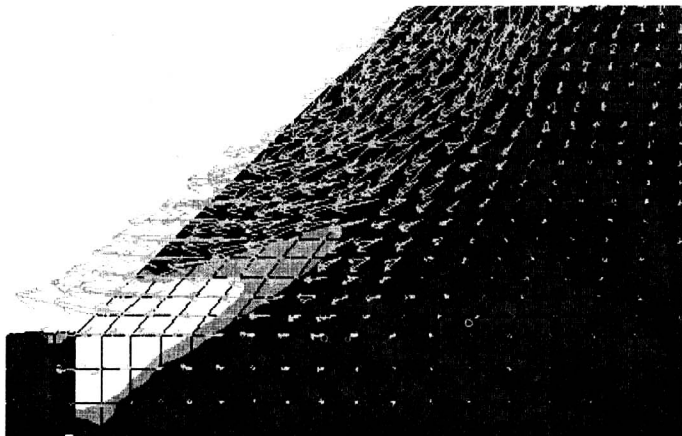


图 9-26 剪切应变增量云图及速度矢量图

9.5 离散元法

离散元法 (Distinct Element Method) 是从 20 世纪 70 年代初开始兴起的一种数值计算方法, 特别适用于节理岩体的应力分析。

离散元法也像有限元法那样, 将区域划分成单元。但是, 单元因受节理等不连续面的控制, 在以后的运动过程中, 单元节点可以分离, 即一个单元与其邻近单元可以接触, 也可以分开。单元之间相互作用的力可以根据力和位移的关系求出, 而个别单元的运动则完全根据该单元所受的不平衡力和不平衡力矩的大小按牛顿运动定律确定。

离散元法是一种显式求解的数值方法。该方法与在时域中进行的其他显式计算相似, 例如, 与解抛物线型偏微分方程的显式差分格式相似。由于用显式法时不需要形成矩阵, 因此可以考虑大的位移和非线性, 而不用花费额外的计算时间。

9.5.1 离散元法的基本方程

在解决连续介质力学问题时, 除了边界条件外, 还有 3 个方程必须满足, 即平衡方程、变形协调方程和本构方程。变形协调方程保证介质变形的连续性, 对于离散元法而言, 由于介质一开始就被假设为离散的块体集合, 故块与块之间没有变形协调的约束, 所以不需要满足变形协调方程。本构方程即物理方程, 它表征介质应力和应变之间的物理关系。另外, 相对于每一块体的平衡方程, 是应该满足的。例如, 对于某一块体 A , 其上有邻近块体通过边、角作用于它的一组力, 这一组力以及重力对块体的重心会产生合力 F 和合力矩 M (图 9-27)。如果合力和合力矩不等于零, 则不平衡力和不平衡力矩使块体根据牛顿第二定律 $F=ma$ 和 $M=I\ddot{\theta}$ 的规律运动。块体的运动不是自由的, 它会遇到邻接块体的阻力。这种位移和力的作用规律就相当于物理方程, 它可以是线性的, 也可以是非线性的。计算按照整个时步迭代, 并遍历整个块体集合, 直到对每一块体都不再出现不平衡力和不平衡力矩为止。

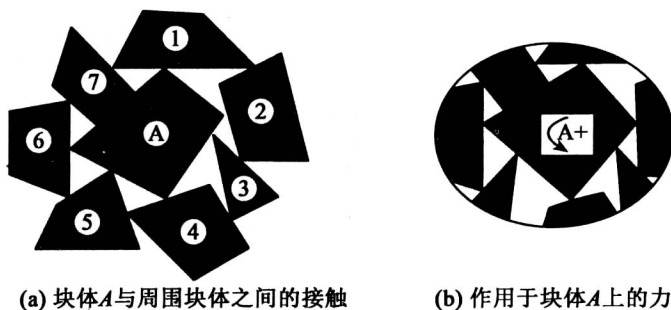


图 9-27 块体结构模型

9.5.1.1 物理方程——力和位移的关系

假定块体之间的法向力 F_n 正比于它们之间位移的“叠合” U_n , 即

$$F_n = K_n U_n \quad (9-146)$$

式中, K_n 为法向刚度系数。如图 9-27(a) 所示, 如果两个离散元的边界相互“叠合”, 则有两个角点与界面接触, 可用界面两端点的作用力来代替该界面上的力。图 9-27(b) 表示最为简单的两个角点相接触的“界面叠合”模式。

由于块体所受的剪切力与块体运动和加载的历史或路径有关, 所以对于剪切力要用增量 ΔF_s 来表示。如图 9-27(b) 所示, 设两块体之间的相对位移为 ΔU_s , 则

$$\Delta F_s = K_s \Delta U_s \quad (9-147)$$

式中, K_s 为节理的剪切刚度系数。

9.5.1.2 运动方程——牛顿第二运动定律

根据岩块的几何形状及其与邻近岩块的关系, 可以计算出作用在某一特定岩体上的一组力, 由这一组力不难计算出它们的合力和合力矩, 并可以根据牛顿第二定律确定块体质心的加速度和角加速度, 进而可以确定在时步 Δt 内的速度和角速度以及位移和转动量。在块体形心上应满足(图 9-28):

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \sum F_i \\ M &= \sum e_{ij} x_j F_j \\ \ddot{u}_i &= \frac{F_i}{m} \\ \ddot{\theta} &= \frac{M}{I} \end{aligned} \right\} \quad (9-148)$$

式中, m 为岩块的质量, 其重心坐标为 (x, y) ; I 为岩块绕其重心的转动惯量; M 为岩块的力矩。

例如, 对于 J 方向的加速度, 有

$$\ddot{U}_x = \frac{F_x}{m} \quad (9-149)$$

式中, F_x 为 x 方向的合力; m 为岩块的质量。

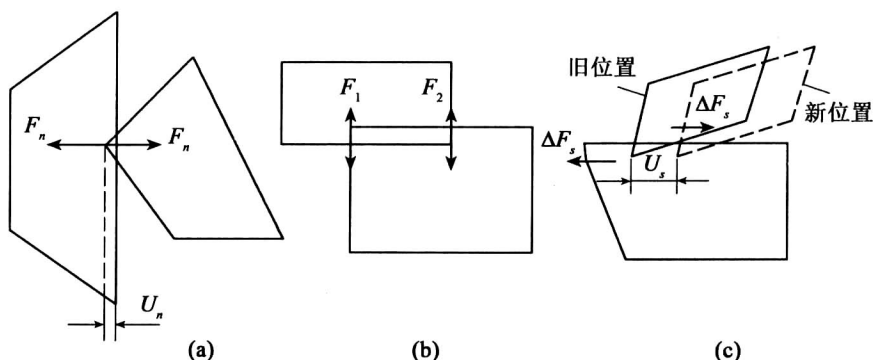


图 9-28 离散元之间的作用力

对上式用向前差分格式进行数值积分,可以得到岩块质心沿 x 方向的速度和位移:

$$\dot{U}_x(t_1) = \dot{U}_x(t_0) + \ddot{U}_x \Delta t \quad (9-150)$$

$$U_x(t_1) = U_x(t_0) + \dot{U}_x \Delta t$$

式中, t_0 为起始时间; Δt 为时步; $t_1 = t_0 + \Delta t$ 。对于块体沿 y 方向的运动及转动,有类似的算式。

9.5.2 离散元法的计算机实施

离散元法的计算原理虽然很简单,但在计算机上实施起来却非常复杂,涉及很多问题。下面将讨论 4 个主要问题,即动态松弛法、力和位移的计算循环、分格检索以及数据结构。

9.5.2.1 动态松弛法

动态松弛法是把非线性静力学问题转化为动力学问题求解的一种数值方法。该方法的实质是对临界阻尼的振动方程进行逐步积分。对于这种带有阻尼项的动态平衡方程,利用有限差分法按时步在计算机上迭代求解,就是所谓的动态松弛法。由于被求解的方程是时间的线性函数,整个计算过程只需要直接代换,即利用前一迭代的函数值计算新的函数值,因此,对于非线性问题也能加以考虑,这是动态松弛法的最大优点。

在用动态松弛法时,计算循环是以时步 Δt 向前差分进行的。由于时步选取得非常小,每个单元在一个时步内只能以很小的位移与其相邻接的单元作用,而与较远的单元无关系,在一个时步内只能传递一个单元。

9.5.2.2 力和位移的计算循环

这里讨论的是如何用动态松弛法作力和位移的计算循环,如图 9-29 所示。

离散元法可采用动态松弛法求解,其基本运动方程为

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i(t) = f(t) \quad (9-151)$$

动态松弛法对上式用中心差分法求解,是一种显式求解,缺点在于计算时步 Δt 要求很小,且需要合理地确定阻尼系数等。

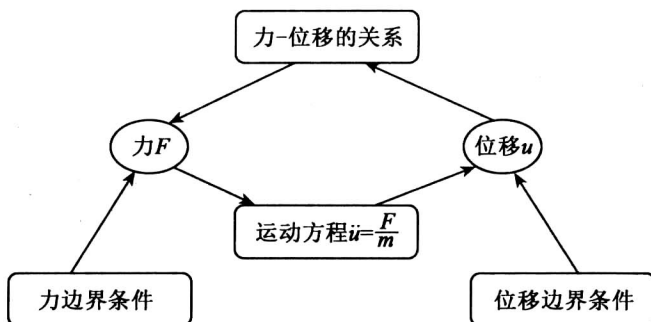


图 9-29 计算循环

在算法中,假定力在一个时步内只能传递到一个单元,并按力和位移的循环迭代计算,下面分别说明。

1. 已知力求位移

为了不失一般性,一般块体的运动方程可如下表示:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{u}_x + \alpha m\dot{u}_x &= F_x \\ m\ddot{u}_y + \alpha m\dot{u}_y &= F_y \\ I\ddot{\theta} + \alpha I\dot{\theta} &= M \end{aligned} \right\} \quad (9-152)$$

式中, α 为块体的质量阻尼比例系数。

对式(9-152)进行一阶中心差分可得

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\dot{u}_x(t+\Delta t/2) - \dot{u}_x(t-\Delta t/2)}{\Delta t} + \alpha m \frac{\dot{u}_x(t+\Delta t/2) + \dot{u}_x(t-\Delta t/2)}{2} &= F_x \\ m \frac{\dot{u}_y(t+\Delta t/2) - \dot{u}_y(t-\Delta t/2)}{\Delta t} + \alpha m \frac{\dot{u}_y(t+\Delta t/2) + \dot{u}_y(t-\Delta t/2)}{2} &= F_y \\ I \frac{\dot{\theta}(t+\Delta t/2) - \dot{\theta}(t-\Delta t/2)}{\Delta t} + \alpha I \frac{\dot{\theta}(t+\Delta t/2) + \dot{\theta}(t-\Delta t/2)}{2} &= M \end{aligned} \right\} \quad (9-153)$$

由上式可求得 $t+\Delta t/2$ 时刻的速度分量和角速度,即

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x(t+\Delta t/2) &= \left[\ddot{u}_x(t-\Delta t/2)(1-\alpha\Delta t/2) + \frac{F_x}{m}\Delta t \right] / \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2} \right) \\ \dot{u}_y(t+\Delta t/2) &= \left[\ddot{u}_y(t-\Delta t/2)(1-\alpha\Delta t/2) + \frac{F_y}{m}\Delta t \right] / \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2} \right) \\ \dot{\theta}(t+\Delta t/2) &= \left[\ddot{\theta}(t-\Delta t/2)(1-\alpha\Delta t/2) + \frac{M}{I}\Delta t \right] / \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-154)$$

由式(5-154)可得 t 到 $t+\Delta t$ 时刻内的位移和转角的增量,即

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_x &= \dot{u}_x(t+\Delta t/2) \Delta t \\ \Delta u_y &= \dot{u}_y(t+\Delta t/2) \Delta t \\ \Delta \theta &= \dot{\theta}(t+\Delta t/2) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (9-155)$$

进一步得到 $t+\Delta t$ 时刻的位移和转角为

$$\left. \begin{aligned} u_x(t+\Delta t) &= u_x(t) + \Delta u_x \\ u_y(t+\Delta t) &= u_y(t) + \Delta u_y \\ \theta(t+\Delta t) &= \theta(t) + \Delta \theta \end{aligned} \right\} \quad (9-156)$$

上述过程即为已知力求位移所要实现的主要内容。另外,其中要判别块体运动程度是否过大,如果超过一定限度,则要设置标志 RFLAG,以作为重新进行分格检索操作的标志。

2. 已知位移求力

首先是对接触关系链表进行遍历,计算每一个接触由于块体运动产生的接触力。简言之,即算法的力和位移循环中的已知位移求力部分。

令本块体为 i , 与其接触的块体为 j , 接触点为 c , 以 j 为参照物, 得到接触处的相对位移增量为

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_x^c &= [\Delta u_x^i - (y^c - y^i) \Delta \theta^i] - [\Delta u_x^j - (y^c - y^j) \Delta \theta^j] \\ \Delta u_y^c &= [\Delta u_y^i + (x^c - x^i) \Delta \theta^i] - [\Delta u_y^j + (x^c - x^j) \Delta \theta^j] \end{aligned} \right\} \quad (9-157)$$

将上式进行坐标转换, 得到接触点处的切向和法向位移增量为

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_t^c &= \Delta u_x^c \cos \alpha + \Delta u_y^c \sin \alpha \\ \Delta u_n^c &= -\Delta u_x^c \sin \alpha + \Delta u_y^c \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9-158)$$

于是得法向力和切向力为

$$\left. \begin{aligned} F_n^c &= F_n^c - \Delta u_n^c k_n \\ F_t^c &= F_t^c + \Delta u_t^c k_t \end{aligned} \right\} \quad (9-159)$$

由不抗拉条件, 若 $F_n^c < 0$, 则令

$$\left. \begin{aligned} F_n^c &= 0, D_n^c = 0 \\ F_t^c &= 0, D_t^c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-160)$$

式中, D_n^c, D_t^c 为接触点的阻尼力, 由下式定义:

$$\left. \begin{aligned} D_n^c &= -\beta k_n \Delta u_n^c \\ D_t^c &= \beta k_t \Delta u_t^c \end{aligned} \right\} \quad (9-161)$$

若切向力超过摩擦力, 即 $|F_t^c| > \mu F_n^c$ 时, 则令

$$\left. \begin{aligned} F_t^c &= \mu F_n^c \cdot \text{sign}(F_t^c) \\ D_t^c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-162)$$

式中, μ 为摩擦系数。

再将力转化为整体坐标系下的分量, 即

$$\left. \begin{aligned} F_x^{ci} &= -(F_t^c + D_t^c) \cos \alpha - (F_n^c + D_n^c) \sin \alpha \\ F_y^{ci} &= -(F_t^c + D_t^c) \sin \alpha + (F_n^c + D_n^c) \cos \alpha \\ F_x^{cj} &= -F_x^{ci} \\ F_y^{cj} &= -F_y^{ci} \end{aligned} \right\} \quad (9-163)$$

将接触力加到 i 块体的合力中去,即

$$\left. \begin{aligned} F_{xsum}^i &= F_x^{ci} + F_{xsum}^{ci} \\ F_{ysum}^i &= F_y^{ci} + F_{ysum}^{ci} \\ M_{sum}^i &= F_y^{ci}(x^e - x^i) - F_x^{ci}(y^e - y^i) + M_{sum}^i \end{aligned} \right\} \quad (9-164)$$

相应地,将接触力加到 j 块体的合力中去,同式(9-164)。

以上算法可归结为图 9-30 所示的循环交错求解特性。由图可知,如果根据边界条件已知位移 $u(t)$,则按前面所讲述的公式不难求出力 $F(t)$,然后可确定 $\ddot{u}(t)$,加上上一轮已知的 $\dot{u}(t-\Delta t/2)$,进而求得 $\dot{u}(t+\Delta t/2)$,对其积分后得 $u(t+\Delta t/2)$,如此循环往复,直到位移和力收敛,达到平衡状态,或者达到某一循环数为止。

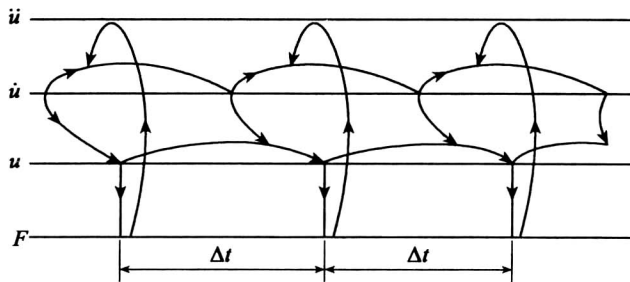


图 9-30 离散元法的循环交错求解特性

9.5.2.3 分格检索

分格检索实际上是块体接触点的识别问题,这是离散元法所特有的问题,在有限元法和边界元法中,单元之间的节点是固定的。但在离散元法中,允许单元有较大的位移,此时,某一块体可与这些块体接触,彼时,则该块体可与另外一些块体接触,因此接触点是不固定的。原则上,在离散块体系统中,每一块体都有可能与其他任一块体相接触。例如,假定有 100 个四边形块体,每一个块体的任一个角都有可能与其他 99 个块体的任一边相接触,于是有 $(100 \times 4) \times (99 \times 4) \approx 400^2$ 种可能接触。如果在每一次循环中都要检索 16 万次,效率将极低,研究者们在这方面做了许多工作,其中分格检索将是一种比较有效的方法。

对于多边形离散元法来说,分格检索首先将所研究的区域划分成方格网(图 9-31),若想判断某一块体的某一边与哪一块体的边、角相接触,只需在该边所属的或周围的方格内检索即可。在计算过程中,每隔若干次循环程序自动检索一次,去掉脱离接触的关系,同时形成新的接触关系。何时进行检索和判断两个块体是否接触的限值,由程序内部给出判断。

网格尺寸和数目对计算效率至关重要。如果网格尺寸过大,虽然会减少访问网格的时间,但每个网格内的块体角数相对增多,机器检索可能达到无格检索所需要的时间。如果网格过小,虽然会降低内存要求,但是会产生很多空网格,同样消耗 CPU 的时间。因此,有一个最优网格尺寸的问题。一般情况下,理想的网格数目应是块体数目的 10% ~ 100%,最少为 20 个。选择网格尺寸最简单的方法是取所研究区域尺寸的十分之一。

需要注意的是,当块体运动到网格区域外时,就认为该块体固定不动了。

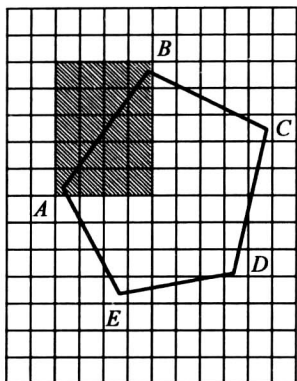


图 9-31 分格检索

9.5.2.4 数据结构

数值计算中常用的数据结构一般是静态的。所谓静态数据结构,就是在一个数据结构存在期间,其结构的特性不变。在计算中,静态数据结构可以用不同的方式表示,其中最简单和最普遍的方法是把数据元素存在一组连续的存储单元中,每个元素可直接连接下一个元素,由计算机内存按地址随机地存取,而不需要指针。但是,对静态数据结构作插入一个节点或删除一个节点的运算是非常困难的,几乎要移动一半以上的节点,而且数据量不易随意扩充。由于离散元法计算中,单元之间的接触关系是不固定的,需要经常建立和修正它们之间的接触关系,相应地,它们的数据结构要随时作增加或删除一些节点的运算。因此,静态数据结构对离散元法是不合适的,应该采用另一种数据结构,即动态数据结构。

动态数据结构是使用线性链表(一组任意的存储单元)存放数据元素的一种结构,它可以动态地增加或减少节点。线性链表中的每一个节点除了需要存储数据元素的值外,还需要有一个能够指示数据元素在表中位置的指针或链信息。因此,对于线性链表来说,整个数据结构由若干个节点组成,而每个节点又由数据域和指针两部分组成。

在离散元中,刚性块体之间是相对独立的,所有的块体组成一个块体集,并人为地进行编号,每一块体可以看成是具有多种属性的实体。不随时步变化的属性包括块体编号、块体所包含的角点个数、块体质量等,随时步变化的属性包括块体的角点数组(存放此时角点的坐标值)、块体的速度、块体的重心坐标值、该块体与其他块体的接触关系链表等,其中,对接触关系的判断和处理是计算的关键。

9.5.3 参数的选择和本构模型

在用离散元法计算时,能否选择合理的计算参数和本构关系,对于解的正确与否是至关重要的。离散元法一般采用动态松弛法求解,而用此方法求解所固有的困难是选择阻尼和时步。

9.5.3.1 阻尼

岩块在运动中一般不发生弹跳,这是由于运动时其动能转化成热能而耗散掉的缘故。因此,岩块的运动是不可逆的过程;否则,如果一个弹性系统中有了动能,就会在平衡位置附

近作简谐振动。为了避免这一点,就要采用加阻尼的办法来耗散系统在振动过程中的动能,以使系统达到稳定的状态。

阻尼可分为黏性阻尼、自适应阻尼和库仑阻尼,分别讨论如下:

1. 黏性阻尼

在弹性系统中加黏性阻尼,在物理上可用沃伊特 (Voigt) 模型表示(图 9-32),其自由振动微分方程为

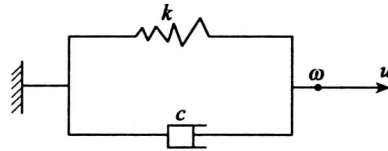


图 9-32 Voigt 模型

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (9-165)$$

式中, m 是集中质量; c 是黏性阻尼系数; k 是弹性刚度系数; u 是位移。

令

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2mw_n$$

$$\zeta = c/c_c$$

式中, c_c 为临界阻尼系数; w_n 为无阻尼振动时系统的固有频率, 且 $w_n = \sqrt{k/m}$; ζ 为阻尼比。于是, 式(5-165)可变成

$$\ddot{u} + 2\zeta w_n \dot{u} + w_n^2 u = 0 \quad (9-166)$$

令上式的解为 $u = A_0 e^{st}$ (A_0 为待定参数), 则有

$$s = -\zeta w_n \pm iw \quad (9-167)$$

式中, $w = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。

阻尼比 ζ 对黏性阻尼自由振动产生很大的影响, 根据 ζ 的大小, 将阻尼振动系统分为以下三类:

(1) 欠阻尼振动系统。当 $\zeta < 1$ 时, 称为欠阻尼振动系统。这时, 式(9-165)的通解可由式(9-167)得到, 即

$$u = e^{-\zeta w_n t} (A \cos wt + B \sin wt) = u_0 e^{-\zeta w_n t} \cos(wt - \varphi) \quad (9-168)$$

式中, A, B, u_0 和 φ 分别为与边界条件有关的常数。

(2) 临界阻尼振动系统。当 $\zeta = 1$ 时的振动系统, 称为临界阻尼振动系统。此时, $c = c_0$, $w = 0$ 。因此, 式(9-168)变成

$$u = u_0 \cos \varphi e^{-w_n t} \quad (9-169)$$

这是不发生振动的非周期性运动方程, 同时也是振动发生的临界方程, 所以称 $c_0 = 2\sqrt{mk}$ 为临界阻尼系数。

(3) 过阻尼振动系统。当 $\zeta > 1$ 时的振动系统, 称为过阻尼振动系统, 这时, $c > c_0$, 式(5-165)的通解为

$$u = e^{-\zeta w_n t} (D e^{w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} + E e^{-w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}) \quad (9-170)$$

此时的运动已不再是振动。

可以看出,不同的阻尼代表不同的振动形式,图9-33所示为其示意图,为了求得系统的准静态解,阻尼系数应取得比临界值稍小些,以便系统的响应几乎是“死拍子”,从而加快解的收敛速度。

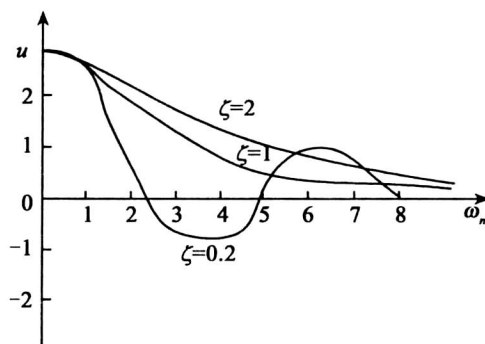


图9-33 不同阻尼比时的自由振动

工程中常用的黏性阻尼为瑞利(Rayleigh)线性比例阻尼,对于其他形式的阻尼,可利用等效阻尼的概念近似地划分为线性比例阻尼。对于弹性连续(没有滑移、分离或接触的)系统来说,瑞利线性比例阻尼可表示为

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (9-171)$$

式中, $[C]$ 是阻尼矩阵; $[M]$ 是质量阻尼矩阵; $[K]$ 是刚度阻尼矩阵; α 和 β 分别是质量阻尼比例系数和刚度阻尼比例系数,并且由下式确定:

$$\alpha = \zeta_{\min} w_{\min} \quad (9-172)$$

$$\beta = \frac{\zeta_{\min}}{w_{\min}} \quad (9-173)$$

式中, ζ_{\min} 和 w_{\min} 的意义如图9-34所示。

对于振型为 S , 圆频率为 w_s 的振动系统,瑞利阻尼的作用效果可用下式确定:

$$S_s = \frac{1}{2} \left(\frac{w_s}{w_{\min}} + \frac{w_{\min}}{w_s} \right) \zeta_{\min} \quad (9-174)$$

或者

$$S_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{w} + \beta w_s \right) \quad (9-175)$$

从式(9-175)和图9-34可以看出,对于作低频率振动的系统,质量阻尼比较有效,而对于刚度阻尼,则适用于作快速、高频振动的系统。

如前所述,瑞利阻尼理论适用于弹性连续介质的振动系统,不完全适用于非连续介质系统,因为非连续介质系统随着块体之间的滑移或分离,其振型是不确定的,但阻尼却仍然存在。此时,阻尼可用图9-35所示的物理模型来解释,图中质量阻尼为 dm ,可以想象把整个

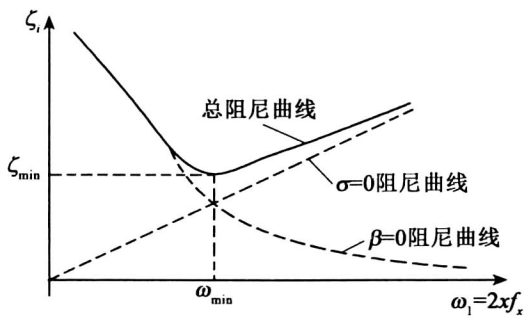


图 9-34 瑞利阻尼曲线

系统浸泡在黏性液体中,在物理意义上等价于用黏性活塞将块体单元与一不动点相连,使块体单元的绝对运动受到阻尼;刚度比例阻尼为 d_s ,在物理意义上等价于用黏性活塞把两个接触块体连接起来,使块体单元之间的相对运动受到阻尼。

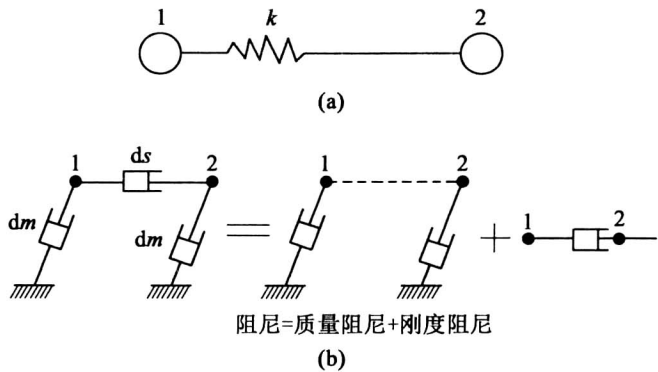


图 9-35 阻尼的物理模型

2. 自适应阻尼

前面介绍的与速度成正比的阻尼在解决问题时,有时会遇到如下 3 个困难:

- (1) 该阻尼中由于引入了体力,故在某些情况下会得出错误的破坏模式。
- (2) 最佳的阻尼系数一般取决于矩阵的特征值。对于线性问题,求特征值的时间几乎是整个动态松弛计算所需的时间;而对于非线性问题,特征值则是根本求不出的。
- (3) 阻尼系数对于所有块体都是相同的。而实际情况中,常常是所研究的问题,其某一部分处于稳定状态,而另一部分处于运动状态。因此,对于不同的区域应采用不同的阻尼才比较合理。

为了克服上述困难,康德尔提出了两种自适应阻尼。第一种自适应阻尼仍采用黏性阻尼,只是阻尼所吸收的能量与系统的动能变化率之比是定值,采用伺服机理对黏性阻尼系数进行自适应控制。具体方法是先计算能量比率 R ,即

$$R = \frac{\sum E_D}{\sum \dot{E}_k} \quad (9-176)$$

式中, E_D 是阻尼所吸收的能量; \dot{E}_k 是系统动能的变化率。然后根据能量比率的大小来调整阻尼系数。

实验表明, 当 R 在 0.5 附近时, 阻尼效果接近于临界阻尼。因此, 当 R 值大于 0.5 时, 应减小阻尼系数 c 的值 (每次可减小 1%); 当 R 值小于 0.5 时, 应加大阻尼系数 c 的值 (每次可增加 10%)。

从式 (9-176) 还可以得知, 当系统趋于稳定状态 (平衡或稳定流动) 时, 动能变化率会趋于零, 阻尼力也会随即趋近于零。因此, 该阻尼方法的实质是, 利用系统动能, 在达到最大值时, 通过其平衡位置来调整阻尼系数。

第二种自适应阻尼称为局部自适应阻尼。该阻尼力的大小与块体所受的不平衡力成正比, 其方向取使块体振动衰减的方向, 而不是作稳定运动的方向, 即

$$F_d \propto |F| \text{sign}(\dot{F})$$

式中, F_d 是块体所受的阻尼力; F 是块体所受的不平衡力。

应用局部自适应阻尼可以完全克服上述的 3 个困难: 对于稳定状态情况, 体力消失; 阻尼系数既无量纲, 又不取决于边界条件或性质; 阻尼力在系统内各地方是变化的。但是, 局部自适应阻尼总是使系统处于过阻尼状态。

3. 库仑阻尼

库仑阻尼也就是摩擦阻尼, 它是由两个干燥表面相对滑动而形成的, 如图 9-36 所示。库仑阻尼力等于正压力 N 与摩擦系数 μ 的乘积, 并且假定运动一开始就有摩擦, 摩擦系数 μ 与速度无关。

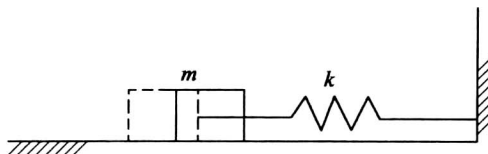


图 9-36 库仑阻尼

为了确定阻尼使振幅衰减的大小, 可借助功能原理, 令动能变化等于所作的功。由于摩擦阻尼力的方向总是与块体的运动方向相反, 故每一符号的运动方程只对半个循环有效。现任选一个半循环, 由速度等于零和振幅等于 u_i 的极限位置开始, 其动能变化为零, 对质量 m 作功等于零, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}k(u_1^2 - u_{-1}^2) - F_d(u_1 + u_{-1}) &= 0 \\ \frac{1}{2}k(u_1 - u_{-1}) &= F_d \end{aligned} \right\} \quad (9-177)$$

或

式中, F_d 是库仑阻尼力; u_{-1} 是半个循环后的振幅。对下半个循环重复上述过程, 振幅将再次减小 $2F_d/k$ 。因此每一循环振幅衰减是不变的, 且等于

$$u_1 - u_2 = \frac{4F_d}{k} \quad (9-178)$$

式中, u_2 是第二个循环的振幅。但衰减是有止境的, 当振幅小于某个 Δ 值时, 运动将停止, 因为静摩擦力通常大于动摩擦力, 所以在这个位置时弹簧力将不足以克服静摩擦力。

对于库仑阻尼自由振动系统, 其频率与无阻尼时相同, 都等于 $\sqrt{k/m}$, 且振幅随时间线性衰减(图 9-37)。

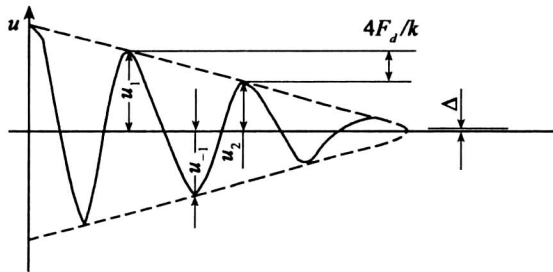


图 9-37 具有库仑阻尼的自由振动

9.5.3.2 时步

对于具有集中质量 m 和刚度 k 时的单自由度弹性振动系统, 其运动方程为

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (9-179)$$

式中, u 是位移, \ddot{u} 是加速度。由中心差分法, \ddot{u} 可写成

$$\ddot{u} = \frac{u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)}{(\Delta t)^2} \quad (9-180)$$

将上式代入式(9-179), 有

$$\frac{m[u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)]}{(\Delta t)^2} + ku(t) = 0$$

或者

$$u(t+1) + \left[\frac{k(\Delta t)^2}{m} - 2 \right] u(t) + u(t-1) = 0 \quad (9-181)$$

根据差分理论, 方程式(9-181)的解为

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[2 - \frac{k}{m}(\Delta t)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m} \right)^2 (\Delta t)^4 - 4 \frac{k}{m}(\Delta t)^2} \right] \quad (9-182)$$

为了使解具有振荡特性, $u(t)$ 必须是复数, 即要求

$$\left(\frac{k}{m} \right)^2 (\Delta t)^4 - 4 \frac{k}{m}(\Delta t)^2 < 0$$

或

$$\Delta t < 2\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2}{\omega_n} \quad (9-183)$$

又由 $w_n = 2\pi/T$ (T 是固有振动周期), 可把上式写成

$$\Delta t < \frac{T}{\pi} \quad (9-184)$$

理论证明, 系统的最小固有振动周期总是大于其中任何一个单元的最小固有振动周期 T_{\min} , 将后者用于时步计算, 其结果是稳定的。因此, 在离散元法计算中通常取时步为

$$\Delta t \leq T_{\min}/10 \quad (9-185)$$

式中, T_{\min} 可由下式确定:

$$T_{\min} = 2\pi \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \left(\sqrt{\frac{m_i}{k_i}} \right) \quad (9-186)$$

式中, n 表示单元数, m_i 为第 i 单元的集中质量; k_i 为第 i 单元的弹性刚度系数。

以上时步计算公式中没有考虑阻尼的影响。在应用显式中心差分求解微分方程时, 阻尼会降低稳定解的时步值。一般认为, 通常结构大多是欠阻尼系统, 中心差分法的稳定计算时步为

$$\Delta t \leq \frac{2}{w_{\max}} (\sqrt{1+\zeta^2} - \zeta)$$

式中, ζ 是系统振动圆频率取最大值 w_{\max} 的阻尼比。最大圆频率为

$$w_{\max} = \sqrt{\lambda}$$

式中, λ 是系统的最大特征值。

9.5.3.3 本构模型

现介绍两种二维离散元本构模型, 这两种本构模型都属于与速度无关的弹塑性无张力接触模型, 该模型认为块体之间不存在拉力, 且当切向力 F_t 达到某一最大值时, 就会发生塑性剪切滑移, 并由下式确定:

$$|F_t| \leq F_n \tan \varphi + c = (F_t)_{\max} \quad (9-187)$$

式中, $|F_t|$ 是允许的最大切向力, φ 是摩擦角; F_n 是法向力; $(F_t)_{\max}$ 是最大切向力。

弹塑性无张力接触模型的力与位移关系如图 9-38 所示, 图中的法向刚度系数和切向刚度系数可由下面的公式近似计算。

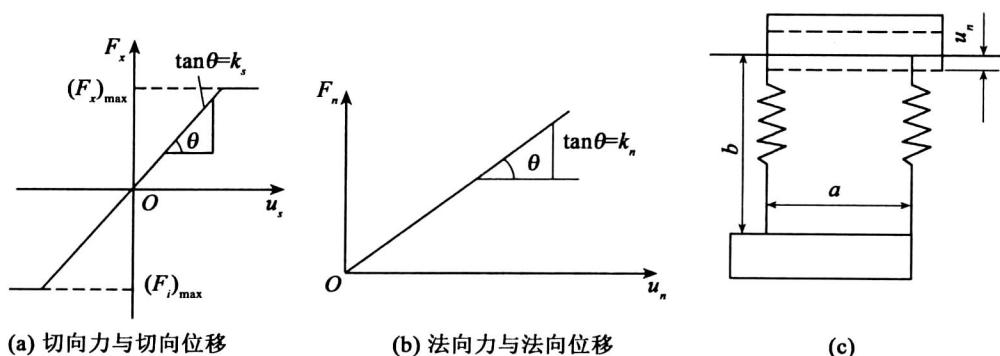


图 9-38 块体计算接触模型

如图 9-38(c) 所示的两个接触块体, 其长度和宽度分别为 a 和 b , 其弹性模量为 E , 泊松比为 ν , 根据弹性力学理论有

$$\frac{2k_n u_n}{a} = \frac{E u_n}{b}$$

从而可得到法向刚度系数为

$$k_n = \frac{Ea}{2b} \quad (9-188)$$

切向刚度系数 k_s 可由法向刚度系数 k_n 求得, 即

$$k_s = \frac{k_n}{2(1+\nu)} \quad (9-189)$$

1. 角-边接触的本构模型

这是一种最简单的接触模型, 认为只存在一种接触关系, 即角-边接触关系。该模型认为块体之间不存在拉力, 且当切向力 F_s 达到某一最大值时, 就会发生塑性剪切滑移, 并由下式确定:

$$|F_s| \leq F_n \tan \varphi + c = (F_s)_{\max} \quad (9-190)$$

2. 边-边接触的本构模型

边-边接触模型(图 9-39)与角-边接触不同, 其接触刚度单位是应力/位移, 因此, 接触边作用的是应力。由于应力在接触边的分布不确定, 最为简便的方法是把该应力近似地表示成两个均匀分布的应力。接触面的塑性剪切破坏准则为

$$\sigma_s = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (9-191)$$

式中, σ_s 是切向应力; c 是黏结力; φ 是内摩擦角。

9.5.3.4 块体平均应力和平均主应力的计算方法

如图 9-40 所示, 平均应力可以定义为

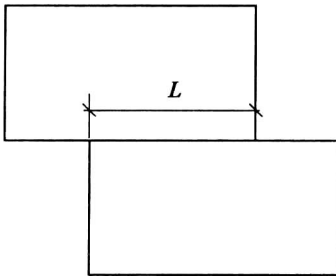


图 9-39 边-边接触模型

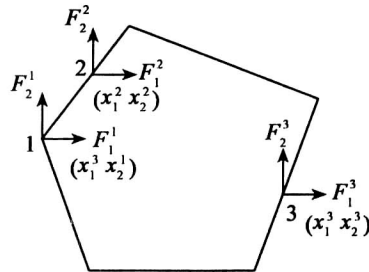


图 9-40 单个块体受力

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{ij} dA$$

$$(X_i \sigma_{kj})_k = \delta_{ik} \sigma_{kj} + X_i \sigma_{kjk} = \sigma_{ij}$$

因为 $\sigma_{kjk} = 0$ (平衡方程), 故可得

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{A} \int_A (X_i \sigma_{kj})_k dA \quad (9-192)$$

由高斯定理

$$\int_A f_i dA = \int_s f n_i dS$$

故式(9-192)可变为

$$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{A} \int_s X_i \sigma_{kj} \cdot n_k dS \quad (9-193)$$

其中, $\sigma_{kj} \cdot n_k = t_o$ 。

所以,式(9-193)可化为

$$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{A} \int_s X_i t_j dS = \frac{1}{A} \sum_i X_i F_j \quad (9-194)$$

若 $i=x, j=y$, 则式(9-194)可展开为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_{xx} &= \sum_{i=1}^n X^i F_x^i \\ \sigma_y = \sigma_{yy} &= \sum_{i=1}^n Y^i F_y^i \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^n X^i F_y^i = \sum_{i=1}^n Y^i F_x^i \end{aligned} \right\} \quad (9-195)$$

平面应力问题的主应力计算公式如下:

主应力数值:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9-196)$$

主应力方向:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

9.6 应用岩土数值分析方法应注意的问题

岩土力学数值分析讲究应用,要求读者能够掌握每种方法的基本理论,弄清其来龙去脉的主线条,每种方法都有其特点和适用范围,会熟练应用其中一两种方法,能够熟练使用相关软件或自编程序,当然,加强实践和总结体会也必不可少。

针对某类具体工程问题,能否得到合理的计算结果,取决于计算方法的选择和方法的正确实施,包括程序的正确实现。而能否得到合理或较合理的有用结果,则取决于计算模型及其参数,以及边界条件、初始条件、相互作用、耦合问题等的正确模拟,这常常是问题的核心。所谓正确模拟,首先必须定性正确,其次才能保证量化比较准确。因此,学习和应用数值分析方法时必须把握好如下几个方面的关键问题:

(1) 弄清每种方法的数学力学原理,掌握基本假定和适用范围;

(2) 弄清每种方法对岩土材料模型及其参数的要求;

(3) 弄清每种方法对岩土材料与结构的相互作用模型及其参数的要求,包括岩石块体之间的关联和相互作用模型与参数;

- (4) 分析初始条件、边界条件和荷载特征等,确定模拟思路;
- (5) 分析岩土体是否存在渗流和与水的相互作用或其他耦合问题;
- (6) 对于反演分析,要研究和分析已知数据,明确待求未知量,选择恰当方法。

运用任一种数值分析方法,都必须先分析拟解决问题的关键所在,具体应用某岩土数值分析方法时,应注意并理清如下几个主要环节:

- (1) 研究分析对象,明确计算目的和拟解决的关键问题,选择数值方法,确定建模方案;
- (2) 确定运用的模型及其参数;
- (3) 确定边界条件与初始条件;
- (4) 确定模拟荷载及荷载的动态变化;
- (5) 确定计算的收敛评判依据;
- (6) 考察各环节简化的合理性,算例验算,否则,应调整建模及有关计算模型与参数;
- (7) 确定处理方法及成果整理的内容与分析方案。

第 10 章 岩土力学的最新进展

岩土力学是一门既具有理论内涵,又具有很强工程实践性发展中的科学。岩土力学面对的是“数据有限”的问题,不仅输入给模型的基本参数很难准确给出,而且能够对过程(特别是非线性过程)的演化提供反馈信息或者能校正模型的测量也并不多;另外,对岩土体的破坏机理尚不能清晰地理解,自然界中的岩土体被各种构造形迹(如断层、节理、层理、破碎带)切割成既连续又不连续的地质体,因切割程度的不同,形成松散体—弱面体—连续体的一个序列,这一岩体序列要比迄今为止人类熟知的任何工程材料都复杂,它几乎到处都在变化着,且所涉及的力学问题是多场(应力场、温度场、渗流场)、多相(气、固、液)影响下的地质构造与工程结构相互作用的耦合问题。因此,工程岩土体的变形破坏特征极为复杂,且多半是高度非线性的。岩土体力学问题多半是不确定性的、多尺度的,研究的对象也在不断变化,有时很难找到一种精确的算法进行求解。正因为如此,许多岩土力学过程的数学描述要么是不存在的,要么是弱的或者是不完全的,更糟的是,可以广泛接受的概化模型并不多。所以,人们在理论分析和数值模拟岩土力学问题时,经常不得不在特定条件下进行假设,套用已有的理论和定理进行处理,致使分析结果有时与实际出入很大。如果认为输入参数、边界条件、几何方程、平衡方程是基本符合实际的,那么对计算结果影响最大的是岩体本构关系模型,而岩体本构关系模型的给定本身就带有相当程度的盲目性。目前,对真实岩土本构模型的研究还不完善,而且还涉及对各种假定下得到的结构模型的选择上,“参数给不准”和“模型给不准”已成为岩土力学理论分析与数值模拟的“瓶颈”问题。

人工智能、神经网络、遗传算法、进化计算、非确定性数学、非线性力学、系统科学等新兴科学的兴起,为我们提供了全新的思维方式和研究方法,为突破岩土力学的传统研究方法提供了强有力的理论基础。

10.1 智能岩土力学

智能岩土力学的提出,最早受人工智能专家系统解决经验问题的优越性影响,岩石分类专家系统的建立,极大地推动了基于经验知识的推理方法的应用,一些岩土力学问题的神经网络模型的出现又展示了自学习、非线性动态处理与分布式表达方法的强大生命力。鉴于人工智能在岩土力学中的发展,我国学者冯夏庭教授等于 1994 年提出了建立“智能岩土力学”的设想。20 世纪 90 年代以来的国际岩土力学学会大会以及各大洲的岩土力学大会都将其列为重要研究领域进行研讨。一些大型研究计划,如我国国家自然科学基金及一些西方国家的研究计划等,也都将其列为重点课题予以支持,从而使智能岩土力学的学术思想不断深化,新的模型和方法不断涌现,研究队伍不断壮大,一些确定性分析方法无法解决的问

题也得到了很好的解决。现在,该学术思想已渗透到岩土力学与工程的许多方面,取得了一系列重要进展,并迅速发展成为一门新的岩土力学学科分支。

智能岩土力学是将人工智能、神经网络、遗传算法、进化计算、非确定性数学、非线性力学、系统科学、系统工程地质学等与岩土力学进行交叉、融合,在信息时代思维方式的指导下,从岩体问题的实际出发,系统而全方位地研究岩土力学智能化问题,建立蕴涵岩体力学内在本质的理论体系,包括专家系统、知识学习、智能化应力模拟和理论分析、基于工程实例的类比、各种分析方法的综合集成、经验加计算的集成、力学参数和模型的智能辨识等。

以下对智能岩土力学目前的一些主要研究成果进行简单介绍。

10.1.1 专家系统及应用

专家系统是模拟人类专家解决复杂问题过程的计算机智能系统,它包括知识获取、知识表达方法的确定、知识库的建立、推理模型的研究和推理机的设计以及系统实现等部分。

10.1.1.1 知识获取

专家系统的知识包括专家个人的经验和蕴涵在工程实例中的工程经验。对于前者,专家系统的建造者需要通过与领域专家的充分接触和交谈,获取其经验;对于后者,可以采用机器学习的方法对收集到的工程实例进行学习,获取蕴涵在工程实例中的知识,再通过相应的转换,变成推理规则。

10.1.1.2 岩土力学知识的综合表达方法

知识表达是研究如何将获取的专家经验和工程经验(包括大量的定性描述)表达成计算机能接受的形式,以便在后来的问题求解过程中对这些知识进行计算或推理而获得结论。一般的知识表示方法是采用数学描述,如应力-应变关系可写成

$$\varepsilon = \left(\frac{\alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \cdots + \alpha_0}{\beta_m D^m + \beta_{m-1} D^{m-1} + \cdots + \beta_0} \right) \sigma \quad (10-1)$$

式中, α_i 、 β_i 分别为与所取模型有关的已知系数; $D = \frac{\partial}{\partial t}$ 为微分算子, t 为时间参量; n 、 m 分别为微分阶数; ε 、 σ 分别为应变和应力。

基于数学描述的表达只适用于有明确函数关系的情形,是一种确定性的表达,它不适用于定性描述和定性逻辑关系的表达。而在岩土力学中,存在很多复杂的知识表达方式,有确定性的和不确定性的、有分类层次的等,也存在大量的定性描述和逻辑关系,如“节理是发育的”、“断层作用不十分明显”等都是定性描述,“如果节理不发育和岩体完整系数大于0.9,那么岩体完整”则是逻辑关系的描述。对于这些描述,采用人工智能的规则、语义网络、框架结构来表达更为有效。

10.1.1.3 推理方向

反向推理从规则树的顶层开始,向下递推直到最底层,根据用户输入的数据确定底层节点的取值状态,然后沿着原来的搜索路径逆向搜索,直至顶层。它先在原知识的指导下选择一个可能的目标,并放入“事实黑板”中,然后在知识库中寻找能证实这个目标的知识,并生成规则关系树,在这个规则关系树中,自顶向下寻找证据,若这个规则关系树中某一母节点的所有子节点都是初始节点,且不能被“黑板”中的事实所匹配,则其母节点不能被证实,并

记上“死路”标记;再重新确定一个母节点进行确认,如果某一母节点的一个子节点是中间节点,且暂时未能被上下文证实或否定,则将该子节点作为子目标,压入“事实黑板”,按照上述类似的方法寻找支持这个子目标的证据,直到所有的子目标被证实或被否定而结束,工作过程如图 10-1 所示。

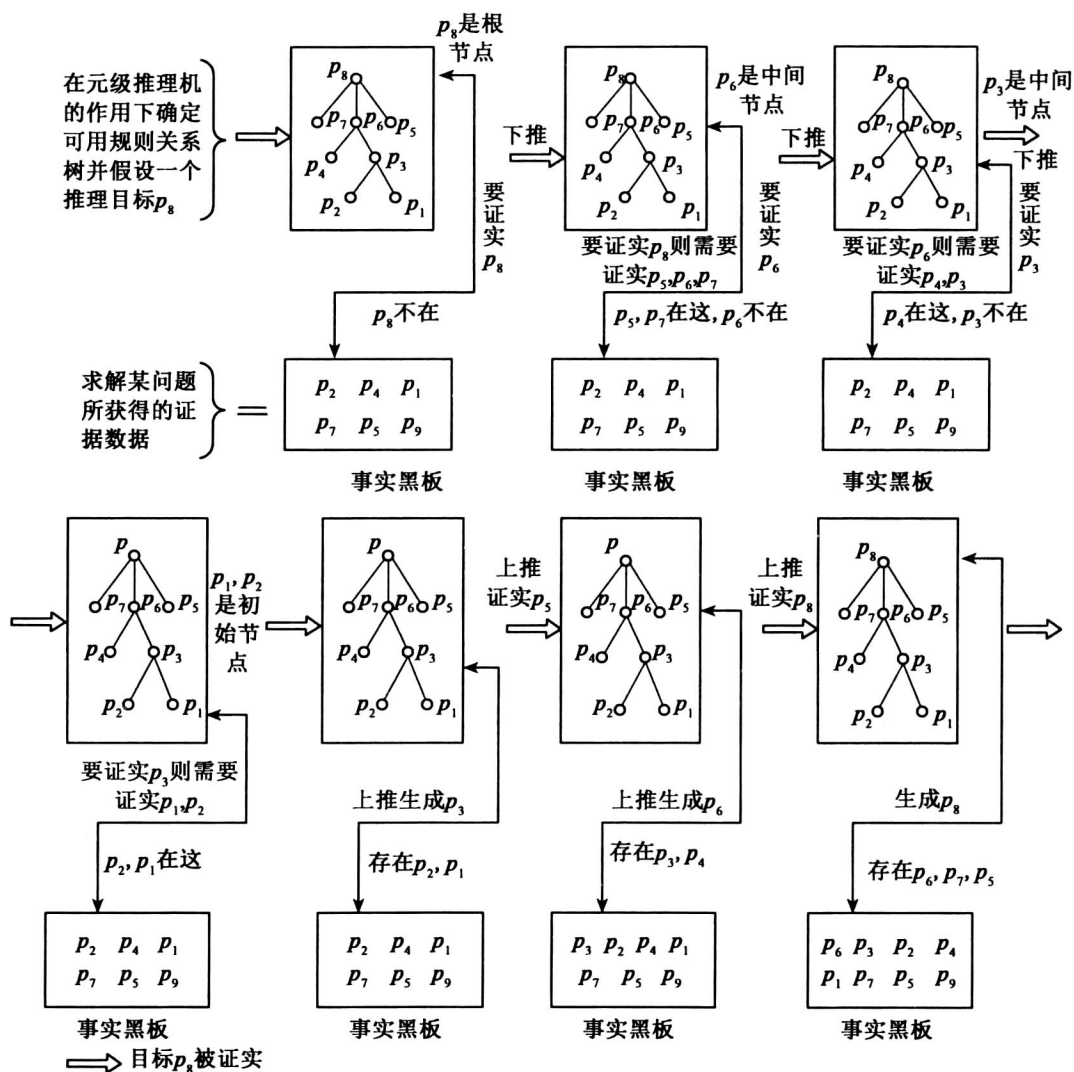


图 10-1 反向推理示意图

10.1.1.4 搜索策略

搜索策略是研究如何从一个知识空间中搜索满足给定条件或要求的特定对象的方法。一般情况下,不同的搜索问题需要用不同的测试。搜索方法是适合于岩石工程问题求解的一种变形的深度优先搜索策略。这种搜索策略从规则关系树根节点开始,逐节点往下搜索,

边搜索边生成,边生成边测试,如果搜索目标实现,则生成一棵实际的规则关系树。

10.1.1.5 不确定性推理方法

用智能理论处理岩石工程问题,一个重要的特点就是运用合适的 uncertainty 推理方法对涉及的不确定性知识和信息进行推理,最后做出决策。不确定性推理方法的好坏,直接影响到决策结果的可靠性和系统的决策能力。

专家解决岩体力学问题就是利用所积累的知识,通过推理得出结论。定量模拟是计算机在岩土力学领域的常规应用。但专家常常在未获得详细的计算数据时,就能预测或解释一些岩体力学系统的行为。这可通过定性推理来解决。定性推理把岩土力学系统或岩土力学过程细分为子系统或子过程,对于每个子系统或子过程以及它们之间的相互作用或影响建立起结构描述,通过局部因果性的传播和行为合成,获得实际岩土力学系统的行为描述和功能描述。因此,定性、定量推理的结合将会对岩土力学科学决策产生重大影响。针对不同的不确定性的起因,可以采用不同的理论和推理方法,如处理随机性的 Bayes 方法和证据理论、处理模糊性的可信度和模糊测度方法和处理分布式的并行推理方法等。

10.1.2 人工神经网络及应用

传统岩土力学研究的思维方式一般为正向思维,即确定性思维,这种方式很难解决复杂的、有大量非确定性因素的岩土力学问题。近几年来,大量信息时代的思维方式涌现出来。同时,思维科学及脑科学的发展为人们解决复杂的岩土力学问题指明了方向。人工神经网络是基于模仿大脑的结构和功能而构造的一种信息处理系统,它能向不完全、不精确并带有强噪声的数据学习,具有极强的容错能力,能从有限的、有缺陷的信息中得到系统的近似最优解。人工神经网络的这种良好性能一经岩土力学工作者发现,就很快被采用。国内张清教授 1991 年首先将人工神经网络引入岩土力学中,此后的十多年里,人工神经网络在岩土力学研究中得到了广泛的应用,几乎涉及岩土力学研究的各个方面。这里从以下几个方面展开讨论。

10.1.2.1 岩土力学参数非线性关系的神经网络建模

可用一个并行分布式神经网络 $NN(n, h_1, \dots, h_k, m)$, 将某种岩土力学参数关系 G 描述与表达为

$$\begin{aligned} G: R^n \rightarrow R^m \quad NN(n, h_1, \dots, h_k, m): R^n \rightarrow R^m \\ y = G(x) \rightarrow y = NN(n, h_1, \dots, h_k, m)(x) \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned} \quad (10-2)$$

式中, x_i 为第 i 个自变量, $i=1, 2, \dots, n$; y_j 为第 j 个因变量, $j=1, 2, \dots, m$; n, h_1, \dots, h_k, m 为隐含层 F_1, \dots , 隐含层 F_q 和输出层 F_y 的节点数。

这种新的描述是将 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 用神经网络的输出节点来表达, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 用神经网络的输入节点来表达,从而建立的多层神经网络(图 10-2)。

神经网络模型 $NN(n, h_1, \dots, h_p, m)$ 可以通过实例的训练获得。

10.1.2.2 监测时序的神经网络模型

对于某一岩土力学非线性动力演化过程,通过测量获得其力学行为随时间变化的一个

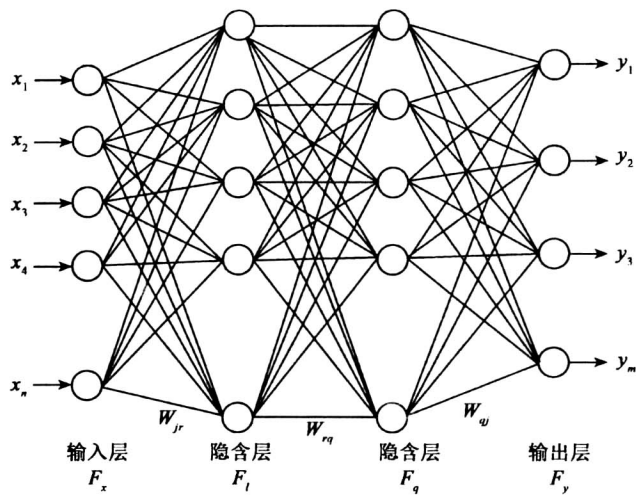


图 10-2 神经网络模型

序列 $\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 。利用以获得的历史信息进行建模,找出在 $i+p$ 时刻的值 x_{i+p} 与其前 p 个历史时刻的值 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+(p-1)}$ 的关系,即

$$x_{i+p} = f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+(p-1)}) \quad (10-3)$$

$$x_{i+p} = \text{NN}(p, h_1, \dots, h_k, 1)(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+(p-1)}) \quad (10-4)$$

式中, f 为蕴涵于实测数据中的非线性关系,可用神经网络 $\text{NN}(p, h_1, \dots, h_k, 1)$ 进行描述与表达(图 10-3); $i=1, 2, \dots, n, n=N-p-m, n, m$ 分别为用于建立模型、测试模型的数据点数; p 为历史数据点数。

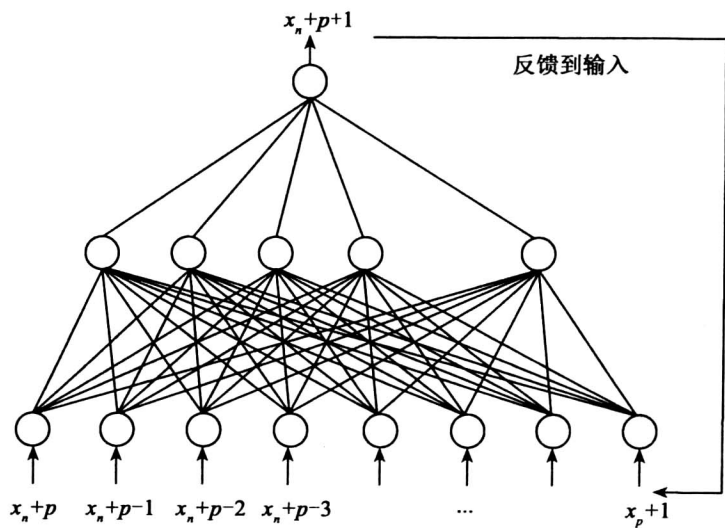


图 10-3 监测时序的神经网络模型

10.1.2.3 位移反分析的神经网络建模

从系统角度考虑反分析,发现反分析无非是由一个灰色系统的输出确定其输入的过程,也可看成系统输出到系统输入的一个映射,而人工神经网络的数学本质则为输入到输出的映射,可见,反分析中采用人工神经网络是很自然的。

由于神经网络模型建立的一个先决条件是较完备的样本集,而岩土力学反分析中很难得到训练样本集,因为反分析中一般仅已知观测位移、应力、应变及一些施工条件等,很难得到用于训练网络与观测结果相应的岩石本构、物性参数及地应力条件等。由于存在这种困难,目前反分析中神经网络应用的研究还不成熟。

例如,待反演岩土力学参数与位移之间的非线性关系可用一个并行分布式神经网络 $NN(n, h_1, \dots, h_p, m)$ 描述,即

$$\begin{aligned} NN(n, h_1, \dots, h_k, m) : R^n &\rightarrow R^m \\ D &= NN(n, h_1, \dots, h_k, m)(P) \\ P &= (p_1, p_2, \dots, p_n) \\ D &= (d_1, d_2, \dots, d_m) \end{aligned} \quad (10-5)$$

式中, p_i 为第 i 个待反演的参数, $i=1, 2, \dots, n$;

$(P) = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, E, \nu, c, \varphi, \dots\}$, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 为初始地应力的三个分量;

E, ν, c, φ 分别为某一区域内岩体的弹性模量、泊松比、内聚力和内摩擦角; d_j 为第 j 个位移分量, $j=1, 2, \dots, m$ 。

10.1.2.4 小尺度、大尺度之间非线性关系的神经网络建模

室内岩块试件的实验、室内物理模拟实验以及现场原位实验所获得的岩石破裂机制、规律、特性等,具有信息分形自相似性,通过建立小尺度、大尺度之间非线性关系,可以实现由小尺度的信息预测较大尺度的信息。例如,实验发现,节理的开度随剪切位移的增加而具有明显的尺度效应,即在同样实验手段测得的同等剪切位移下,大尺度试件的节理开度要大于等于长度分割获得的小尺度试件的节理开度,这表明,岩石节理面具有与颗粒相关联的粗糙性和具有分形表面的粗糙性。用较小尺度(如长度 120cm 的试件分割成 60cm 的 2 个试件、分割成 30cm 的 4 个试件和分割成 15cm 的 8 个试件)的剪切测试获得的剪切位移和开度数据作为学习样本,建立神经网络模型 $NN(n, h_1, h_2, 1)$, 用此模型合理地预测稍大一些尺度(如长度 120cm 的试件)的节理开度变化情况。

10.1.2.5 本构关系智能识别神经网络建模

由于本构关系也是一个描述应力和应变关系的映射关系,因此可利用神经网络建立材料本构模型。目前,有利用神经网络建立复杂材料本构模型来代替传统的数学建模方法,并在实验室材料试验的基础上建立神经网络本构模型。

10.1.3 其他研究

1. 综合集成智能分析方法研究

考虑到不同岩土力学问题的求解方法和过程是变化的,可以把目前的各种方法纳入智能系统中,由系统根据问题的特征进行分析方法的自适应选择,对他们的决策结构进行自适

应分析,得出理论上合理、工程上接受的结论。

2. 岩石工程的系统整体设计方法研究

岩石工程设计和开挖作为一个系统过程,开挖过程的各个步骤需要综合考虑地质特征的识别、工程岩体分级分区、工程分区设计、分区施工和设计方案校准。在设计工程中,各种地质、施工、工程因素必须尽可能的得到考虑。

3. 数据实时收集和实时分析方法研究

现场数据实时采集,并通过高速数据通信网络传输到地面终端,通过中央控制器做迅速决策,并实时返回到施工现场,所以信息高速公路是这种方法的支持基础。

智能岩土力学是基于现代科学理论的综合而提出的新兴研究领域,实现传统岩土力学到智能岩土力学的转变的首要问题是思维方式的变革,变革成为一种采用信息时代的系统、不确定、反馈和全方位等的新思维方式,这种系统思维体现在岩土力学学科就成为复杂的系统问题,需要将系统的部分要素与整体的关系统筹考虑。

岩土力学系统具有不确定性,包括随机性、模糊性和未确知性。原始条件是模糊的,有些现象根本无法弄清楚,需要运用不确定性推理方法才能解决问题。需要研究学习方法,在实践中不断通过学习来完善岩土力学知识。全方位思维要求从不同的途径探索解决问题的方法,这就是采用多学科交叉、渗透,发展新的岩土力学理论,以攻克岩土力学难关。从岩土力学工艺、生产设备、安全、维护、运输、人员等多方面综合研究,提高岩石工程效率。岩土力学系统本身的某些状态可能是不清楚的,但其过程是可以控制的,通过反馈,可以实现系统的稳定性、平衡态的转变、系统的最优控制。通过测量系统的输出状态,可以推知系统的输入状态。

10.2 细观岩土力学

岩土力学研究的基本问题是岩石的变形和抗破坏性,而岩石破坏规律的研究一直是岩土力学研究的难点,解决岩石破坏理论的关键是研究岩石的破坏过程。在岩体的稳定性分析中,研究岩体的破坏过程是预报岩体失稳破坏、选择最佳围岩支护时间最基本的工作之一。例如,岩体破坏的初始破裂常被用做预报岩体破坏的关键性指标。目前,在坑道岩爆的预报中,常采用微震监测预报技术,而其基本理论依据就是,岩石破坏前,其内部会产生大量的微裂纹,并以弹性波的形式向外释放能量。监测岩石发出的弹性波,即可预报岩体破坏。因此,岩体破坏过程的研究是分析岩体稳定性问题的重要基础研究。

对岩石破坏问题的研究,传统方法是岩石宏观力学试验和理论分析相结合,建立岩石强度理论来判断岩石的破坏,这种方法难以分析岩石的破裂演化过程及破坏规律。采用岩石断裂力学理论研究岩石破坏问题并不具有推广性,因为断裂力学研究的是均质材料受力内裂纹扩展的规律,但大多数岩石是极不均匀的,存在着微裂纹和微空洞等几何不连续缺陷。为了解决这一问题,已发展了一门新的学科分支——岩石细观力学(Meso-mechanics of Rock)。

细观是介于宏观和微观之间的一个尺度概念,对于研究岩石的破裂而言,可以把野外岩体中普遍发育的、直接影响岩体力学特性的、大于毫米级别的裂隙、节理、断层等划为宏观尺

度;把发育在岩石结构中,直接影响岩土力学性质的,毫、微米级别的裂纹划为细观尺度;把发育在岩石中矿物晶体内部,一般对岩石的宏观力学性质没有直接影响的微裂纹、错位等划为微观尺度。

岩石细观力学是从细观尺度研究岩石破裂演化过程及破坏规律的科学。目前,岩石细观力学从理论和实验两方面展开研究。

理论研究主要为统计细观损伤力学的研究方法。统计细观损伤力学作为一种对大量细观对象(微损伤)的统计理论,包括三个层次的描述:细观描述、统计描述及宏观描述。岩石细观损伤的实验研究是近几年来热点课题。随着研究的深入,发现发生在岩石中的损伤主要是脆性损伤,其表现形式主要是多重或单重弥散、随机分布的微裂纹(群),岩石所有的宏观力学特性都与微裂纹的萌生、扩展、相互作用有关,这也是岩石细观损伤的实验研究成为热点课题的原因。传统的宏观岩土力学方法通过记录加载过程中的应力-应变的变化、监测声发射事件的频率和数量,并辅以肉眼的直接观察,来分析岩石的破坏特征和破坏过程,该方法对岩石破坏过程仅了解到遵循破裂源的孕育、扩展、最终发展为宏观断裂破坏这一过程。获得的结论是间接的,在变形过程中,岩石内部的变化基本上是一种推断的结论,对涉及岩石破坏机理的一些关键性问题,如破裂最初孕育的位置、已有的源破裂的扩展等,都知之甚少,因此,需要借助于一种先进的观测仪器直接观测岩石细观破裂过程。

10.2.1 光学显微镜观测方法

光学显微镜是观测岩石中裂纹状况的最普通的工具之一。用光学显微镜研究岩石破裂过程中的微构造变化,其优点是技术简单易行、成像直观,可以在较大范围内观察和统计裂纹的发育,特别是微构造的测量技术和精度,迄今为止还没有被其他技术代替,这是光学显微镜观测仍然得到运用的原因。

然而,光学显微镜法存在着难以克服的技术难题,例如,试样经过切片、磨制、粘胶等加工环节,会引起原有裂纹扩大,甚至新产生一些加工裂纹,这大大降低了观测的可靠程度。

10.2.2 电子显微镜观测方法

用于岩石细观观测研究的电子显微镜有透射电子显微镜和扫描电子显微镜(SEM)两种。实验研究证明,扫描电子显微镜在岩石细观观测时更有效。扫描电子显微镜的工作原理是:电子枪发射的电子束打到被测物体表面后,激发出各种成像物理信号,由于其信号强弱与被测物体表面的物质成分及表面形貌变化有密切关系,因此由检测器及成像电路对这种信号进行检测、处理后,即可得到物体表面形貌的直观放大图像。因此,SEM获得的是被测物体表面形貌的三维立体图像,这对研究岩石的微构造特征是十分有用的。

10.2.3 声发射方法

声发射方法是一种间接的动态观测方法。岩石或其他固体材料在应力作用下发生变形时,其内部将产生微破裂活动,微破裂在产生、扩展、闭合以及贯通过程中,会有超声波发射,称为声发射(Acoustic Emission, AE)。由于微破裂很难直接动态观测,声发射方法便成了研究岩石变形过程中微破裂动态过程的有效工具。另外,由于声发射活动与地震活动具有内

在联系,因此声发射方法又是研究地震孕育发展的手段之一。

从声发射时间序列的统计特性到声发射源的空间分布特征的研究,已取得了不少成果。声发射源的空间定位研究大约始于20世纪60年代晚期,早期的工作利用过门槛测波的初动方法进行定位,误差和盲信息较多,但由于能探测到较多的AE事件,因此在统计意义下发现了声发射活动伴随变形扩容而且沿一些主破裂面集中的现象。20世纪70年代后期,由于高速A/D转换芯片及大规模存储介质的应用,使AE波形的动态捕获成为可能,从而可以十分准确地测定波的初动,大大地提高了定位精度,因此得到了一些关于AE群集(AE Cluster)、变形局部扩容及AE空区(AE Gap)间的一些相关性以及震源机制解。

声发射方法探测岩石细观破坏最大的缺陷在于难于将细观破坏定量化,但是它作为岩石微裂纹成核及扩展方向的预报手段,对监视岩石破坏的发生及地震预报具有重要价值。

10.2.4 计算机断层成像观测方法

基于X射线的计算机层析成像技术(Computerized Tomography, CT)在岩石细观破坏观测领域取得了巨大成功。该方法的基本过程是:将岩石试样放入CT扫描空间,通过X射线的CT方法可以给出岩石试样任意断面的CT图像。CT图像的灰度是岩样响应部位物理密度的函数,因此,通过CT图像灰度的变化可以观测岩石试样的微裂纹分布状态。基于与CT设备配套的三轴加载装置配合,可以实现对岩石试样损伤过程的动态观测,即根据CT图像可以观测到岩石试样中微裂纹成核、扩展、闭合、分岔、贯通等细观损伤活动的全过程。

CT方法的优点在于可以无损地观察到岩石内部变化,可以实现实时观测。

10.3 不确定性岩土力学

岩土力学问题通常带有不确定性,如随机性、模糊性和未确知性等。因此,针对这些不确定性问题,应该采取相应的处理方法,从而产生了岩土力学不确定性分析新学科分支。以下对岩土力学不确定性分析中目前较成熟的一些内容进行简单介绍。

10.3.1 模糊数学分析方法

利用模糊数学求解岩土力学问题的具体过程如下:

设 X 为论域,映射 $\mu_{\tilde{A}}:X \rightarrow [0,1]$ 确定了 X 的一个模糊子集,简称模糊集,记为 \tilde{A} , $\mu_{\tilde{A}}(x)$

为模糊集 \tilde{A} 的隶属度函数, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 为元素 x 隶属于 \tilde{A} 的程度,称为隶属度,其另一个子集 \tilde{B} ,其他符号同 \tilde{A} 类似。显然有

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) &= \{\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}\}_{\max} \\ \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) &= \{\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}\}_{\min} \\ \mu_{\tilde{A}^c}(x) &= 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\end{aligned}\quad (10-6)$$

在岩土力学中一种典型的模糊数学分析方法就是模糊综合评判方法,它是把实际工程资料,即评判对象所决定的论域 X 中各因素的具体数据输入给所获得的隶属度函数,并分

别作 Fuzzy 映射,得到模糊向量 R_1 ,即

$$R_1(x_1) = (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1m}) \in (Y) \quad (10-7)$$

同理,得到 $R_2(x_2), R_3(x_3), R_4(x_4), \dots, R_n(x_n)$,而后组成模糊关系矩阵,记作

$$R = \begin{pmatrix} R_1(x_1) \\ R_2(x_2) \\ R_3(x_3) \\ \dots \\ R_n(x_n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \quad (10-8)$$

再采用专家经验方法确定各主控因素的权重分配,用 A 表示,即

$$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n), \sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (10-9)$$

在此基础上进行模糊变换,也称合成运算,得到评判结果 B ,即

$$B = A \cdot R = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) \quad (10-10)$$

进行合成运算得

$$b_j = (a_1 \cdot r_{1j}) \oplus (a_2 \cdot r_{2j}) \oplus \dots \oplus (a_i \cdot r_{ij}) \oplus (a_n \cdot r_{nj}) \quad (10-11)$$

$b_j(j=1, 2, 3, 4)$ 对应一个评价等级,由此可以判别所属的等级。

10.3.2 灰色系统分析方法

灰色系统是指相对于一定的认识层次,系统内部的信息一部分已知、一部分未知,即信息不全的系统。灰色系统建模的任务是用少量数据经过动态信息的开发、利用和加工,建立微分方程。灰色系统通过关联分析,提取建立模型所需变量,并在对离散函数性质进行研究的基础上,实现对离散数据建立微分方程的动态模型。在建立模型过程中,灰色系统充分开发并利用了少量数据中的显信息和隐信息,因此,灰色系统方法是一种分析信息不全系统问题的有效方法。很显然,岩土力学系统本质上就是一个灰色系统,可见,在岩土力学研究中采用灰色系统方法是完全必要的,也是可行的。本节对岩土力学研究中常用的灰色系统方法进行简单介绍。

10.3.2.1 GM(n, h) 及其解

考虑 h 个 n 维时间序列, $\{X_k^{(0)}(i) \mid k=1, 2, \dots, h, i=1, 2, \dots, n\}$, GM(n, h) 模型可以表达为

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-1} X_1^{(1)}}{dt^{n-i}} = \sum_{i=1}^{h-1} b_i X_{i+1}^{(1)} \quad (10-12)$$

式中, $a_0 = 1, X_1^{(1)}(0) = X_1^{(1)}(1), X_k^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i b_i X_k^{(0)}(j), i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, h, a_i, b_i$ 为

待确定参数,由下列方法确定。

采用等时距,即 $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 1$,则上式中的微商 $\frac{d^{n-1} X_1^{(1)}}{dt^{n-1}}$ 可用差商 $\frac{\Delta^{n-1} X_1^{(1)}}{\Delta t^{n-1}}$ 代替,因而有 $\frac{\Delta^{n-1} X_1^{(1)}}{\Delta t^{n-1}} = \Delta^{n-i} X_1^{(1)}$ 。于是上式可改写成

$$\sum_{i=0}^n a_i \Delta^{n-i} X_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{h-1} b_i X_{i+1}^{(1)} \quad (10-13)$$

由于 $\Delta^{n-i} X_1^{(1)} = \alpha^{n-i}(X_1^{(1)}, k)$, 所以有

$$\sum_{i=0}^n a_i \alpha^{n-i}(X_1^{(1)}, k) = \sum_{i=1}^{h-1} b_i X_{i+1}^{(1)}(k) \quad (10-14)$$

进一步可写成

$$Y_n = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{h-1} \end{pmatrix} \quad (10-15)$$

式中, $Y_n = [\alpha^{(n)}(X_1^{(1)}, 2), \alpha^{(n)}(X_1^{(1)}, 3), \dots, \alpha^{(n)}(X_1^{(1)}, N)]^T$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^{(n-1)}(X_1^{(1)}, 2) & \alpha^{(n-2)}(X_1^{(1)}, 2) & \dots & \alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 2) \\ \alpha^{(n-1)}(X_1^{(1)}, 3) & \alpha^{(n-2)}(X_1^{(1)}, 3) & \dots & \alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(n-1)}(X_1^{(1)}, n) & \alpha^{(n-2)}(X_1^{(1)}, n) & \dots & \alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, n) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha^{(0)}(X_1^{(1)}(2)) & X_1^{(1)}(2) & \dots & X_h^{(1)}(2) \\ -\alpha^{(0)}(X_1^{(1)}(3)) & X_1^{(1)}(3) & \dots & X_h^{(1)}(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha^{(0)}(X_1^{(1)}(n)) & X_1^{(1)}(n) & \dots & X_h^{(1)}(n) \end{pmatrix}$$

按最小二乘法,求解 $\|Y_n - (A : B)\hat{a}\|_2^2 \rightarrow \min$, 其中 $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n : b_1, b_2, \dots, b_{h-1})^T$ 。

10.3.2.2 灰色拓扑预测

灰色拓扑预测是从现有数据来预测未来变化,它可以用于岩土力学中实测数据预测的研究,如矿山压力、边坡变形等的预测。

拓朴预测从给定的不同阈值着手,阈值线是一条与横轴平行的直线,它与数据图形所交的点是等高的,将各交点至原点的测度(横坐标)作为建模的原始数据。

实现灰色拓朴预测的数学原理可表述如下:

把数据列 X 在二维平面上描绘成曲线,为了预测整个曲线的未来发展变化,在曲线上人为地给定一系列阈值 ξ_i , 则有

$$X_{\min}^{(0)} \leq \xi_i \leq X_{\max}^{(0)} \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (10-16)$$

对每一个阈值 ξ_i , 有映射 $\xi_i : (X^{(0)}) \rightarrow (mt_i^{(0)})$, $mt_i^{(0)}$ 是水平色与曲线 $X^{(0)}$ 相切的第 k

点横坐标值,并有映射 $P: \{mt_i^{(0)}, \xi_i\} \rightarrow \{mt_i^{(0)}\}, k=1, 2, \dots, n_i$, 其中, P 为横坐标段投影算子。

$$mt_i^{(0)} = mt_i^{(0)}(1), mt_i^{(0)}(2), \dots, mt_i^{(0)}(n_i), \text{简记为 } mt_i^{(0)}(k) = \omega_i(k)$$

若对于 $i=1, 2, \dots, m$ 有一组观测值 $\hat{\omega}_1^{(0)}(n_1+1), \hat{\omega}_2^{(0)}(n_2+1), \dots, \hat{\omega}_m^{(0)}(n_m+1)$, 这组观测值 $\hat{\omega}_i^{(0)}(n_i+1)$ 表示在第 n_i+1 点, 其阈值为 ξ_i 时距原点的距离为 $\hat{\omega}_i^{(0)}(n_i+1)$, 或者记为 l_i , 这样, 在二维平面上有点: (l_i, ξ_i) , 即 $(\hat{\omega}_i^{(0)}(n_i+1), \xi_i)$, 将所有的点 $(l_i, \xi_i), \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 连成曲线, 得拓扑预测曲线 $\hat{X}^{(0)}$, 即

$$\hat{X}^{(0)} = \{X_i^{(0)}(n_i+1), \xi_i \mid i=1, 2, \dots, m\} \quad (10-17)$$

10.3.3 岩土的可靠性分析

在岩土工程设计中,人们一直在不断寻求更合理的设计方法,而合理的设计基于正确的预测。众所周知,岩土体行为预测所用的模型及参数均具有明显的不确定性,而且在计算力学和试验技术已取得巨大成就的今天,不确定性因素在设计中占据了重要地位。显然,要想改进设计方法,必须对各种不确定性因素给予妥善处理。在各种有关的处理方法中,可靠性分析被公认为是一种较为科学的方法,因此可靠性理论被应用于岩土力学是必然的。

可靠性研究从 20 世纪 30 年代开始,当时主要是围绕飞机失事问题展开的。20 世纪 40 年代, A. P. РжаНИЦЫН 提出一次二阶矩理论,来估计结构的失效概率;20 世纪 60 年代, Cornell 提出了可靠度指标 β 的概念。此后,结构设计中引入概率极限状态设计原则,采用以荷载和抗力分项系数描述的设计表达式。岩土工程领域的可靠性研究开始于 20 世纪 60 年代,并由国际标准化组织岩土工程技术委员会(ISO/TC182)主持编制了国际标准,对各级岩土工程提出了可靠度指标的建议值。目前,该研究在软土地基上填土、边坡、基础沉降及桩基等问题上已达到了实际应用的阶段。但由于岩土本身的复杂性,普遍采用概率极限设计方法尚存在许多问题。

10.3.3.1 岩土体不确定性与对策

在岩土工程勘察、设计、施工、运营等各个环节中,都存在着显著的不确定性(Uncertainty),这使工程师在预测岩土体行为、采取设计措施时不得不面对多种可能性。显然,这种可能性越多,设计难度就越大。

1. 多种不确定性

就岩土体而言,很多因素都难以预先确定或仅在某种程度上可预估而无确切把握的。例如,可以通过地质勘察了解岩土体的结构及其他地质条件,但不可能彻底搞清楚;可以对某地层取样进行试验,测定岩土物理力学参数,但不可能获得参数的真值;在分析计算时总要引入一些简化假设。这些都将引起岩土体行为预测的可靠性(Reliability)问题。

(1)模型的不确定性。对于任何复杂事物的分析,其出发点必是对现实事物进行逼真而又可行的理想化,也就是建立分析模型。模型是原型的理想化替代物,要求它必须反映原型的主要特征,略去次要特征,而主要特征与问题的性质和所关注的目标有关。可见,建构模型并无统一标准;就具体问题而言,模型也不是唯一的,其不确定性由此而来。在岩土工程问题中,分析模型主要包括地质模型、变形破坏机制、材料本构模型以及力学计算模型等,

每一个模型都包含着不确定性,而目前关于这一问题的可靠性研究很不充分。

岩土地质模型是根据地质特征和工程问题进行抽象而得到的,需要考虑的地质信息主要有土体的组成、结构、应力历史、地下水等因素。土体变形破坏机制是根据地质模型和工程作用加以判断的。预测可能出现的变形破坏形式和机制是很关键的问题。若判断不正确,便无法合理地开展力学试验,确定可靠的力学参数。材料本构模型包括变形本构模型和强度理论等。没有变形本构模型,应力变形分析就无法进行;没有强度理论,就无法根据计算结果判断材料是否发生破坏。土体的力学计算必然要基于一定的计算公式,这种设计公式中除了参数或变量的概率分布特征以外,还有很多未能考虑的因素。计算模型必定会因机制未明和简化处理而带来不确定性。例如,实际岩土体破坏具有多种可能性,每种破坏形式相应的分析要求采用不同的方法,而事前我们不能肯定地对破坏形式做出判断。

(2) 参数的不确定性。岩土性参数包括地质参数和材料性质参数。这些参数依时空不同而有显著变化,即具有空间变异性和时间变异性。在特定的问题中,地质条件和特性参数本是确定性的量,但我们无法确切地得到这些参数的真值,即便得到所有确切的数值,也会因过分散乱而无法精确地引入计算中。

岩土性参数不确定性的来源主要有两个方面:一是介质不均匀而带来的固有变异性,二是系统不确定性。从理论上讲,介质特性是空间坐标和时间的函数,在分析计算中,若能够考虑这种精确关系,则是最理想的。但实际上很难办到,而且对工程而言,也没有必要这样做。因此,需要用统计的方法来处理这种空间变异性和离散性。系统不确定性主要包括由试验偏差和随机量测误差构成的试验确定性,以及因试样数量不充分而引起的统计不确定性。一般来说,试验不确定性会随着试验设备的改进和试验技术的提高而减小,统计不确定性则随着统计方法的改善和试样数量的增加而减小,空间变异性则是岩土体固有的,我们只能尽可能准确地描述它,而不能实质性地减小它。

(3) 作用的不确定性。岩土体结构系统在施工和使用期间要经受其自身的和外加的各种作用,并因此产生各种效应,如应力、变形、破坏等。我们知道,可能发生的自然现象,如地震、降雨、风压等,都是概率现象,这些因素在设计时需加以考虑,但我们不能确知。此外,工程中遇到的其他荷载或作用也往往是不确定性的。很显然,作用的不确定性同岩土性参数的不确定性一样,也将引起岩土体行为的不确定性。

2. 可选择的对策

到目前为止,土体变形和稳定性计算的精度不高,岩土工程设计仍然停留在经验或半经验阶段。实践表明,面对各种各样的不确定性,要想用唯一的方法处理所有问题是不可能的,这就需要研究处理不同种类不确定性的最佳方法,以及解决具体工程的最佳方法组合,这只能在工程实践中逐渐摸索,不断总结经验。

以下是应对不确定性的几种方法:

(1) 总安全系数法。在20世纪中叶之前,结构设计普遍应用容许应力法或总安全系数法。典型的设计步骤如下:根据个别或相当多的材料试验资料,凭经验规定材料强度的约定值;凭经验规定可能的荷载值,并基于线弹性理论做结构分析;根据经验选定安全系数,从而可确定出容许应力;设计要求结构在使用期间,其内任何一点的应力不得超过容许应力。在岩土工程中,地基设计引入安全系数确定容许承载力、边坡设计引入安全系数降低强度参数

之类的做法,都是与结构设计中的容许应力法相似的。

在岩土工程设计中,安全系数是一个非常重要的概念,而且采用多大的安全系数往往成为问题的关键。当前工程规模越来越大,安全系数越来越重要。这是因为它不仅关系到工程的安全以及由此引起的社会政治效益,而且稍有差别将对工程费用产生巨大的影响。早期设计安全系数的选择纯粹是经验性的,大多是先估计一个安全系数,然后再逐渐逼近实际情况。具体采用多大的安全系数,主要与分析方法的完善程度和工程的重要性或破坏后的严重性有关。在工程设计的历史发展过程中,安全系数起初用得很大,随着研究工作的深入以及力学计算方法的发展,安全系数才逐渐降低。另外,不同的分析方法要求采用不同的安全系数。例如,一种能够考虑较多因素的分析设计方法可能采用较小的安全系数;而采用某种非常简化的分析设计法时,则要达到同前种设计具有大致相同的安全度就可能要求较高的设计安全系数。岩土工程结构系统与结构工程相比,具有更多、更大的不确定性,因此,习惯采用比结构工程大得多的安全系数来应对可能发生的偏差。

显然,传统的容许应力法是定值设计法,即在求解问题时不考虑所有状态变量和参数的不确定性,而是将它们都看成确定的量,且用一个笼统的安全系数来考虑众多不确定性因素的影响,不加区别地对待材料强度、荷载作用等不确定性因素。事实上,对不同的变量,我们所具有的知识或了解的程度不同,而且性质也可能不同,因此采用分项安全系数比较合理。有人采用三个安全系数分别考虑荷载、材料性能及工作条件等方面的不确定性因素的影响,虽然在某些变量或参数取值时也用数理统计方法找出其平均值,但未能考虑各参数的离散性对安全度的影响,也没有给出结构可靠度的定义和分析可靠度的方法。很显然,由于用确定性模型处理不确定性问题,在理论上必定存在不完备性,安全系数并不是定量表示安全性的尺度。如果我们对安全系数的定义、强度参数取值的方法以及计算方法等没有严格的规定,那么安全系数就不具有确切的含义,这样一来,相同的安全系数并不意味着相同的安全储备;甚至安全系数较大者,安全程度反而较低。在不同类型的工程中,设计安全度更无法比较。例如,地基设计中安全系数一般采用 $2 \sim 3$,但这并不是说地基有 $2 \sim 3$ 倍的安全度,只是就现行的设计计算方法来说,经验表明采用这一安全系数是合适的;同样地,当采用极限平衡分析确定边坡的安全系数时, $1.2 \sim 1.3$ 的设计安全系数是合适的。在这里,特别不能进行横向比较,不能说地基设计的安全度比边坡设计的安全度要高出2倍多,我们只能说两者的安全度从实际上是可接受的。需要认识到,不能定量地表示结构的安全度是安全系数法的最大缺点。

(2)可靠性设计法。安全系数法虽然简单,但安全系数并不是对安全度的确切度量,人们自然要追求实际工程安全性的定量表达。为此,人们已将可靠度的概念引进了工程设计领域,期望用可靠度指标(Reliability Index)或失效概率(Failure Probability)这个基本尺度进行工程设计,并用来比较各种建筑物的安全性。

可靠性设计法也称为概率极限状态设计法,其实质是力图定量地考虑各种不确定性因素,而且有统一的度量结构安全度的标准。只要失效概率很小,小到公众可以接受的程度,就可以认为结构设计是可靠的。这里需要考虑的是安全与经济,Casagrande(1964)指出:“任何工程项目本身都存在着风险。人们必须认识这种风险的存在,而且必须采取使安全度和经济之间达到某种平衡的步骤来对付这种风险。”我们对建筑材料的统计性质和结构

系统的可靠度计算已有相当的知识,并已引入了概率极限状态设计原则,而岩土体的不均质性及时间变异性是异常突出的事实,通常情况下我们无法彻底搞清它们,因此土工可靠性研究困难重重。

(3)动态设计与施工。动态设计与施工方法使土工系统具有弹性,使得整个系统具有可改变的余地,这显然是一种信息化设计与施工方法,越来越受到工程界的欢迎。由于在施工之前的初步设计阶段存在各种不确定性,可能在施工过程中发生当初没有预料到的事态,此时必须修改原来的设计与施工方案。这种方法分为先期设计和动态设计两个阶段。土体开挖工作根据先期设计中得到的最优解来进行;在施工过程中进行现场观测,以便估计施工现场的安全性,并用来判断是否要修改先期设计,这样的设计必然要求具有弹性或灵活可变性。人们预测,动态设计法与可靠性方法结合具有很好的前景,实际上,动态设计与施工本身就是根据不断获得的信息来消除设计与施工方面的不确定性。

10.3.3.2 可靠性分析的水准

结构可靠性设计要求进行可靠性分析,即引入不确定性计算结构可靠度或失效概率,并设法使计算的失效概率小于允许的失效概率。允许失效概率是依据计算方法的完善性、工程经验、经济状况等因素确定的可接受的风险值,它的选择应使结构建造费用与期望的破坏损失费的总和为最小。本节不谈论允许失效概率问题,而是首先介绍极限状态、失效概率等基本概念,然后简要说明可靠性分析的水准。

1. 极限状态与方程

在我国《建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068)中,结构极限状态(Limit State)被定义为:“整个结构或结构的一部分超过某一特定状态就不能满足设计规定的某一功能要求,此种特定状态应为该功能的极限状态。”在现有极限状态设计法中,区分承载力极限状态(Ultimate Limit State)和正常使用极限状态(Service Limit State)。

承载能力极限状态对应于结构达到最大承载能力或出现不适于继续承载的变形,例如,土体的一部分发生倾覆或滑移、建筑结构被压屈或因材料强度被超过而破坏、结构发生过度的塑性变形而不适于继续承载等。这种极限状态出现的概率应当很低,因为它可能导致人身伤亡和大量财产损失。正常使用极限状态对应于结构达到正常使用或耐久性能的某项规定限值,可理解为结构使用功能的破坏或损害,或结构质量的劣化,而结构不失稳并能继续承载。由于这种极限状态对生命的危害较小,故允许出现的概率较高。

此外,有时应考虑破坏-安全极限状态,它对应于已出现局部破坏的结构的最大承载能力状态。一般说来,当由于偶然事件而出现特大作用时,要求结构仍保持完整无缺是不现实的,只能要求结构不致因此而发生灾难性的破坏。目前计算这种极限状态还缺乏必要的统计资料和实践经验。

通常,可靠性设计是将该领域中所使用的设计公式和基准作为基础,写出极限状态方程。描述极限状态的功能函数称为极限状态方程。极限状态方程中的基本变量作为随机变量考虑时,这种极限状态方程称为概率极限状态方程。结构的功能在于以其抗力来承受荷载或作用,因而可把构成功能函数的各随机变量分为抗力和荷载两大类。以 R 表示抗力,以 S 表示荷载或荷载效应,则极限状态方程可写成

$$Z=R-S=g(X_1, X_2, \dots, X_n)=0 \quad (10-18)$$

式中, Z 为安全储备; g 为状态函数; X_1, X_2, \dots, X_n 为基本随机变量。研究表明, 如果极限状态方程中的基本随机变量服从正态分布, 则安全储备 Z 或状态函数 g 也服从正态分布。

根据传统的设计原则, 抗力 R 及荷载效应 S 都取定值, 例如均值 \bar{R} 和 \bar{S} , 而且 $\bar{R} > \bar{S}$ 时就认为可靠。但实际上并非如此, 因为 R 和 S 都是存在不确定性的随机变量, 要保证 R 总是大于 S 通常是不可能的。在一定情况下, R 有可能小于 S , 这种可能性的大小用概率表示就是失效概率或破坏概率 P_f , 其计算式为

$$P_f = P[Z = R - S \leq 0] \quad (10-19)$$

计算表明, 基本变量的变异系数越大, 失效概率也越高。

在岩土力学中, 岩土体的安全系数 F_s , 一般定义为

$$F_s = \frac{\text{抗力}}{\text{荷载效应}} = \frac{R}{S} \quad (10-20)$$

极限状态方程可写成

$$F_s = \frac{R}{S} = 1 \quad (10-21a)$$

或写成通用形式

$$Z = R - S = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (10-21b)$$

在不同的工程问题中, R 和 S 分别定义为不同的力学量, 例如, 在地基强度问题中, R 为地基承载力, S 为基底压力; 在挡土结构物倾覆稳定验算问题中, R 为抗倾覆力矩, S 为倾覆力矩; 在土坡稳定问题中, R 为抗滑力或抗滑力矩, S 为滑动力或滑动力矩; 在基础沉降分析中, R 为容许的沉降, S 为估计的沉降。

2. 可靠性与分析水准

如果结构体系具有安全、适用和耐久性能, 人们就认为它具有可靠性。一般, 将可靠性定义为在规定的条件下和规定的时间内完成预定功能的能力。可靠性的数量化指标就是可靠度, 定义为结构在规定的条件下和规定的时间内, 具备预定功能的概率。相应地, 结构失效或破坏的可能性就称为失效概率。在此, 规定的条件是指正常设计、正常施工和正常使用, 而设计、施工和使用中的人为过失则不在可靠度考虑的范围之内。规定的时间是指结构的设计基准期。可靠度与时间有密切的关系, 没有时间概念就无所谓可靠度。规定时间的长短将随对象和使用目的的不同而异。我国《工程结构可靠度设计统一标准》(GB 50153) 明确规定建筑结构设计基准期为 50 年。设计基准期只是计算结构失效概率的参考时间坐标, 即在这个时间域内计算结果有效。结构的使用超过设计基准期后, 并不意味着结构会立即不能使用, 而只是其失效概率将比预计值增大。因此, 设计基准期虽与寿命有关, 但却是不同的概念。

必须指出, 失效概率的概念既适用于破坏也适用于变形, 例如, 沉降量超过允许值的概率也称为失效概率。此外, 可靠概率或可靠度 P_r 与失效概率互补, 即

$$P_r + P_f = 1 \quad (10-22)$$

可靠性分析有三个水准, 即全概率法、近似概率法和半概率法。全概率法精确计算失效概率, 因而要求知道每个基本变量的概率密度函数, 并进行二重积分或多重积分, 对整个结

构进行精确的概率分析。实际上,无论是基本变量概率密度函数的确定,还是失效概率的计算,都很困难。因此,尽管从理论上讲全概率法是处理不确定性的最佳方法,但在实际工程中却是难以应用的,仅在重大的和特殊工程中才有可能。

采用近似概率法不必知道所有基本变量的概率分布,但要求知道荷载效应和抗力的分布类型和形状。作为近似概率法特例的一次二阶矩法,只考虑荷载效应和抗力的二阶矩,即均值和标准差;结构体系的安全度由可靠度指标(Reliability Index)来表示,而可靠度指标可根据二阶矩计算。在半概率法中,安全度由荷载系数和抗力系数来表示,这些系数可根据二阶矩的可靠度分析得到。目前该法已进入实用阶段,正逐步成为许多国家制定标准规范的基础。

10.3.3.3 全概率法

如果极限状态方程中的基本随机变量相互独立且服从正态分布,则 R 和 S 相互独立并服从正态分布,安全储备 Z 也服从正态分布 $N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, 且

$$\bar{Z} = \mu_z = \bar{R} - \bar{S} = \mu_R - \mu_S \quad (10-23)$$

$$V(Z) = \sigma_Z^2 = V(R) + V(S) = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (10-24)$$

失效概率 P_f 为

$$P_f = P[Z \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right] dz$$

令 $\mu = \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z}$, 则上式成为

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-u^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (10-25)$$

式中, φ 为标准正态分布函数。

定义中心安全系数 \bar{F}_s 为

$$\bar{F}_s = \frac{\bar{R}}{S} \quad (10-26)$$

从而有

$$P_f = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{F}_s - 1}{\sqrt{\bar{F}_s^2 \delta_R^2 + \delta_S^2}}\right) \quad (10-27)$$

式中, δ_R, δ_S 分别为 R, S 的变异系数。

定义可靠度指标 β 为

$$\beta = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{V(Z)}} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (10-28)$$

则

$$P_f = P[Z \leq 0] = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (10-29)$$

$$\beta = \frac{\bar{F}_s - 1}{\sqrt{\bar{F}_s^2 \delta_R^2 + \delta_S^2}} \quad (10-30)$$

10.3.3.4 近似概率法

如果极限状态函数 $Z=g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是线性的, 基本随机变量服从正态分布, 则可以采用全概率法直接计算可靠度指标 β 和失效概率 P_f 。但当状态函数为非线性或变量不服从正态分布时, 直接计算其均值和标准差就比较困难, 此时可采用近似概率法, 即一次二阶矩法。

1. 中心点法

设基本随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 状态函数 g 是随机变量的非线性函数。首先将 g 在变量均值处作 Taylor 级数展开, 并取一次项使之线性化, 即

$$Z \approx g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i) \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\bar{X}_i} \quad (10-31)$$

然后利用随机变量的平均值和标准差求解可靠度指标。这就是一次二阶矩中心点法的基本原理。考虑到变量的相互独立性, 对上式分别取均值和方差得

$$\bar{Z} = \mu_Z \approx g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \quad (10-32)$$

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\bar{X}_i} \right)^2 \quad (10-33)$$

可靠度指标为

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\bar{X}_i} \right)^2}} \quad (10-34)$$

中心点法概念清楚、计算简便。当可靠度指标较小或失效概率较大(例如 $\beta \leq 3.09$ 或 $P_f \geq 10^{-3}$) 时, 结果对状态函数的概率分布类型不很敏感, 具有较好的实用性。

但若基本变量的概率分布为非正态分布或非对数正态分布, 则可靠度指标的计算结果与实际出入较大。此外, 该法选用的线性化点(平均值)在可靠区而不在失效边界上, 级数展开略去高次项的误差, 将随着线性化点到失效边界距离的增加而增大。

2. 验算点法

为了克服中心点法的缺点, 人们在失效边界上寻求线性化点, 所选取的点通常在结构最大可能失效概率对应的设计验算点 $P^*(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$, 经这样改进后的一次二阶矩法称为验算点法。注意到验算点在极限状态曲面上, 即

$$g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0 \quad (10-35)$$

则线性化的极限状态函数为

$$\bar{Z} = \mu_Z \approx \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - X_i^*) \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{P^*} \quad (10-36)$$

其均值为

$$\bar{Z} = \mu_Z \approx \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - X_i^*) \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{P^*} \quad (10-37)$$

假设基本随机变量相互独立, 则 Z 的标准差为

$$\sigma_z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*} \right)^2}$$

引入分离函数式将其线性化得

$$\sigma_z \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*} \quad (10-38)$$

式中,

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*} \right)^2}} \quad (10-39)$$

其中, α_i 表示第 i 个随机变量对整个标准差的相对影响, 称为灵敏系数。

根据可靠度指标的定义, 有

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - X_i^*) \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*}} \quad (10-40)$$

上式可整理为

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{p^*} (\bar{X}_i - X_i^* - \beta \alpha_i \sigma_{x_i}) = 0 \quad (10-41)$$

注意到基本变量的相互独立性, 有

$$\bar{X}_i - X_i^* - \beta \alpha_i \sigma_{x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10-42)$$

式(10-41)与式(10-42)联立, 可由这 $n+1$ 个方程求得 X_i^* 和 β 共 $n+1$ 个未知数。可采用迭代法求解, 具体步骤如下:

(1) 选取验算点坐标的初值, 一般取 $X_i^* = \bar{X}_i$;

(2) 由式(10-39)计算 α_i ;

(3) 将 α_i 代入式(10-42), 解得 $X_i^* = X_i^*(\beta)$;

(4) 将 $X_i^* = X_i^*(\beta)$ 代入式(10-35), 解得 β ;

(5) 将此 β 代入 $X_i^* = X_i^*(\beta)$, 求出 X_i^* 的新值;

(6) 以新 X_i^* 重复第(1)步至第(4)步, 直到前后两次 β 值足够接近为止。最后所得的 β 即为所求的可靠度指标, X_i^* 即为设计验算点坐标。

10.3.3.5 半概率法与分项系数

对于重要工程, 可采用全概率法或近似概率法直接进行设计或可靠度校核, 但即使是近似概率法, 计算工作量也相当大, 对于一般工程是不实用的。为此, 人们提出在设计验算点处将极限状态方程转化为以基本变量标准值和分项系数表达的极限状态实用设计表达式, 这就是所谓的半概率法。

在半概率法中, 安全度不是用一个总安全系数, 而是用若干个分项系数来表达, 如荷载效应分项系数、抗力分项系数等。分项系数反映目标可靠度或设计可靠指标以及基本变量

变异性的影响,可根据二阶矩的可靠度分析得到。N. C. Lind(1971)已经把分项系数与可靠度指标 β 联系起来,由 β 的算式推演出分项系数的表达式。

1. 实用设计公式

在传统的容许应力设计法中,保证整个结构在工作荷载作用下产生的应力不大于容许应力,并采用一个总安全系数考虑所有相关的不确定性,设计公式可表示为

$$S \leq R/F_s \quad (10-43)$$

式中, S 为荷载效应; R 为抗力; F_s 为容许安全系数。

在概率极限状态设计(Limit State Design)中,采用荷载效应和抗力的标准值和分项系数,设计公式的一般表达式为

$$\Phi R_n = \sum \alpha_i S_{ni} \quad (10-44)$$

式中, Φ 为抗力系数,反映与抗力有关的不确定性; R_n 为抗力的标准值,代表对抗力的最优估值; S_{ni} 为第 i 项荷载效应的标准值; α_i 为相应 S_{ni} 的荷载系数,反映该项荷载的不确定性。

上述设计公式在形式上同人们习惯的设计表达式相近,但其中各分项系数的取值是以近似概率法确定的。采用规范进行概率极限状态设计时,人们可完全按照习惯的方式进行,无需复杂的概率统计运算和可靠性分析。我国2008年颁布的《建筑桩基设计规范》规定,桩基按概率极限状态法进行设计,考虑承载能力和正常使用两种极限状态。

2. 参数的标准值

参数的标准值也称为特征值,它作为置信概率 $1-\alpha$ 的分位数,按概率方法取得。设随机变量 X 的概率分布函数为 $F_X(x)$,按某一规定的概率 α ,取其分布上相应的某个分位值 Z_α ,即

$$P\{X > x_k\} = 1 - F_X(x_k) = \alpha \quad (10-45)$$

则 x_k 就定义为 X 的标准值。如果随机变量为正态分布,则

$$x_k = \mu_k + Z_\alpha \sigma_X \quad (10-46)$$

式中, Z_α 为标准正态分布上的 α 百分点,其值取决于工程的重要性和设计工作阶段,一般取0.05;对于特别重要的工程,可提高要求,将风险降低到0.01;对于初步设计阶段和可以允许承担较大风险的情况,可取0.10或更大一些。

3. 分项系数的确定

概率极限状态设计使设计基于某种可以接受的风险或失效概率之上。设计可靠指标或分项系数的确定涉及国家的技术经济政策,通常是研究设计安全系数与设计可靠指标或失效概率之间的关系,目的是提出与现行确定性规范中安全系数的安全水准相当的失效概率和分项系数的建议值。目前广泛采用的校准法是这样一种方法,即按用分项系数设计的安全水准与用传统安全系数设计的安全水准大体相当的原则确定设计可靠指标。

10.4 其他方法

10.4.1 岩石损伤力学研究

岩石的破坏是一个由内部各种缺陷相互作用、扩展,最终贯通成宏观断裂的过程。损伤

力学是从微观缺陷研究开始来深入研究介质力学性态的一门科学,它能考察多相的、非均质的、含有损伤演化的、经过某种力学平均的介质,因此,把它引入到岩土力学研究中,可以较好地针对岩石固有的各向异性和非均匀性的力学特点进行分析。

在外载和环境的作用下,由细观结构的缺陷(如微裂纹、微空洞)引起的材料劣化过程,称为损伤。损伤力学就是研究含损伤的材料力学性质,以及在变形过程中损伤演化发展直至破坏的过程。

材料的损伤现象一般可由损伤模型来描述,损伤模型可表示材料性能的变化和损伤出现、增长、传播和裂纹所造成的材料失效过程。实质上,损伤力学的基本问题就是如何描述损伤的本质以及如何量化损伤的问题。

一些力学工作者直接采用损伤材料颗粒数和材料总颗粒数的比率作为损伤变量,来研究疲劳损伤问题。由于在材料中存在大量的、各种各样的微孔洞,所以描述每一个孔洞的几何形状是非常困难的,因此,很多力学工作者试图提出一个抽象的损伤变量,从现象上描述材料中的各种微观缺陷,这个损伤变量可能是标量,也可能是矢量或张量。从热力学的观点来看,损伤变量必须能体现材料中微观结构变化的不可逆性,因此,损伤是一个内变量,它必须是材料性能、荷载、温度等的函数,并且,这个内变量也必须能描述损伤的增长和传播的过程。

选择损伤变量不是一件容易的事,它可以由微观结构分析来确定,也可以由试验数据直接产生。为了能在不可逆的热力学过程中模拟损伤,引入连续损伤力学的变量如表 10-1 所示。

表 10-1 外部状态变量、内部状态变量和相关变量

外部状态变量	内部状态变量	相关变量	外部状态变量	内部状态变量	相关变量
弹性应变张量 ϵ_e		应力张量 σ		损伤累积残余应变 γ	应变硬化变量 R
温度 T		熵 S		损伤变量 D	损伤应变能量释放率 Y

1. 损伤的定义

目前常用的损伤定义有以下几种:

(1) 损伤变量是裂纹和孔洞的表面密度,即

$$D = 1 - \frac{A^*}{A} \quad (10-47)$$

式中, A^* 为材料的“有效”面积; A 为材料的未受伤面积。

(2) 由弹性模量定义,即

$$D = 1 - \frac{E^*}{E} \quad (10-48)$$

式中, E^* 是损伤材料的有效杨氏弹性模量。

(3) 损伤是损伤情况下和未发生损伤情况下应变值的比率,即

$$D = 1 - \frac{\epsilon^*}{\epsilon} \quad (10-49)$$

(4) 由质量密度定义,即

$$D=1-\frac{\rho^*}{\rho_0}$$

(10-50)

式中, ρ^* 为损伤材料的质量密度; ρ_0 为未损伤情况下的初始密度。

2. 损伤的类型

在不同条件下, 材料的损伤可以有很多种类型, 在不同的荷载状况下, 会产生不同类型、不同表现形式的损伤。如果以产生损伤的加载过程来区分, 可分为以下几类:

(1) 延性、塑性损伤。延性、塑性损伤中微孔洞和微裂纹的形成和扩展使材料或构件产生大的塑性应变, 最后导致塑性断裂。因此, 与这类损伤相伴发生的是不可恢复的塑性变形。这类损伤的表现形式主要为微空洞及微裂纹的萌生、成长和聚合, 主要发生于金属等塑性材料。

(2) 蠕变损伤。在长期载荷作用或高温环境下, 伴随着蠕变变形, 会发生蠕变损伤, 其宏观表现形式为微裂纹、微空洞的扩展使得材料的耐久性下降。蠕变损伤使蠕变变形增加, 最后导致材料的蠕变断裂。

(3) 疲劳损伤。在循环荷载作用下, 材料性能逐渐劣化。在每一步荷载循环中的延性或脆性损伤累积起来, 使材料的寿命减少, 导致疲劳破坏。

(4) 动态损伤。在动态载荷如冲击荷载作用下, 材料内部会有大量的微裂纹形成扩展。这些微裂纹的数目非常多, 但一般得不到很大的扩展。但当某一截面上布满微裂纹时, 断裂就会发生。

损伤力学的主要研究内容如图 10-4 所示。

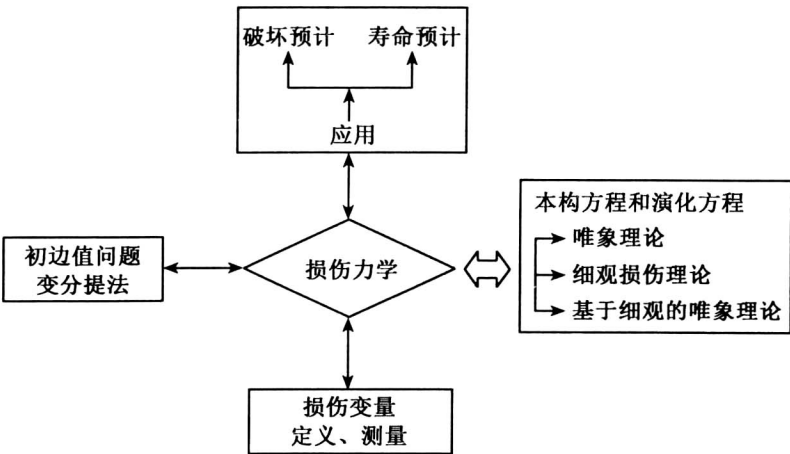


图 10-4 损伤力学主要研究内容

3. 岩石损伤的微观因素

在载荷作用下岩石发生的物理现象首先是变形, 随着作用载荷的增加, 其变形量也增加, 当载荷达到一定数量后, 就会导致岩石的破坏。以上描述了岩石的宏观破坏过程, 然而要对该过程进行实质描述的话, 就必须从细观上进行分析。

岩石的细观组织结构的表述如图 10-5 所示。

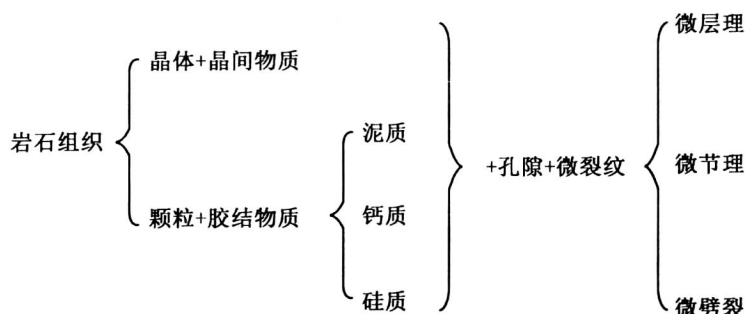


图 10-5 岩石的细观组织结构

岩石中自然存在着微孔隙和微裂纹,因此,岩石是一种自然损伤材料。

受载岩石在超过弹性极限后表现出明显的非弹性变形。造成岩石非弹性变形的主要或直接原因可以认为有如下几种:

- (1) 岩石中的微裂纹与微孔隙压密后重新张开和扩展;
- (2) 岩石中微缺陷造成局部应力集中。

这些因素在微观上描述并不总是一致的,这与各自的观察技术和设备有关,然而,几个一致的结论可以表述如下:

(1) 微裂纹的尺寸。在光学显微镜下观察到的岩石微裂纹的尺寸大约与晶粒尺寸是同数量级的,而在电子显微镜下观察到的微裂纹的尺寸约是晶粒尺寸的 $1/10$ 左右。在弹性变形的初始阶段主要是沿晶界破裂,即微裂纹基本上沿晶界边缘分布。在一些结构松散的岩石中,如红砂岩几乎有 30% 左右的晶粒边界上和结晶面上存在大量的微孔洞,这些孔洞在低应力下就可以产生应力集中而相互贯通,形成穿晶断裂裂纹,这样,在变形过程中岩体内的微裂纹尺寸可认为与晶粒尺寸同一量级。

(2) 微裂纹的方位。微裂纹具有一定的方向性,它是宏观上压、张、扭性结构所具有的各种形态特征有机地结合在一起的综合反映,是应力作用的产物。在单轴压缩下,轴向微裂纹是占主导的。在非弹性变形初期,增加的微裂隙与加载轴向成 $15^\circ \sim 30^\circ$ 交角,而在非弹性变形中期至后期,微裂纹趋向于轴向发展,裂隙在轴向相互贯通,发展成几条轴向亚微长裂纹,而亚微长裂纹延伸方向以外的其他微裂纹却不再变化了,例如,砂岩在单轴应力作用下,所形成的微裂纹大多向轴向应力方向靠近。

(3) 微裂纹的分布密度。岩石内部原始地随机分布大量的微裂纹,且其长度大多小于 0.5mm ,随着轴向压应力的不断增加,其内部不同长度范围内的微裂纹数目具有不同程度的增加,且其增加速度越来越快。研究表明:随轴向应力的不断增加,与轴向应力方向较小角度的微裂纹数目的增加速度较之与轴向应力方向较大角度的微裂纹数目的增加速度要快得多,由此可以进一步推证:随着轴向应力的不断增加,其内部所产生的大量微孔洞几乎都是平行于轴向应力方向的。对于存在宏观裂纹的岩石,在受载下,宏观裂纹尖端将产生一个微裂纹网络(或者说损伤区),随着荷载的增加,微裂纹网络增大,微裂纹的分叉也不断增加。

以上可以看到,岩石非弹性变形和破坏微观特性最主要地体现在:微裂纹尺寸同晶粒同量级;轴向微破裂是占主导的,是应力作用的产物;几乎没有宏观塑性区形成。根据这些自微观实验的观察结果,在建立岩石损伤模型时,可以认为:

- (1) 岩石损伤可认为是弹性损伤(无塑性损伤);
- (2) 损伤演化应是应力应变状态的函数。

10.4.2 分形岩土力学研究

分形岩土力学是由我国学者谢和平院士等把分形理论引入岩土力学领域而提出的一种新学科分支,其主要思想为在岩土力学问题的分析与求解过程中考虑分形的效应及其影响。分形理论的引入及其与常规方法紧密结合,互相渗透,弥补了后者的局限和缺陷,从而使岩土力学的理论和解决问题的技术手段得到了丰富和完善。该学科不仅在理论上将岩石宏、细、微观理论研究统一在新的理论体系之中,也为解决岩土力学理论与工程实践中的难题开创了新思想和新路线。而且随着研究的深入,在理论岩土力学领域也充分论述和研究了分形中的应用。采用分形的任何部分等于其原始分形的局部放大这一理论,有力地论证了岩土力学中的复杂几何图形及整个运动规律,与常规极其简单且不太切合实际的指导方法形成了鲜明的对比。分形理论从确立至今已 20 多年的时间,理论已逐渐趋于完善,表现出分形理论对传统数学和非线性科学的重大突破。

10.4.2.1 分形的概念

分形(Fractal)一词最先由法国数学家 Mandelbrot 引入,其源于拉丁语的形容词 Fractus(破碎),Mandelbrot 将其解释为不规则(Irregular)或破碎的意思。目前关于分形有如下几个定义:

(1) Mandelbrot 定义:设集合 FR_n 的 Hausdorff 维数是 D 。如果 F 的 Hausdorff 维数 D 严格大于它的拓扑维数 $Dr=n$,即 $D>Dr$,称集合 F 为分形集,简称为分形。

这个定义要求判断集合是不是分形,只要去计算集合的 Hausdorff 维数和拓扑维数,然后做出判定即可,不需要任何别的条件。而实际应用中,一个集合的 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数的计算是比较复杂和困难的,这给该定义的广泛使用带来很大影响。

(2) Hausdorff 的自相似分形定义:局部与整体以某种方式相似的形称为分形。这一定义体现了大多数奇异集合的特征,尤其反映了自然界中很广泛一类物质的基本属性:局部与局部以及局部与整体在形态、功能、信息、时间与空间等方面具有统计意义上的自相似性。这个定义只强调了自相似性特征,内涵较小。

(3) Falconer 的定义:如果 F 是分形,则它具有如下典型性质:① F 具有精细结构,即有任意小比例的细节;② F 是如此的不规则,以至于它的局部和整体都不能用传统的几何语言来描述;③ F 通常有某种自相似的形式,可能是近似的或是统计的;④一般的, F 的分形维数大于它的拓扑维数;⑤在大多数情况下, F 可以用非常简单的方法定义,可以由迭代产生。

(4) Edgar 的定义:分形集就是比在经典几何考虑下的集合更不规则的集合,这个集合无论被放大多少倍,越来越小的细节也能看到。

分形几何中最主要的概念是分数维(Fractal Dimension)。早在 1919 年, Hausdorff 就提出了分数维数的概念, Mandelbrot 将分数维推广应用到分形几何中,分数维可以是分数,也

可以是整数。确定分数维比较实用的方法有 5 种:①改变尺寸求分数维;②根据测度关系求分数维;③根据相关函数求分数维;④根据分布函数求分数维;⑤根据光谱求分数维。

分形几何主要研究一些具有自相似性(Self-similar)的不规则曲线,具有自演化(Self-inverse)的不规则曲线,具有自平方性(Self-squaring)的分形变换和具有自仿射(Self-affine)分形集。而所谓的线性分形,即具有自相似性的分形是分形几何的主要内容。简单地说,自相似就是局部是整体按比例缩小的性质,也称为尺规不变性或尺度无关性,即在不同放大倍数的放大镜下观察对象,其“影像”都是一样的,与放大倍数无关。例如,弯弯曲曲的海岸线在统计意义上是自相似的;再如,自由粒子无规则运动的布朗曲线,在统计意义上也是自相似的。在数学上,有许多著名的奇异图形都是分形,如 Cantor 曲线、Koch 曲线、Sierpinski 填料和 Menger 海绵(图 10-6)等。

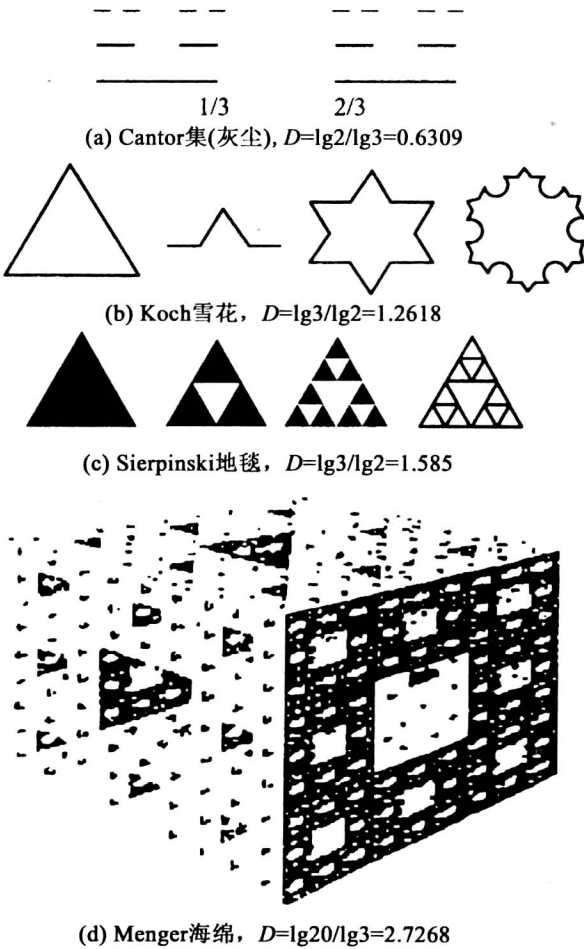


图 10-6 常见的几种自相似模型

10.4.2.2 分形的研究方法

1. 分形的实验测定

对于一些结构或是实验结果所表现出来的非规则性和粗糙性,人们直观地认为它们具有统计自相似性,进而由覆盖法或由图像处理 and 计算机模拟等技术测定出结构的分数维,再去寻找分数维与物理本征量之间的关系,以揭示出某些新的规律。分形的特点是由分数维来描述的,从不同的观点可以给出分形集合不同的维数。分数维的测定有相似维数 D_s 、Hausdorff 维数 D_H 、信息维数 D_i 、关联维数 D_g 和盒维数 D_B 等,此外,还有容量维数、谱维数、填充维数以及重正化群法、稳定分布法、因次解析法等维数的测定方法。

2. 分形模型法

任何结构的不规则复杂现象的产生是由它所处的物理、力学等环境条件及其微结构等因素所导致的,而从数学上考察,这仅仅是一种几何现象。基于这种思想,从实验观察和实际问题出发,根据其分形的特点,简化抽象为某一类数学分形模型,从其数学结构上计算出分形维数,由此探寻分形维数与物理本征量的关联,以揭示和预测结构的本征特性,或以此寻求解决问题的新途径。

3. 维象法

对于所研究的复杂结构,总结或测定出分形的幂律关系,检验它是不是分形,如果是分形,由分形幂律关系得到其分形维,然后去寻找分数维与物理本征量之间的相关联系。

4. 分形结构模拟

根据物体和结构的自然特性,人为地制造分形边界和分形结构,进行计算机模拟和实验观察,这样可直接了解到具有分形边界和分形结构的物体所表征的物理力学特性,进而探讨事物发展的分形机理。获取分数维值的一般步骤为:首先拍摄结构表面,以二维图像方式获取原始信息;接着“抽样”选取一定面积的图像,作为分析的对象,对“抽样”图像进行处理,得到结构的特征量具体分布图像;然后采用不同的测量单元尺寸 ε 对分布图像进行盒计数法计算,得到一系列规则图形的测量单元数 $N(\varepsilon)$;最后作 $\ln N(\varepsilon) - \ln \varepsilon$ 图,采用最小二乘法对图上 $N(\varepsilon)$ 和 ε 对应的点进行拟合,得到斜率的负值 D ,即分数维值。

10.4.2.3 分形岩土力学研究成果

根据以上的分形的研究方法,应用分形理论研究岩石介质变形破坏规律是具有深远影响的举措,因此,近 20 年来,分形理论已经在岩土力学研究中得到了广泛应用。

1. 节理的分数维研究

岩土力学中,节理表面的形貌特征是控制岩土力学性态的重要因素。以前用节理面的平均起伏角和表面粗糙度系数 JRC 来表征。研究表明,节理面是在天然地质过程中形成的,具有随机性,其纵剖轮廓线的高低起伏变化表现为统计自相似性,具有分形特征,因此,可以用分数维值来反映节理面的粗糙程度。

通过码尺法等不同方法,很多学者进行了粗糙度系数 JRC 和分形的研究,其主要结论见表 10-2。

表 10-2 JRC 与分数维的关系

研究者与年代	回归公式	测量维数方法
TurKetal, 1987	$JRC = -1138.6 + 1141.6D$	分割法
Carr Warriner, 1989	$JRC = -1022.55 + 1023.92D$	分割法
Maers and Franklin, 1990	$JRC = 1870(D-1)$	Mandelbort-Richardddson 覆盖法
Lee et al, 1990	$JRC = -0.878 + 37.7844(D-1)/$ $0.015 - 16.9304[(D-1)/0.015]^2$	分割法
Xie, 1993	$JRC = 85.2671(D-1)0.5679$	盒子覆盖法
Wakabayashi and Fukushige, 1995	$JRC = \sqrt{(D-1)/(4.413 \times 10^{-5})}$	分割法
Lamas, 1996	$JRC = 1195.38(D-1)$	分割法

由于分数维值能很好地反映节理的精髓程度,比起 ISRM 轮廓线粗糙度系数 JRC 的肉眼经验判别,分数维是粗糙程度更客观的定量尺度。

2. 岩石损伤的分形研究

类似岩石的脆性材料与结构,在宏观裂纹出现之前,已经产生了微观裂纹或微观空洞,材料与结构中的这些微观缺陷的出现和扩展称为损伤。实践证明,宏观裂纹出现之前,损伤已经影响了材料与结构的强度及寿命。

分形领域的研究表明,材料损伤演化过程是一个分形,分形维数是反映材料损伤程度的某一特征量;不同载荷阶段下,脆性材料的损伤场的分形维数不同。材料的损伤演化表现出统计自相似性特征。在比例加载下,无论什么材料,宏观裂纹顶端的损伤区形状和范围大小随时间是以一个时空函数的相似比变化的,大部分材料的损伤区是以自相似方式演化的。从微裂纹的分布,单一裂纹的扩展到材料损伤的演化规律,处处都可发现分形损伤的特征和行为。

3. 岩石断裂的分形研究

断裂表面是材料断裂后留下的关于断裂过程的记录,断口蕴藏着关于断裂机理的信息,通过研究断裂表面可以追溯断裂产生的机理,发现材料的微结构组成和缺陷。近年来,岩石材料的断口分析已成为材料科学和断裂力学研究中的一个重要方向。随着工程界思想、理论和方法的不断发展,相关岩石材料断裂表面的研究由长期的定性分析日渐进入定量分析,并且这些定量分析已成为岩石材料形变和断裂研究中不可缺少的部分。

岩石材料断裂表面定量分析的方法之一就是分形来表征断裂表面,它是岩石材料断裂表面粗糙度的一种度量。

分形理论的研究表明,岩石断裂表面可以用多重分形或各向异性的自相似性分形来准确描述。岩石断口表面可以看成统计自相似分形,可以用分形来定量地刻画断口表面的粗糙性。岩石断口表面的分数维与材料断裂韧度的关系是负相关的,即材料断裂韧度随分数维值的增大而降低。岩石材料断裂后,断裂表面表现出来的不规则性反映了在断裂时损伤断裂的能量耗散及微结构效应,根据断口的分数维可追溯到岩石断裂时的宏观力学行为。例如,谢和平教授等提出的岩石断裂面的分数维数如图 10-7 所示,其分维表达式为:

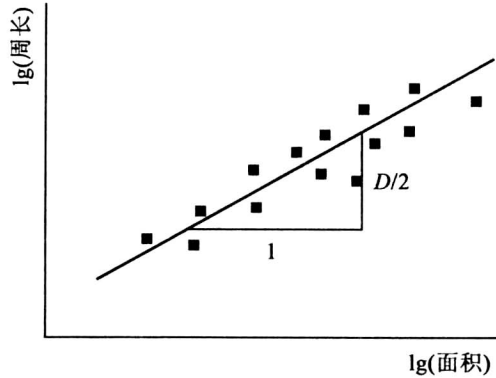


图 10-7 岩石断裂面的分维数

$$D = 2\Delta \lg(\text{周长}) / \Delta \lg(\text{面积}) \tag{10-51}$$

分数维数 D 是断面不规则程度的量度, D 越大, 偏离标准图形越远, 不规则程度越大。

采用分形方法还可以进行微破裂的研究, 谢和平教授等提出的岩石微破裂的分形模型如图 10-8 所示。图 (a) 中, $N=2, r=1/1.732$, 分维数 $D=\lg 2/\lg 1.732=1.26$; 图 (b) 中, $D=\lg 4/\lg 3=1.26$; 图 (c) 中, $D=\lg 3/\lg 2.236=1.37$; 图 (d) 中, $D=\lg 5/\lg 3.605=1.26$ 。

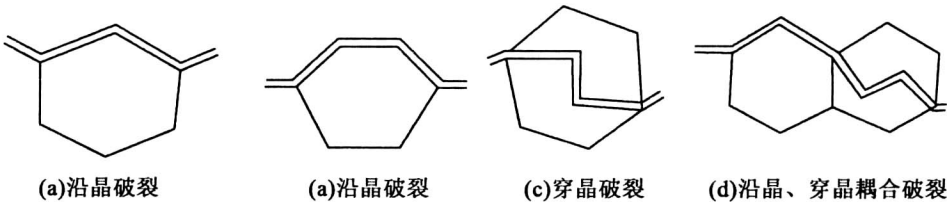


图 10-8 微破裂的分形模型

另外, 岩石断裂的裂纹分布也具有分形特征, 谢和平教授等提出的岩石的雁型裂纹的分形模型如图 10-9 所示。

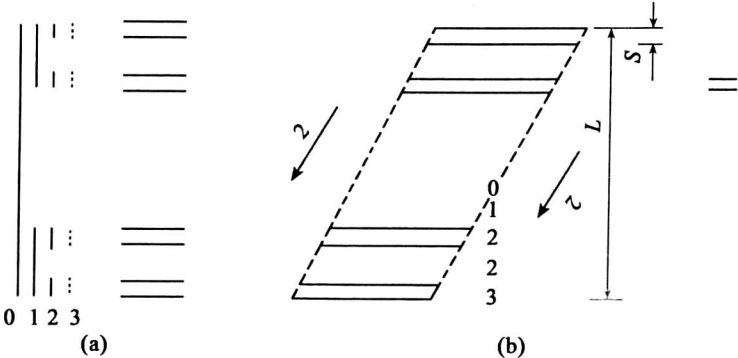


图 10-9 雁型裂纹系数的分形模型

具有分形结构,并用有限生成步的 Cantor 集模拟了雁型裂纹(图 10-9),给出雁型裂纹的分数维数 D ,即

$$D = \lg N / \lg(2L/S) \quad (10-52)$$

式中, N 为雁型裂纹的数目; L 为雁型裂纹的总长度; S 为雁型裂纹之间的间距,可由第 n 生成步构造得到。

10.4.3 岩土力学耦合分析

岩土力学是一门综合性很强的科学,它涉及的因素很多,既有内在的,也有外来的,所以在研究岩土力学问题时,必须把有关的各种因素放在一起加以考虑,研究它们彼此之间的相互作用和影响,这就是所谓的耦合作用(Coupling)。为了直观地说明相关因素的耦合作用, Hudson 教授提出了岩土力学与工程的相互作用矩阵(图 10-10),把主要影响因素,如岩体结构、地应力、水流和工程施工,放在矩阵的对角线上,而其他元素则是相互作用的因素。这个矩阵就是耦合研究的基础。

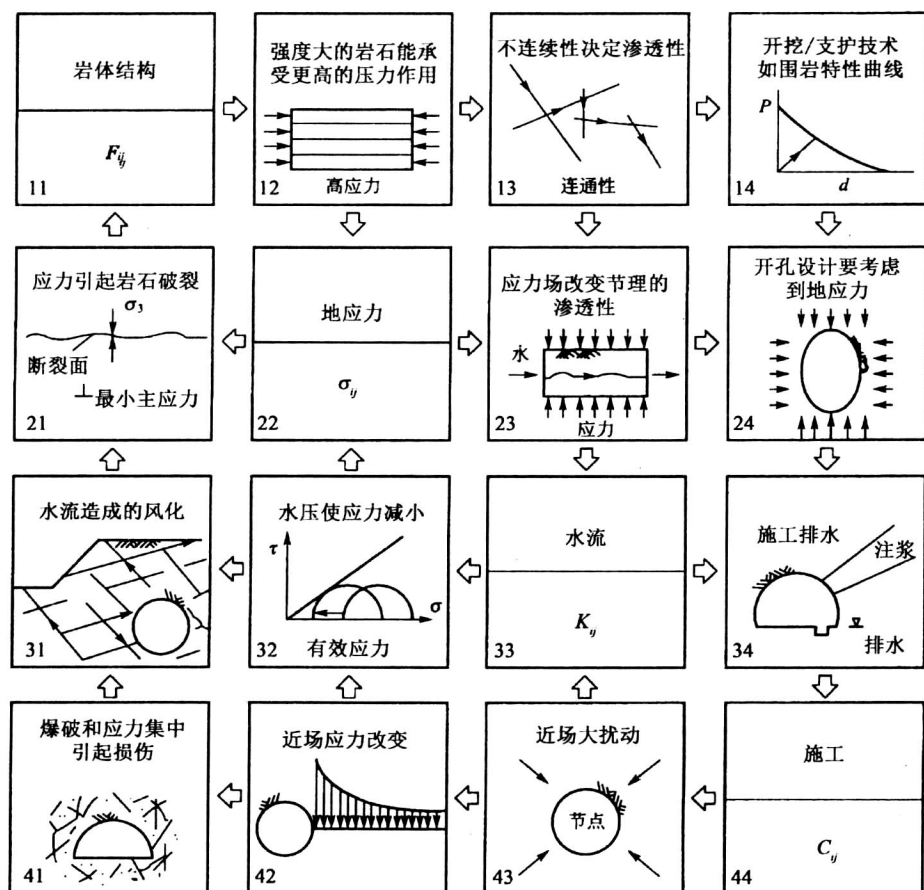


图 10-10 岩土力学与工程的相互作用矩阵

10.4.3.1 岩土力学多场耦合的基本理论

由于天然岩体并非总是单一的固相介质,有时在固相介质中的孔隙中储存有液相和气相,这样的介质称为三相介质体。在许多情况下,必须考虑液体(水或油)、气体(煤矿瓦斯等)在孔隙和裂隙岩体中的流动规律,这是一个三相介质耦合的相互作用问题,所形成的应力场对岩体的变形和稳定有着重要的影响,例如,岩体中的冷库、气储存库、油库、核废料处理等都涉及多相介质的相互作用问题。当前,水电站大坝建设中的岩体渗流是其中的一个重要领域,如三峡大坝高边坡就需要研究水位上升的渗流诱发的滑坡和地震。

目前所做的岩土力学多场耦合分析中的多场是对岩体应力场、渗流场和温度场等的简称。耦合通常指复杂系统中子系统之间的相互作用和相互影响。因此,多场耦合是指岩体应力场、渗流场和温度场等之间的相互作用和相互影响。多场耦合首先是两个场之间的耦合,如渗流场和应力场之间的耦合,也称 HM 耦合;温度场与渗流场之间的耦合,也称 TH 耦合;温度场与应力场之间的耦合,也称 TM 耦合。耦合问题可分为直接耦合和间接耦合两类。以 HM 耦合为例,直接耦合指力学变形、流体渗透之间的相互作用;间接耦合指由于岩体变形和渗流的影响,岩体水力特性发生变化从而影响岩体的变形和渗流特性。例如,岩体受到各种荷载的作用,初始应力场受到改造,岩体发生变形或破坏,从而岩体的渗透特性发生变化,相应的,岩体渗透特性的变化又进一步改造了岩体应力场,这就显示出岩体渗流场与应力场之间的耦合关系。

岩体具有复杂的变形破坏机制,图 10-11 所示为裂隙岩体变形特性的总体描述。

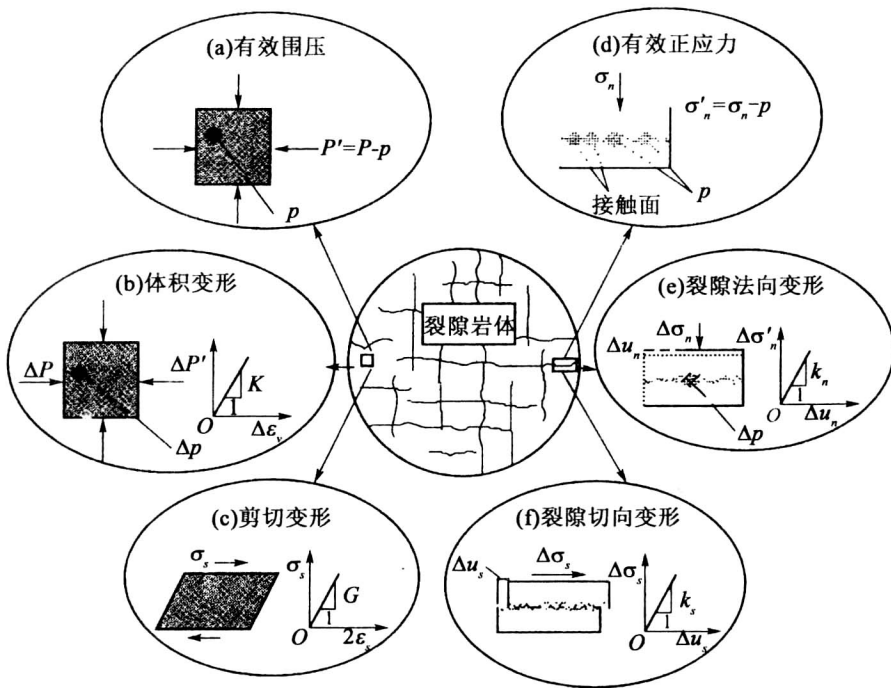


图 10-11 裂隙岩体变形的总体描述

图 10-12 反映了在法向应力、剪应力和三维应力下裂隙及岩体的渗透性与变形之间的变化规律。由图 10-12 可见,裂隙在法向应力作用下产生闭合变形,张开度不断减小,裂隙渗透系数随法向应力减小,最终趋于一个常数;裂隙在法向应力和剪应力作用下,一开始产生少量剪缩,渗透性降低,随后裂隙很快产生剪胀,渗透性增大,当剪胀发挥到定程度后渗透性趋于稳定;裂隙岩体在三维压应力作用下,渗透性在初始阶段由于岩体体积压缩而有所降低,随着岩体体积膨胀渗透性迅速增大,当进入应变软化阶段后,岩体渗透性变化缓慢,甚至有所降低。裂隙及岩体渗透特性变化的上述规律,包含了复杂的岩体水-力耦合机制。

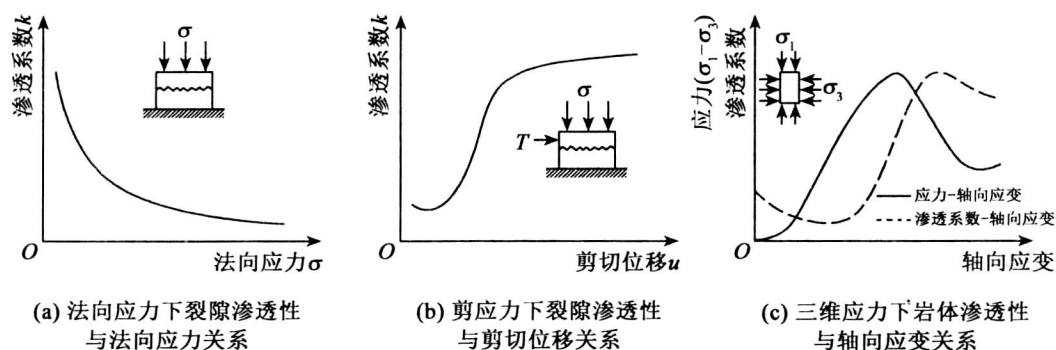


图 10-12 裂隙与岩体渗透性与变形的关系示意图

不同的研究领域对多场耦合常有不同的提法,如流固耦合、水-岩相互作用、热-水-力耦合等。流固耦合通常侧重于研究固体介质和流体间的耦合效应及基本规律;水-岩相互作用主要研究高温高压条件下,岩石和水发生的化学反应规律及其地球化学特征。水利水电工程中所研究的岩体多场耦合强调岩体水-力耦合作用及其对岩体和水工建筑物变形与破坏规律的影响。核废料地质处置中研究的多场耦合则侧重于热-水-力及化学过程的耦合效应,国际岩土力学界称为 THMC 耦合。尽管不同领域所研究的内容和重点有所区别,但仍然存在许多相同或相似的科学问题,可以相互借鉴和相互促进。图 10-13 给出了岩体应力场、渗流场和温度场之间的耦合关系。

10.4.3.2 岩土力学多场耦合的控制方程

基于均衡方程、有效应力概念、Darcy 定律、Fourier 定律、质量守恒和能量守恒定律,可以推导出 THM 耦合过程的控制方程。模型由 T、H、M 三场的 3 个方程组成。

1. 力学场方程

为了建立岩石介质的固相变形破坏模型,考虑一个有代表性的介质体积单元,受外力为 σ_{ij} ,忽略内部作用,单元体积的线性动量守恒方程为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10-53)$$

式中, F_i 为单元体积在直角空间坐标下的 x_i 坐标的体力分量; N 为空间维数。

Terzaghi 有效应力原理的总应力增量形式可以写为

$$d\sigma_{ij} = d\sigma'_{ij} - \alpha_i dp_i \delta_{ij} \quad (10-54)$$

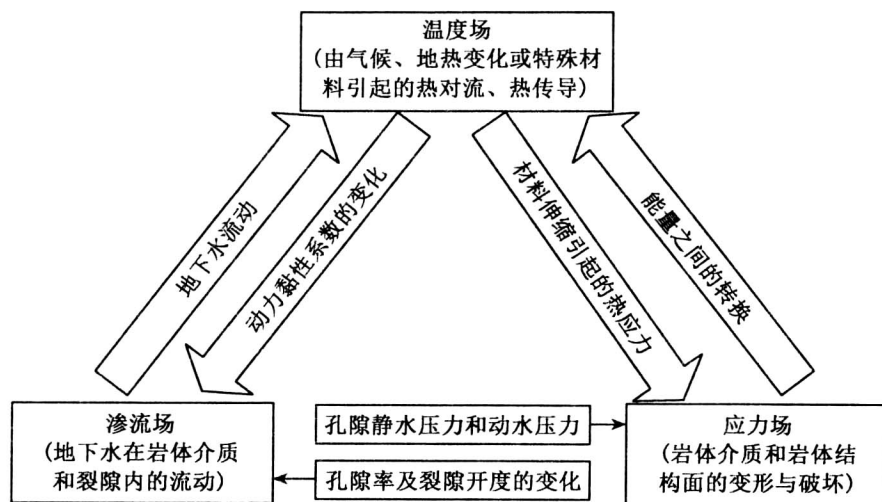


图 10-13 岩体应力场、渗流场和温度场之间的耦合关系

式中, $d\sigma'_{ij}$ 为有效应力; p_l 为孔隙水压力 (压缩为正); α_l 为增量有效应力参数; δ_{ij} 为 Kronecker 参数。

为了描述岩体介质的热膨胀、水膨胀及弹塑性变形行为, 介质的总应力采用增量形式定义为

$$d\sigma_{ij} = D^e_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon^p_{kl} - d\varepsilon^T_{kl} - d\varepsilon^s_{kl}) \quad (10-55)$$

式中, D^e 为岩体的弹性刚度张量; ε 为总应变张量; ε^p 为塑性应变张量; ε^T 为温度变化产生的热应变张量; ε^s 为岩体中饱水度变化产生的湿润膨胀应变张量。

因此, 有

$$\begin{aligned}
 D^e_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\
 d\varepsilon^T_{ij} &= \gamma dT \delta_{ij}, \quad d\varepsilon^s_{ij} = \beta S_e \delta_{ij}
 \end{aligned} \quad (10-56)$$

式中, u 为岩石骨架的位移, 在空间上有 3 个方向的分量; γ 为岩石的热膨胀系数; S_e 为岩石内有效饱和度; β 为黏土矿物的遇水膨胀系数。

根据弹塑性理论, 介质总应力的增量形式改写成

$$d\sigma_{ij} = D^p_{ijkl} du_{k,l} - (\gamma dT + \beta S_e) \delta_{ij} \quad (10-57)$$

式中, D^p 是岩体的弹塑性刚度张量。

因此, 得到非饱和岩体弹塑性力学场模型的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[D^p_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - (\gamma dT + \alpha_l p_l + \beta S_e) \delta_{ij} \right] + dF_i = 0 \quad (10-58)$$

因温度变化而引起的岩石变形可表示为

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T \quad (10-59)$$

式中, ε 为线应变; ΔT 为温度增量; α 为岩石材料的温度线膨胀系数, 一般可取为常数, 不随岩石介质的温度而变化。

在力学控制方程式中, TM 耦合项是 γdT , 在平面应变问题情况下, γ 为岩体骨架的线膨胀系数与 $E/(1-\mu)$ 的乘积, dT 表示岩体温度的改变, 其中, E 为岩体骨架的杨氏模量, μ 为泊松比。孔隙水压力对岩石骨架的作用在控制方程中通过 p_l 项表示。

因此, 应力场控制方程式不仅描述了各向异性岩石介质受到外力作用下岩石的应力与变形行为, 还包含了温度场及渗流场对应力的耦合作用, 而且还考虑了热应力膨胀效应及孔隙水压力对有效应力的影响等。

2. 渗流场方程

渗流场控制方程为

$$C_m \frac{\partial p_l}{\partial t} + \nabla \cdot \left[-\frac{k_l}{\eta_l} k_r \nabla (p_l + \rho_l g D) \right] = Q, \quad (10-60)$$

式中, p_l 为孔隙水压力, 当它为负值时, 代表介质处于非饱和状态; ρ_l 为流体(地下水)密度; Q 为源汇项;

k_l 为渗透系数, 相对渗透系数是 k_r , 表征不同的饱和状态对水分迁移速度的影响, 可以表示为水饱和度的函数, 即

$$k_r = S^3, \quad (S \text{ 为介质的含水饱和度}) \quad (10-61)$$

C_m 为容水度, 其计算公式为 $k_r = -\varphi \cdot \partial S / \partial s$ (φ 为介质的孔隙度) (10-62)

ρ_l 是流体(地下水)密度, 当它表示为温度的函数时 $\rho_l = \rho(T)$, 也就引入了温度场对渗流场的耦合作用, 同样, 流体黏度也可以表征为温度的函数 $\eta_l = \eta(T)$, 这两个函数关系式需要实际测定。

3. 温度场方程

假设考虑单元局部不等温过程, 基于能量在固相、液相介质之间的传递, 可以分别建立岩体和孔裂隙流体的温度场模型。一般情况下, 假设在每一时步固液两相具有相同的温度, 对固流两相做局部等温的简化处理, 相应的控制方程为

$$(\rho_s C_s) \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\lambda_s \nabla T) + \rho_l C_l \bar{u} \cdot \nabla T = Q_T \quad (10-63)$$

式中, T 为固相岩石和液相水的共同温度; $(\rho_s C_s) \frac{\partial T}{\partial t}$ 为介质温度随时间变化时的热量传递, $\rho_s C_s$ 为岩石的密度和热容的乘积; $\nabla \cdot (-\lambda_s \nabla T)$ 为由于介质温度梯度造成的热量传递, λ_s 为热传导系数; $\rho_l C_l \bar{u} \cdot \nabla T$ 为由于介质中水的流动引起的热量传递, $\rho_l C_l$ 为流体的密度和热容乘积; \bar{u} 为表示介质中水的流动速度; Q_T 为热量的源汇项。

10.5 岩土力学系统

10.5.1 概述

岩土工程主要包括强度、刚度及稳定性三类工程力学问题, 而由于工程的稳定性不足造

成的损失是巨大的,甚至是灾难性的;同时,岩土力学的另一类问题是如何有效地利用岩石结构的失稳破坏来破碎岩石。岩土工程的稳定性是岩土工程中最难解决、理论基础最薄弱而又易与岩土力学强度问题相混淆的、尚未完全解决的一类重大问题。岩土工程的失稳现象常常与重大的地质灾害联系在一起,故如何预测预报以及最终防治岩土工程的失稳破坏来解决岩土工程的稳定性问题,是岩土力学工作者一直探索的主要目标。

就系统论的观点而言,系统是由若干相互联系、相互依赖、相互作用的要素所组成的具有一定结构形式和功能作用的有机整体。岩土力学系统是指岩土结构体在外力等作用下与围岩、支护及其工程地质、自然环境共同组成的力学系统。岩土力学系统往往由若干个要素组成,该要素可能是系统变量,也可能是反馈环或子系统(分系统)。通常,岩土力学系统是一个闭环系统。系统的响应(输出)一般对系统的激励(输入)有影响,即反馈系统。该力学系统的激励(输入)与响应(输出)并不是一个简单的正比例关系,而是一个非常复杂的非线性力学关系。岩土力学系统的非稳定破坏现象是大量存在的,如火山爆发、地震、雪崩、岩爆、矿震、库区地震、瞬时滑坡、采矿中顶板突然来压、突水、煤(岩)瓦斯突出等都是常见的岩体失稳现象,故岩土力学系统稳定性的研究无论在理论上还是实践上都是非常重要的,也一直是岩土力学研究中一个最活跃的点。

岩土力学系统主要分为岩土变形力学系统、岩土刚体运动力学系统、复杂岩土力学系统。如果从岩土力学系统所处的状态来分析,岩土力学系统又可分为平衡系统和运动系统。岩土力学系统一般从不同尺度的宏观角度来分析其结构形式和功能。从系统结构与系统环境相互作用的角度来分析,岩土力学系统是一个巨系统,可从不同的角度来对岩土力学系统分类,例如,从赋存方式来区分,可分为天然岩土力学子系统和人工岩土力学子系统;为了有利于建立数学模型,便于力学分析,可将岩土力学系统分为固体子系统、流体子系统、环境子系统等;同时将岩土力学系统运动稳定性分类,即岩土力学系统运动稳定性可分为岩土力学系统稳定问题、岩土力学系统渐进稳定问题、岩土力学系统非稳定问题。

10.5.2 岩土力学系统的基本问题

10.5.2.1 岩土力学系统的边界和环境

岩土力学系统的边界是指在一定的范围研究岩土力学系统的力学行为时,包含足够的研究信息所需要的最小界域。岩土力学系统边界以外的同系统有关联的包括各种形式的物质、能量或信息等部分,称为岩土力学系统的环境。岩土力学系统对岩土力学系统的环境有相对的独立性,所以,岩土力学系统演化过程的研究中,如果选取系统的边界太大,造成浪费,同时难以保证研究精度;如果系统的边界选取太小,则损失了必要的研究信息,使模型不足以反映原型,造成在研究域上的失真,其结论可信度就值得怀疑。岩土力学系统中应包括反映系统本质特性的实质变量,如果要研究系统的失稳特性,边界内应包含主导结构,即可能发生失稳的子系统,同时要包括与该失稳子系统有关的子系统。岩土力学系统是一个开放的系统,系统的边界确定后,系统的内部结构与系统外部的环境通过系统的边界有物质、能量和信息的传递和交换,这样,就存在着开放大小和开放程度的问题,即开放度。开放度是研究岩土力学系统演化过程一个必要的物理量。

10.5.2.2 岩土力学系统的结构

岩土力学系统结构是岩土力学系统的构成要素在时间、空间上连续的排列、组合及相互作用的方式,是系统构成要素组织形式的内在联系和秩序的规定性。结构是系统诸要素有序化的直接形式。不同的系统结构反映岩土力学系统本质规律性不同,系统有质的区别。

岩土力学系统中,结构的组成部分、时空秩序和联系规则称为岩土力学系统结构的三要素。有几个最简单的子系统,不同的几何排列、组合就可以有很多种组成方案。如果考虑子系统间不同强度的连接方式和子系统间参数高低的不同组合,可组成无数种方案,这说明由于岩土力学系统结构构成的复杂性,导致其表现的功能特性亦非常复杂。它所揭示的规律在自然界是普遍存在的,最典型的就是化学理论中揭示的同分异构现象。

与岩土力学系统的整体性、层次性及相对稳定性相对应,系统的结构也具有整体性、层次性及相对稳定性等特性。岩土力学系统的结构是岩土力学系统内在固有属性,在某一个层次上形成的岩土力学系统结构,可以是上一个系统结构的子结构,也可能是下一个或下几个子结构的总结构。既然是岩土力学系统的结构,在一定的时空范围内,系统的结构就具有一定的承载能力和功能作用,同时在一定的荷载和时间范围内,具有相对稳定的特性。

一般来说,岩土力学系统是一个巨系统,结构由以下几组要素组成:天然岩石固体部分;天然环境部分;流体(包括液体和气体)部分;人工工程、人工支护固体部分。

岩土力学系统的性质要取决于岩土力学系统的内部微观结构,也就是系统内部反馈结构与反馈机制。岩土力学系统的内部微观结构的内涵包括两个方面,一方面是指岩土力学系统组成的基本结构部分的性质及其相互关系与性质,即岩土力学系统的演化过程都主要根植于系统内部基本结构;另一方面是指岩土力学系统的内部微观结构与宏观行为的关系问题。大量的理论分析与实际测试都证实,岩土力学系统的宏观行为取决于系统的微观结构。

10.5.2.3 岩土力学系统的参数

从本质上讲,岩土力学系统的参数是岩土力学系统结构中的一部分,其原因是,岩土力学系统中,没有参数的结构形式是不存在的;反过来说,岩土力学系统结构中,必然存在不同类型的结构参数。岩土力学系统的参数包括几何特性参数、物理特性参数、力学特性参数及演化特性参数等,这些参数适当组合,就可以形成岩土力学系统结构的变量。

岩土力学系统的演化进程中,在系统达到临界平衡前,系统的微小参数变化一般不会引起系统的状态变化,即此时岩土力学系统的结构形式起主导作用,稳定的系统对参数不敏感;只有在系统达到临界状态时,系统的主导结构的参数变化才可能改变系统的状态变化,即系统的结构形式不起主导作用,此时参数变得非常敏感,参数的微小变化可能改变系统的功能特性。

10.5.2.4 岩土力学系统的反馈

岩土力学系统是一个反馈系统。研究岩土力学系统演化过程中的稳定性问题,必须首先研究岩土力学系统中各个子系统的反馈特性,这是研究岩土力学总系统反馈和稳定特性的基础。研究岩土力学系统及其子系统的反馈特性应包括以下几个主要问题:一是特征子系统的负反馈和正反馈特性;二是子系统的反馈特性与总系统反馈特性之间的关系;三是如何确定系统的反馈的主导结构和主反馈环,采用人为方式调整系统的结构形式、参数范围或

环境,促使系统的主导结构的子系统仅发生负反馈(稳定)或正反馈(非稳定)。

岩土力学系统的另一反馈特性是系统反馈的强弱问题。总系统中的众多子系统,如果某一个或几个子系统的正反馈特性比较弱,不能克服系统的总体负反馈能力,则总系统特性就为负反馈特性;或者,子系统具有克服系统的总体负反馈的能力,但强度较弱,则总系统特性就为弱正反馈特性;如果某一个或几个子系统的反馈特性比较强,足以克服系统的总体负反馈能力,并强度较大,则总系统特性就为较强的正反馈特性。

稳定的岩土力学系统的结构变化比参数变化更为敏感,不同的结构往往产生不同的行为模式。一般而言,岩土力学系统的正反馈环结构要比负反馈环结构变化更为敏感。加上或去掉一个正反馈环对模型结论可能会有本质的影响,而对一个稳定的岩土力学系统加上一个负反馈环却很少有影响,除非两个作用的负反馈环的结构变化可能引起系统的振荡。从一个稳定的系统中去掉一个负反馈环,可能使系统失稳,只要该负反馈环在结构中是最活跃的,与参数变化的条件相类似,结构变化的影响程度取决于它与模型结构主导部分的联系。非主导结构的变化,其影响甚微,参数变化与结构变化的界限很难划清。

10.5.2.5 岩土力学系统的功能

岩土力学系统的功能是指系统与外部环境相互联系和相互作用过程中表现出来的性质、能力和功效,是系统内部相对稳定的联系方式、组织秩序和时空关系的外在表现形式。

同一岩土力学系统结构具有多种功能,如隧道及其支护形成的力学系统,可用来实现通风、行人、运料、排水等功能。另外,系统的环境不同,系统的功能也不同,如水库在雨季主要是用来防洪、蓄水、调节排量,但在旱季则主要用来灌溉、运输、养殖、发电等。

岩土力学系统功能在与外界环境相互作用时才体现出来,故必须是开放的岩土力学系统才具有此性质。任何岩土力学系统都是开放的,并其有层次秩序,故岩土力学系统中各子系统同样具有各自的功能,即在系统的演化过程中,各子系统对上一级系统和其他子系统表现出其本身的性质、能力和功效,这就是岩土力学系统的内部功能。

岩土力学系统的内部结构往往是不清楚的,此时可采用系统的功能模拟方法来研究,即从模型的功能与原型的功能相似的角度建立模型。功能模拟方法将所研究的系统视为黑箱,不问系统的结构如何,通过一组或多组输入和输出比较来追求模型和原型的功能的异同,从而为模拟方法开辟了一条新路。岩土力学系统的结构是体现岩土力学系统功能的基础,要使岩土力学系统具有良好的功能性质和稳定性,必须优化岩土力学系统的结构。

10.5.3 岩土力学系统演化过程

10.5.3.1 岩土变形力学系统演化过程及其控制变量

岩土变形力学系统是指在外力作用下,岩土工程仍然保持连续变形的结构系统,岩体结构的失稳破坏,本质上是一个动力失稳过程,在动力失稳发生前,岩体在外力的作用下,随时间变化处在一个缓慢的不断地应变能积累过程中,失稳发生的瞬间与发生后显然是一个动力过程。在数学上描述与处理动力问题非常困难,故常假设失稳发生前的应变能积累过程为准静态,利用最小势能原理与狄里希锐(Dirichlet)原理来判别系统的平衡状态的稳定性,即

$$\delta \Pi = 0 \quad (10-64)$$

$$\delta^2 \Pi \leq 0 \quad (10-65)$$

为系统结构失稳的必要条件,式中, Π 为变形系统的总势能。由推导的结果可知,只有在介质中出现应变软化区,系统才有可能出现失稳。

式(10-64)和式(10-65)是用能量方法建立的适用于整个岩体变形力学系统分析的一个普遍原理,而刚度条件仅为岩样在单轴应力条件下判别是否失稳的特例。事实上,刚度矩阵的特征值法、奇异刚度矩阵法、海森矩阵法等都是式(10-65)的一个推论,其本质都是岩土结构在准静态条件下,刚度系数矩阵(包括材料的物理力学参数和几何参数)的元素随变形过程表现为非线性性质,刚度系数矩阵处于非正定的一种表现形式。

利用稳定性的基本定义,即根据施加的荷载 P 与系统的响应 R 间的对应关系来建立岩体失稳理论。当系统处于稳定状态时,荷载增量 ΔP 与其相应的响应增量 ΔR 的比值 $\Delta R/\Delta P$ 是常数或接近常数;如果外载 P 不断增加至临界状态 P_c 时,系统趋向不稳定,这时其比值 $\Delta R/\Delta P$ 将随着荷载的不断增加而增大。当系统失稳时

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta P} \rightarrow \infty \quad (10-66)$$

近年来,以所谓的“新三论”(耗散结构理论、协同学和突变理论)为代表的,包括突变、损伤、分岔、分形、混沌、神经网络等非线性系统科学得到了很大发展,并且在各方面得到应用,取得了许多新的成果。

10.5.3.2 岩石滑动力学系统演化过程及其控制变量

含有不连续面岩石的错动、滑动组成了岩石滑动力学系统,对该过程的研究,最早由 W. F. Brace 和 J. D. Byerlee (1966) 针对地震发生机理首次提出了黏滑理论 (Stick-slip Theory), 从 20 世纪 60 年代至今,国际上在该方面的研究从未中断。该模型采用了弹簧-滑块模型,模拟了断层地震的发生过程,即在地震发生过程中,由于断层接触的静摩擦力大于动摩擦力,断层的突然运动会引起整个系统的失稳,失稳后系统发生振动,这种失稳破坏叫做黏滑。黏滑理论解释了断层地震发生的机理。该理论建立了动力学模型,并采用微分方程来描述这一过程。A. Ruina 等 (1983) 在 J. Dieterich 的实验基础上提出了作用在滑块上的滑动速率和运动历史有关,由此采用一个具有速率和单状态变量有关的摩擦定律的单弹簧-滑块模型来模拟地震的发生过程,研究结果,空间不对称是由系统本身的动力学引起的,而不是它的非均匀性所致。

10.5.3.3 岩土力学系统动力演化过程及其控制变量

从动力学系统稳定性的观点提出滑坡灾害发生的一种新机制,它认为滑体滑动的稳定与否是与滑动的阻尼性质密切相关,稳定的滑动是由于系统存在正阻尼,非稳定的滑动是系统出现负阻尼所致,同时提出判别边坡滑动系统稳定性的准则。通过对边坡基底岩石振动因素的分析,建立了单一滑面滑体受基底岩石强迫振动的模型,采用非线性动力学方程描述滑体的变形规律,分析基底岩石振动过程中导致滑体移动的原因。它指出在一个频带范围力幅范围内,基底的振动会引起潜在滑体位移突跳,在滑面的法向方向上张开,切向上错动而诱发滑坡。在分析断层等不连续面冲击地压现象的基础上,用岩体的振动与断层间的刚体错动的叠加来描述不连续面冲击地压发生过程。它提出了断层上下两盘刚体滑动的稳定

与非稳定的形式;分析了振幅越来越大的不稳定振动。断层冲击地压发生时,岩体位移是岩体的振动与断层间的刚体错动的叠加;指出了发生断层冲击地压的影响因素及原因。

10.5.3.4 岩土力学系统的稳定性理论的初步应用

根据岩体的赋存特征及开挖后的受力特点,将采矿及掘进等工程进行过程中诱发的地震灾害分为三类:完整岩体受压应力作用的失稳、顶底板受拉应力型地震及断层走滑受剪型诱发地震。在分别分析其成因的基础上,建立采矿诱发三种类型地震的发生条件,提出防治发生诱发地震的对策。对岩石力学系统的部分接近临界稳定的子系统进行超前人工强扰诱发失稳,达到系统发生失稳而不产生重大灾害的目的,在煤矿防灾应用中已取得初步效果。不同的系统参数和系统结构对应着不同岩土力学系统状态,通过调整系统的受力状态、参数和结构状态的分析,探讨防治冲击地压发生的机制。从岩土力学系统运动稳定性的基本理论出发,将边坡力学系统分类,对连续协调变形边坡的稳定性问题进行了分析,找出系统的控制变量,同时对影响系统控制变量的因素进行初探。对含有结构面的边坡力学系统变形、滑动全过程进行分析,描述边坡力学系统变形、滑动两大过程的规律,同时考虑水与不连续面岩石相互作用对滑动系统的变形、滑动系统的稳定性的影响进行探讨。

10.5.4 岩土力学系统演化过程和演化规律研究的发展趋势

岩土工程组成的力学系统是一个复杂的巨系统,岩土力学系统演化过程和演化规律的研究影响因素多、求解难度大、复杂程度高,就目前的研究现状与客观条件,今后若干年重点突出以下主要研究内容:

(1)岩土力学系统结构形式对岩土力学系统演化过程和演化规律的影响,包括不同的几何因素组成的结构形式、子系统间的连结方式、非线性边界、非线性约束等的研究。当然,在治理岩土力学系统失稳时,首先考虑岩土力学系统中同等条件下的几何结构形式的调整、控制和优化。

(2)受结构组成复杂性的影响,岩土力学系统中,子系统和总系统的激励和响应之间为非线性关系,探求该非线性关系是岩土力学研究中的一个基本任务。

(3)寻求复杂(多种作用、多相作用问题)岩土力学系统演化过程和演化规律的描述、建模;确定系统演化过程中的控制变量及其支配作用;确定系统演化过程中的主导结构和主反馈环;建立子系统与总系统稳定性之间的关系;研究确定、不确定模型的求解方法,主要采用数值解法求解。

(4)系统中参数性质对岩土力学系统演化过程和演化规律的影响,主要包括系统参数在岩土力学系统中所起的作用,在治理岩土力学系统失稳时,能否通过调整系统中所有或部分子系统的参数来调整系统的状态和稳定性。

(5)岩土力学系统结构的受力状态对系统演化过程和演化规律研究的影响,主要包括系统结构和系统参数一定的条件下,系统受力的临界荷载等。

参考文献

- [1] 孙钧. 世纪之交的岩石力学研究[C]. 中国岩石力学与工程学会第五次学术大会论文集. 上海:中国科学技术出版社,1998.
- [2] 王思敬. 作为现代学科的岩石研究与实践[C]. 中国岩石力学与工程学会第五次学术大会论文集. 上海:中国科学技术出版社,1998.
- [3] 周维垣等. 高等岩石力学[M]. 北京:水利电力出版社,1990.
- [4] 蔡美峰,何满潮,刘东燕. 岩石力学与工程[M]. 北京:科学出版社,2002.
- [5] 高玮. 岩石力学[M]. 北京:北京大学出版社,2010.
- [6] 张清,杜静. 岩石力学基础[M]. 北京:中国铁道出版社,1997.
- [7] J. A. Hudson, J. P. Harrison. Engineering Rock Mechanics-An Introduction to the Principles[M]. Elsevier Science Ltd,2000.
- [8] [澳]J. P. Harrison, J. A. Hudson. Engineering Rock Mechanics-Part2:Illustrative Worked Examples[M]. Elsevier Science Ltd,2000.
- [9] 孙广忠. 岩体结构力学[M]. 北京:科学出版社,1988.
- [10] [澳]J. C. 耶格, N. G. W. 库克. 岩石力学基础[M]. 中国科学院工程力学研究所,译. 北京:科学出版社,1983.
- [11] Richard E. Goodman. Introduction to Rock Mechanics(Second Edition)[M]. NewYork: John Wiley & Sons,1989.
- [12] [法]J. 塔罗勃. 岩石力学[M]. 林天健,葛修润等,译. 北京:中国工业出版社,1965.
- [13] 薛守义. 高等土力学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2007.
- [14] 李广信. 高等土力学[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
- [15] 谢定义,姚仰平,党发宁. 高等土力学[M]. 北京:高等教育出版社,2008.
- [16] 龚晓南. 高等土力学[M]. 杭州:浙江大学出版社,1996.
- [17] 卢廷浩,刘祖德等. 高等土力学[M]. 北京:机械工业出版社,2005.
- [18] 徐学燕. 高等土力学[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.
- [19] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京:水利电力出版社,1983.
- [20] K. Terzaghi. Theoretical Soil Mechanics[M]. NewYork:John Wiley&Sons,1943. (中译本:理论土力学. 徐志英,译. 北京:地质出版社,1960.).
- [21] K. Terzaghi, R. B. Peck. Soil Mechanics in Engineering Practice[M]. New York: John Wiley&Sons,1948. (中译本:工程实用土力学. 蒋彭年,译. 北京:水利电力出版社,1960.).

- [22] 东南大学,浙江大学,湖南大学,苏州科技学院. 土力学(第二版)[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2005.
- [23] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2000.
- [24] 俞茂宏,何丽南,宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广[J]. 中国科学, A 辑, 1985, 28(12): 1113-1120.
- [25] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1-10.
- [26] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1998.
- [27] 陈晓平,杨光华,杨雪强. 土的本构关系[M]. 北京:中国水利水电出版社,2011.
- [28] 蒋彭年. 土的本构关系[M]. 北京:科学出版社,1982.
- [29] 张强勇. 岩土工程强度与稳定计算及工程应用[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2005.
- [30] 杨桂通. 弹塑性力学[M]. 北京:人民教育出版社,1980.
- [31] 王祖城,汪家才. 弹性和塑性理论及有限单元法[M]. 北京:冶金工业出版社,1983.
- [32] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京:人民交通出版社,2003.
- [33] 郑雨天. 岩石力学的弹黏塑性理论基础[M]. 北京:煤炭工业出版社,1988.
- [34] 郑颖人,沈珠江,龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2002.
- [35] 屈智炯,刘恩龙. 土的塑性力学[M]. 北京:科学出版社,2011.
- [36] 孙钧. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1999.
- [37] 孙钧,张玉生. 大断面地下结构黏弹塑性有限元解析[J]. 同济大学学报,1983(2).
- [38] D. C. Drucker, W. Prager. Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, 10(2).
- [39] M. A. Biot. General Theory of Three-Dimensional Consolidation[J]. J. Appl. Phys., 1941, 12: 155-164.
- [40] 刘北辰,陆鸿森. 弹性力学[M]. 北京:冶金工业出版社,1979.
- [41] P. V. Lade, J. M. Duncan. Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil [J]. Proc. ASCE, JGED, 1975, 101(GT10).
- [42] P. V. Lade. Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces [J]. Intern. J. Solids Structures, 1977, 13.
- [43] R. E. Goodman. Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks[M]. West Publishing Company, 1976.
- [44] 谢定义. 土动力学[M]. 西安:西安交通大学出版社,1988.
- [45] 杨桂通. 土动力学[M]. 北京:中国建筑材料工业出版社,2000.
- [46] 戴俊. 岩石动力学特性与爆炸理论[M]. 北京:冶金工业出版社,2002.
- [47] [英] O. C. 辛凯维奇. 有限单元法[M]. 尹泽勇,江伯南,译. 北京:科学出版社,1985.
- [48] 江见鲸,何放龙,何益斌等. 有限元法及其应用[M]. 北京:机械工业出版社,2006.
- [49] 王金安,王树仁,冯锦艳. 岩土工程数值计算方法[M]. 北京:科学出版社,2010.

- [50] 谢康和,周健. 岩土工程有限元分析理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2002.
- [51] 卢廷浩. 岩土数值分析[M]. 北京:中国水利水电出版社,2008.
- [52] 雷晓燕. 岩土工程数值计算[M]. 北京:中国铁道出版社,1999.
- [53] 孙钧. 岩土力学与地下工程结构分析计算的若干进展[J]. 力学季刊,2005,09,26(3):329-338.
- [54] 周维垣,杨强. 岩石力学数值计算方法[M]. 北京:中国电力出版社,2005.
- [55] 于学馥等. 地下工程围岩稳定分析[M]. 北京:煤炭工业出版社,1983.
- [56] 宋雅坤,郑颖人,赵尚毅. 有限元强度折减法在三维边坡中的应用与研究[J]. 地下空间与工程学报,2006(5).
- [57] S. L. Crouch, A. M. Starfield. Boundary Element Method in Solid Mechanics[M]. George Allen & Unwin Ltd, 1983.
- [58] G. N. PANDE, G. BEER, J. R. WILLIAMS. Numerical Methods in Rock Mechanics [M]. London: John Wiley & Sons, 1990.
- [59] 张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分法[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [60] 徐芝伦. 弹性力学简明教程[M]. 北京:高等教育出版社,2002.
- [61] 孔书伟,林杭,任连伟. FLAC3D 在岩土工程中的应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,2011.
- [62] 李围. 隧道及地下工程 FLAC 解析方法[M]. 北京:中国水利水电出版社,2009.
- [63] 彭文斌. FLAC3D 实用教程[M]. 北京:机械工业出版社,2008.
- [64] 陈育民. FLAC 及 FLAC3D 基础与工程实例[M]. 北京:中国水利水电出版社,2009.
- [65] 朱合华,陈清军,杨林德. 边界单元法及其在岩土工程中的应用[M]. 上海:同济大学出版社,1997.
- [66] P. A. Cundall. Distinct Element Methods of Rock and Soil Structure [J]. E. T. Browned. Analytical & Computational Methods in Engineering Rock Mechanics, 1987, 126-163.
- [67] 王永嘉,刑纪波. 离散单元法及其在岩土力学中的应用[M]. 沈阳:东北工学院出版社,1991.
- [68] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算[M]. 北京:中国建材工业出版社,2001.
- [69] 钱家欢,殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 第二版. 北京:水利电力出版社,1994.
- [70] [美] E. Hoek, E. T. Brown. 岩石地下工程[M]. 连志升,田良灿,王维德,译. 北京:冶金工业出版社,1986.
- [71] 王后裕,陈上明,言志信. 地下工程动态设计原理[M]. 北京:化学工业出版社,2008.
- [72] 张永兴. 岩石力学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2008.
- [73] 李晓红. 隧道新奥法及其测量技术[M]. 北京:科学出版社,2002.
- [74] 夏才初,李永盛. 地下工程测试理论与监测技术[M]. 上海:同济大学出版社,1999.
- [75] 张永兴,王桂林,胡居义. 岩石洞室地基稳定性分析方法与实践[M]. 北京:科学出版社,2005.
- [76] A. W. Bishop. The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes [J].

- Geotechnique, 1955, 5(1).
- [77] A. W. Bishop, I. Alpan, G. E. Blight and J. B. Donald. Factors Controlling the Shear Strength of Partly Saturated Cohesive Soils [J]. ASCE Research Conference on the Shear Strength of Cohesive Soils, Univ. of Colorado, 1960.
- [78] E. M. Dawson, W. H. Roth and A. Drescher. Slope Stability Analysis by Strength Reduction [J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835-840.
- [79] N. Janbu. Slope Stability Computations. Embankment-Dam Engineering, 1973.
- [80] E. A. Spencer. Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-Slice Forces [J]. Geotechnique, 1967, 17(1).
- [81] D. V. Griffith and P. A. Lane. Slope Stability Analysis by Finite Element [J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387-403.
- [82] 张有天. 岩石高边坡的变形与稳定 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999.
- [83] 陈祖煜. 岩质边坡稳定分析——原理、方法、程序 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.
- [84] 张永兴, 王桂林, 胡居义. 岩石洞室地基稳定性分析方法与实践 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [85] 陈祖煜. 地基承载力的数值分析 [J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 6-13.
- [86] 包承钢等. 地基工程可靠度分析方法研究 [M]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1997.
- [87] 高大钊. 土力学可靠性原理 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
- [88] 冯夏庭. 智能岩石力学导论 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [89] 谢和平. 分形岩石力学导论 [M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [90] 徐永福. 岩石力学中的分形几何 [J]. 水利水电科技进展, 1995, 15(6): 15-20.
- [91] [英] B. K. 阿特金森. 岩石断裂力学 [M]. 尹祥础, 修济刚, 译. 北京: 地震出版社, 1992.
- [92] 周创兵等. 论岩体多场广义耦合及其工程应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(7): 1329-1340.
- [93] 赵阳升等. 多孔介质多场耦合作用理论及其在资源与能源工程中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(7): 1321-1328.
- [94] 高玮, 刘泉声. 基于仿生计算智能的地下工程反分析——理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [95] 王来贵, 黄润秋, 王泳嘉等. 岩石力学系统运动稳定性及其应用 [M]. 北京: 地质出版社, 1998.

[General Information]

书名=高等岩土力学=ADVANCED ROCK AND SOLI MECHANICS

作者=李元松主编；张电吉，陈清运，孙小敏副主编

页数=404

SS号=13340698

DX号=

出版日期=2013.06

出版社=武汉大学出版社

封面

书名

版权

前言

目录

第1章 绪论

1.1 岩土力学的概念、特点及研究方法

1.2 岩土力学的研究内容与工程问题

1.2.1 岩土力学研究的内容

1.2.2 岩土力学研究的工程问题

1.3 岩土力学的发展与展望

第2章 岩土的基本力学特性

2.1 基本试验资料

2.1.1 直剪试验

2.1.2 固结试验

2.1.3 常规三轴试验

2.1.4 真三轴试验

2.2 土的变形特性

2.2.1 基本变形特性

2.2.2 一般变形特性

2.2.3 土的变形机制

2.3 土的强度特性

2.3.1 土的破坏与强度

2.3.2 抗剪强度公式

2.3.3 黏性土的强度

2.3.4 粗粒土的强度

2.3.5 强度影响因素

2.4 岩石的基本力学性质

2.4.1 岩石的强度

2.4.2 岩石的变形

2.5 岩体的基本力学性质

2.5.1 岩体结构面力学特征

2.5.2 岩体的变形

2.5.3 岩体的强度

第3章 岩土의渗透性及渗流

3.1 概述

3.2 岩土의渗透性

3.2.1 渗流基本概念

3.2.2 渗透定律

3.2.3 渗透试验与渗透系数

3.3 渗流基本方程

3.3.1 基本方程

- 3.3.2边界条件
 - 3.3.3初始条件
 - 3.3.4基本方程的应用
- 3.4势流与流网
 - 3.4.1势流与势函数
 - 3.4.2等势线
 - 3.4.3流线
 - 3.4.4流网
- 3.5渗流有限元计算
 - 3.5.1水头变分方程
 - 3.5.2变分方程的离散
 - 3.5.3浸润面边界的处理
- 3.6渗透破坏与控制
 - 3.6.1渗流力
 - 3.6.2流砂或流土现象
 - 3.6.3管涌现象和潜蚀作用
- 第4章 岩土强度理论
 - 4.1强度条件的形式
 - 4.1.1第一种形式
 - 4.1.2第二种形式
 - 4.1.3第三种形式
 - 4.1.4破坏曲线
 - 4.1.5岩土类材料的屈服与破坏特性
 - 4.2经典强度理论
 - 4.2.1 Coulomb-Mohr屈服准则
 - 4.2.2 Tresca准则
 - 4.2.3 Mises准则与Drucker-Prager准则
 - 4.2.4 Lade-Duncan准则及Lade准则
 - 4.2.5格里菲斯 (Griffith) 理论
 - 4.2.6霍克 (Hoek) -布朗 (Brown) 经验准则
 - 4.3统一强度理论
 - 4.3.1经典强度理论简评
 - 4.3.2二参数强度理论
 - 4.3.3三参数强度理论
 - 4.3.4关于统一强度理论
- 第5章 岩土黏弹塑性理论框架
 - 5.1线弹性理论
 - 5.1.1横观同性介质
 - 5.1.2各向同性介质
 - 5.1.3弹性常数的物理意义与测定
 - 5.2弹塑性理论
 - 5.2.1全量理论与增量理论

5.2.2加载条件与加卸载准则	
5.2.3 Drucker公设和	公设
5.2.4塑性位势流动理论	
5.2.5硬化模型与硬化定律	
5.2.6弹塑性本构关系及其矩阵	
5.3岩土流变理论	
5.3.1岩土流变的概念	
5.3.2流变模型理论	
5.3.3长期强度	
5.4滑移线场理论	
5.4.1基本方程	
5.4.2滑移线场	
5.4.3边值问题	
5.4.4解析解答	
5.4.5数值解答	
5.5极限分析理论	
5.5.1静力许可应力场	
5.5.2运动许可速度场	
5.5.3虚功率原理	
5.5.4极限分析定理	
5.5.5近似解法举例	
第6章 岩土体变形计算	
6.1岩土变形分析方法	
6.1.1岩土变形机制	
6.1.2变形分析方法	
6.2弹性力学公式	
6.2.1 Boussinesq公式	
6.2.2 Cerutti公式	
6.2.3 Mindlin公式	
6.3基础最终沉降计算	
6.3.1地基应力计算	
6.3.2普通分层总和法	
6.3.3修正分层总和法	
6.3.4应力历史法	
6.3.5 Skempton-Bjerrum法	
6.3.6有关问题讨论	
6.4一维固结计算	
6.4.1一维固结方程	
6.4.2一维固结计算	
6.4.3有关问题讨论	
6.5准多维固结计算	
6.5.1体积应变与应力	

- 6.5.2非耦合固结方程
 - 6.5.3假设的合理性
 - 6.5.4砂井固结计算
- 6.6三维固结计算
 - 6.6.1问题的基本方程
 - 6.6.2 Biot方程的推导
- 第7章 岩土的动力特性
 - 7.1岩土中的弹性波理论
 - 7.1.1波在介质中的传播
 - 7.1.2波动方程
 - 7.1.3平面波
 - 7.1.4等直杆中纵波的基本理论
 - 7.1.5岩土中的弹性波
 - 7.2岩土的动力特性
 - 7.2.1动力问题与动荷载
 - 7.2.2岩土动力参数
 - 7.2.3岩土的动力变形特性
 - 7.2.4岩土的动力强度特性
 - 7.3土的振动液化
 - 7.3.1土的振动液化机理及试验分析
 - 7.3.2影响土液化的主要因素
 - 7.3.3地基液化判别与防治
- 第8章 岩土工程问题
 - 8.1挡墙岩土压力
 - 8.1.1 Rankine土压力理论
 - 8.1.2 Coulomb土压力理论
 - 8.1.3有关问题说明
 - 8.2岩土地基工程
 - 8.2.1概述
 - 8.2.2地基临界荷载
 - 8.2.3无重介质承载力公式
 - 8.2.4 Terzaghi承载力公式
 - 8.2.5 Meyerhoff承载力公式
 - 8.2.6岩基承载力
 - 8.2.7有关问题说明
 - 8.3岩土边坡工程
 - 8.3.1概述
 - 8.3.2稳定分析理论
 - 8.3.3 Fellenius条分法
 - 8.3.4 Bishop条分法
 - 8.3.5 Janbu条分法
 - 8.3.6 Morgentern-Price条分法

- 8.3.7有关问题说明
- 8.4岩土地下工程
 - 8.4.1概述
 - 8.4.2地下工程围岩应力
 - 8.4.3围岩压力与控制
- 8.5深部岩体力学问题
 - 8.5.1深部岩体的特点
 - 8.5.2深部岩体工程力学特性
 - 8.5.3深部岩体工程施工设计特点
- 第9章 岩土力学数值分析方法
 - 9.1概述
 - 9.1.1岩土工程问题的基本特点
 - 9.1.2岩土工程数值分析方法的类型
 - 9.2有限元法
 - 9.2.1有限元法的基本方程
 - 9.2.2初始地应力与等效节点力
 - 9.2.3施工过程的模拟
 - 9.2.4岩体力学中的有限元法特点
 - 9.2.5有限元法求解岩土力学问题的步骤及实例
 - 9.3边界元法
 - 9.3.1直接边界元法基本方程
 - 9.3.2间接边界元法基本方程
 - 9.3.3边界元法求解平面问题的步骤
 - 9.4有限差分法
 - 9.4.1有限差分基本方程
 - 9.4.2平面问题有限差分方程
 - 9.4.3显式有限差分算法——时间递步法
 - 9.4.4三维问题有限差分法方程
 - 9.5离散元法
 - 9.5.1离散元法的基本方程
 - 9.5.2离散元法的计算机实施
 - 9.5.3参数的选择和本构模型
 - 9.6应用岩土数值分析方法应注意的问题
- 第10章 岩土力学的最新进展
 - 10.1智能岩土力学
 - 10.1.1专家系统及应用
 - 10.1.2人工神经网络及应用
 - 10.1.3其他研究
 - 10.2细观岩土力学
 - 10.2.1光学显微镜观测方法
 - 10.2.2电子显微镜观测方法
 - 10.2.3声发射方法

- 10.2.4 计算机断层成像观测方法
 - 10.3 不确定性岩土力学
 - 10.3.1 模糊数学分析方法
 - 10.3.2 灰色系统分析方法
 - 10.3.3 岩土的可变性分析
 - 10.4 其他方法
 - 10.4.1 岩石损伤力学研究
 - 10.4.2 分形岩土力学研究
 - 10.4.3 岩土力学耦合分析
 - 10.5 岩土力学系统
 - 10.5.1 概述
 - 10.5.2 岩土力学系统的基本问题
 - 10.5.3 岩土力学系统演化过程
 - 10.5.4 岩土力学系统演化过程和演化规律研究的发展趋势
- 参考文献